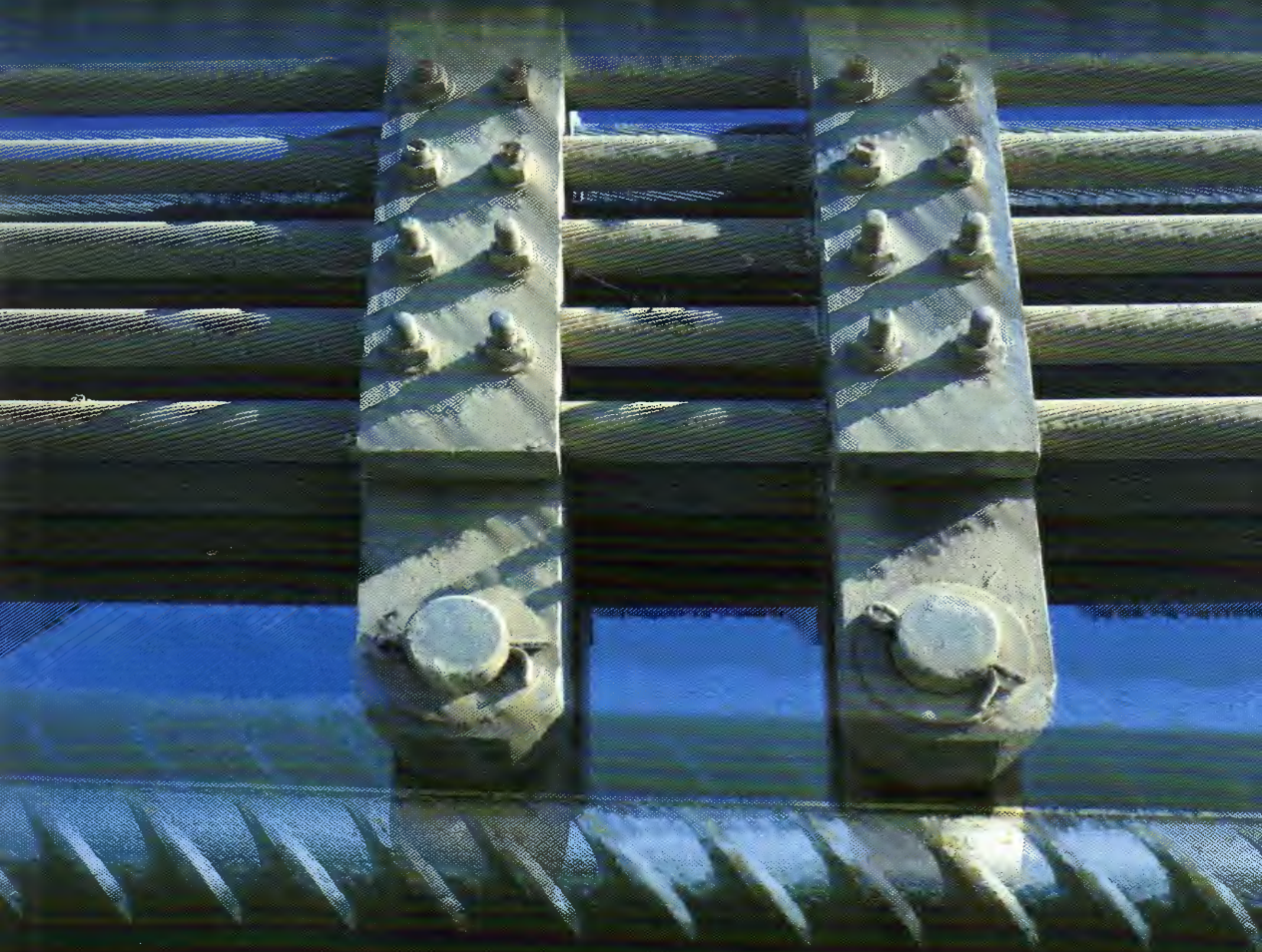
RESISTENCIA DE MATERIALES

Pytel • Singer

Traducción de la cuarta edición en inglés



Alfaomega

OXFORD

Resistencia de materiales

OXFORD UNIVERSITY PRESS

Traducción:
Ing. Raimundo Gaspar Torrent
Dr. Ing. Ángel Gutiérrez Vázquez
Escuela Politécnica Superior del Ejército,
Madrid, España

Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México
Asesor editorial en educación tecnológica

Comunicación en mecánica de materiales y estructuras
Miembro de la *United States Metric Association* (USMA)

Resistencia de materiales

Traducción de la cuarta edición en inglés

Con apreciación práctica de las unidades SI y técnicas

Andrew Pytel

THE PENNSYLVANIA STATE UNIVERSITY, E.U.A.

Ferdinand L. Singer†

NEW YORK UNIVERSITY, E.U.A.

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

Antonio Caso 142, San Rafael,
Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06470, México, D.F.
Tel.: 5592 4277, Fax: 5705 3738, e-mail: oxford@oup.com.mx

Oxford University Press es un departamento de la Universidad de Oxford.
Promueve el objetivo de la Universidad relativo a la excelencia en la investigación, erudición
y educación mediante publicaciones en todo el mundo en

Oxford New York

Auckland Cape Town Dar es Salaam Hong Kong
Karachi Kuala Lumpur Madrid Melbourne Mexico City
Nairobi New Delhi Taipei Toronto Shanghai

Con oficinas en
Argentina Austria Brazil Chile Czech Republic France Greece
Guatemala Hungary Italy Japan South Korea Poland Portugal Singapore
Switzerland Thailand Turkey Ukraine Vietnam

Oxford es una marca registrada de Oxford University Press en el Reino Unido y otros países.
Publicado en México por Oxford University Press México, S.A. de C.V.

División: Universitaria
Área: Ingeniería

Edición: Francisco Paniagua Bocanegra
Producción: Antonio Figueredo Hurtado
Portada: Javier Perdomo

RESISTENCIA DE MATERIALES

Todos los derechos reservados © 1994, respecto a la primera edición en español por
Oxford University Press México, S.A. de C.V.
Ninguna parte de esta publicación puede reproducirse, almacenarse en un sistema
de recuperación o transmitirse, en ninguna forma ni por ningún medio,
sin la autorización previa y por escrito de
Oxford University Press México, S.A. de C.V.
Las consultas relativas a la reproducción deben enviarse al Departamento de Derechos
de Autor de Oxford University Press México, S.A. de C.V.,
al domicilio que se señala en la parte superior de esta página.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria
Editorial Mexicana, registro número 723.

ISBN 978-968-6356-13-7
ISBN 968-6356-13-4

Traducido de la cuarta edición en inglés de
Strength of Materials.
Copyright © 1987, by Andrews Pytel/Ferdinand S. Singer.
Published by arrangement with Harper & Row.
ISBN 0-06-045313-3

Alfaomega Grupo Editor es distribuidor exclusivo para todos los países de habla hispana
de esta coedición realizada entre Oxford University Press México, S.A. de C.V.
y Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.

ISBN 978-970-15-1056-8
ISBN 970-15-1056-9

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.
Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México, D.F.

Impreso en México
Octava reimpresión: mayo de 2008

Esta obra se terminó de imprimir en mayo de 2008 en
Repro-flo, S.A. de C.V.
Calle de Chipiona Núm. 115, Col. Cerro de la Estrella, 09880, México, D.F.
sobre papel Bond Editor Alta Opacidad de 75 g.

El tiraje fue de 2 000 ejemplares.

contenido abreviado

Capítulo 1 Esfuerzo simple **1**

Capítulo 2 Deformación simple **27**

Capítulo 3 Torsión **60**

Capítulo 4 Fuerza cortante y momento flexionante en vigas **87**

Capítulo 5 Esfuerzos en vigas **122**

Capítulo 6 Deformación en vigas **170**

Capítulo 7 Vigas estáticamente indeterminadas **227**

Capítulo 8 Vigas continuas **250**

Capítulo 9 Esfuerzos combinados **289**

Capítulo 10 Vigas reforzadas **336**

Capítulo 11 Columnas **356**

Capítulo 12 Uniones conectadas y soldadas **387**

Capítulo 13 Temas especiales **418**

Capítulo 14 Comportamiento inelástico **471**

Capítulo 15 Información complementaria **486**

Apéndice A Momentos de inercia **502**

Apéndice B Tablas—Metales y perfiles de acero **530**

Índice 578

contenido

Prólogo **xiii**
Prólogo de la edición anterior **xv**
Preámbulo a la edición en español **xvii**
LAS UNIDADES S.I. EN INGENIERÍA CIVIL
— Una apreciación práctica con las unidades técnicas e inglesas **xix**
Símbolos y Abreviaturas **xxix**
Índice de tablas **xxxi**

Capítulo 1 ESFUERZO SIMPLE

1-1 Introducción **1**
1-2 Análisis de fuerzas internas **2**
1-3 Esfuerzo simple **4**
1-4 Esfuerzo cortante **13**
1-5 Esfuerzo de contacto o aplastamiento **16**
1-6 Cilindros de pared delgada **19**

Capítulo 2 DEFORMACIÓN SIMPLE

2-1 Introducción **27**
2-2 Diagrama esfuerzo-deformación **27**
2-3 Ley de Hooke: Deformación axial—Distorsión **31**
2-4 Relación de Poisson: Estados de deformación biaxial y triaxial **38**
2-5 Elementos estáticamente indeterminados (o hiperestáticos) **41**
2-6 Esfuerzos de origen térmico **51**

Capítulo 3 TORSIÓN

3-1 Introducción e hipótesis fundamentales **60**
3-2 Deducción de las fórmulas de torsión **61**
3-3 Acoplamiento por medio de bridas **71**
3-4 Esfuerzo cortante longitudinal **74**
3-5 Torsión de tubos de pared delgada; flujo de cortante **75**
3-6 Resortes helicoidales **78**

Capítulo 4 FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE EN VIGAS

4-1 Introducción **87**
4-2 Fuerza cortante y momento flexionante **89**
4-3 Interpretación de la fuerza cortante y del momento flexionante **100**
4-4 Relaciones entre la carga, la fuerza cortante y el movimiento flexionante **102**
4-5 Cargas móviles **117**

Capítulo 5 ESFUERZOS EN VIGAS

5-1 Introducción **122**
5-2 Deducción de la fórmula de la flexión **122**
5-3 Perfiles comerciales **133**
5-4 Estructuras de pisos **137**
5-5 Vigas asimétricas **141**
5-6 Análisis del efecto de flexión **147**
5-7 Deducción de la fórmula del esfuerzo cortante horizontal **150**
5-8 Diseño por flexión y por cortante **160**
5-9 Espaciamiento de remaches o tornillos en vigas compuestas **165**

Capítulo 6 DEFORMACIÓN EN VIGAS

6-1 Introducción **170**
6-2 Método de la doble integración **171**
6-3 Método del área de momentos **181**
6-4 Diagramas de momentos por partes **185**
6-5 Deformación de vigas en voladizo **192**
6-6 Deformación de vigas simplemente apoyadas **199**
6-7 Deflexiones en el centro del claro **209**
6-8 Método de la viga conjugada **212**
6-9 Deflexiones por el método de superposición **217**

Capítulo 7 VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

7-1 Introducción **227**
7-2 Apoyos redundantes **227**
7-3 Aplicación de los métodos de la doble integración y de la superposición **228**
7-4 Aplicación del método del área de momentos **236**

7-5 Transformación en viga simplemente apoyada con momentos en los extremos 243
7-6 Diseño de vigas estáticamente indeterminadas 245

Capítulo 8 VIGAS CONTINUAS

8-1 Introducción 250
8-2 Forma generalizada de la ecuación de los tres momentos 251
8-3 Términos que intervienen en la ecuación de los tres momentos 254
8-4 Aplicación de la ecuación de los tres momentos 258
8-5 Reacciones en las vigas continuas. Diagramas de fuerza cortante 263
8-6 Vigas continuas con los extremos empotrados 268
8-7 Deflexiones (u ordenadas de la elástica) por la ecuación de los tres momentos 273
8-8 Distribución de momentos. Método de Cross 278

Capítulo 9 ESFUERZOS COMBINADOS

9-1 Introducción 289
9-2 Combinación de esfuerzos axiales y por flexión 289
9-3 Núcleo central de una sección. Cargas aplicadas fuera de los ejes de simetría 297
9-4 Variación del esfuerzo con la orientación del elemento 301
9-5 Esfuerzo en un punto 302
9-6 Variación del esfuerzo en un punto. Cálculo analítico 303
9-7 Círculo de Mohr 306
9-8 Aplicación del círculo de Mohr a cargas combinadas 314
9-9 Transformación de las componentes de la deformación 324
9-10 Rosetas de deformaciones 330
9-11 Relación entre el módulo elástico transversal y el módulo elástico longitudinal 333

Capítulo 10 VIGAS REFORZADAS

10-1 Introducción 336
10-2 Vigas de distintos materiales 336
10-3 Esfuerzo cortante y deformación en las vigas compuestas de varios materiales 342
10-4 Vigas de concreto u hormigón 342
10-5 Diseño de vigas de concreto armado 347
10-6 Vigas de concreto armado de sección en T 351
10-7 Esfuerzo cortante y de adherencia 352

Capítulo 11 COLUMNAS

11-1 Introducción 356
11-2 Carga crítica 357
11-3 Fórmula de Euler para columnas largas o muy esbeltas 358
11-4 Limitaciones de la fórmula de Euler 364
11-5 Columnas de longitud intermedia. Fórmulas empíricas 367
11-6 Columnas cargadas excéntricamente 378
11-7 Fórmula de la secante 382

Capítulo 12 UNIONES CONECTADAS Y SOLDADAS

12-1 Introducción **387**
12-2 Tipos de uniones conectadas: remachadas y atornilladas. Definiciones **387**
12-3 Resistencia de una unión simple, a traslape **389**
12-4 Resistencia de una unión múltiple, a tope **391**
12-5 Esfuerzos en uniones conectadas **396**
12-6 Uniones conectadas en las estructuras **398**
12-7 Uniones conectadas con carga excéntrica **401**
12-8 Uniones soldadas **406**
12-9 Uniones soldadas con carga excéntrica **411**

Capítulo 13 TEMAS ESPECIALES

13-1 Introducción **418**
13-2 Carga repetida. Fatiga **418**
13-3 Concentración de esfuerzos **420**
13-4 Teorías sobre la falla o ruptura **424**
13-5 Métodos de la energía **426**
13-6 Carga dinámica o de impacto **434**
13-7 Esfuerzos cortantes en elementos de pared delgada sometidos a flexión. Flujo de cortante **440**
13-8 Centro de torsión **442**
13-9 Flexión asimétrica **449**
13-10 Vigas curvas **457**
13-11 Cilindros de pared gruesa **465**

Capítulo 14 COMPORTAMIENTO INELÁSTICO

14-1 Introducción **471**
14-2 Momento torsionante límite **472**
14-3 Momento flexionante límite **474**
14-4 Esfuerzos residuales **477**
14-5 Análisis al límite **485**

Capítulo 15 INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

15-1 Esfuerzo cortante máximo absoluto (ECMA) **496**
15-2 Uniones conectadas—Consideración adicional **500**

Apéndice A MOMENTOS DE INERCIA

A-1 Definición de momento de inercia de un área **502**
A-2 Momento polar de inercia (de un área) **504**
A-3 Radio de giro (o radio de inercia) **504**
A-4 Teorema de Steiner **505**
A-5 Momentos de inercia mediante integración **506**
A-6 Momentos de inercia de figuras compuestas **510**

A-7 Producto de inercia (o momento producto) **517**
A-8 El producto de inercia es cero con respecto a los ejes de simetría **517**
A-9 Traslación paralela de ejes para el producto de inercia: Teorema de Steiner **518**
A-10 Momentos de inercia con respecto a ejes inclinados **523**
A-11 Círculo de Mohr para momentos de inercia **518**
A-12 Momentos de inercia máximo y mínimo. Ejes principales **527**

Apéndice B **TABLAS—METALES Y PERFILES DE ACERO**

B-1 Propiedades físicas medias de los metales más comunes (*unidades SI*) **532**
B-2 Perfiles H (vigas de ala ancha), americanos (W) (*unidades SI*) **533**
B-3 Perfiles I (vigas normales), americanos (S) (*unidades SI*) **541**
B-4 Perfiles C (canales), americanos (*unidades SI*) **543**
B-5 Perfiles L (angulares), de lados iguales, americanos (*unidades SI*) **545**
B-6 Perfiles L (angulares), de lados desiguales, americanos (*unidades SI*) **547**
B-7 Propiedades físicas medias de los metales más comunes (unidades ST) **550**
B-8 Perfiles H (vigas de ala ancha), europeos (unidades ST) **551**
B-9 Perfiles I (vigas normales), europeos (unidades ST) **552**
B-10 Perfiles C (o U) (canales), europeos (unidades ST) **553**
B-11 Perfiles L (angulares), de lados iguales, europeos (unidades ST) **554**
B-12 Perfiles L (angulares), de lados desiguales, europeos (unidades ST) **557**
B-13 Propiedades físicas medias de los metales más comunes (**unidades US**) **559**
B-14 Perfiles H (vigas de ala ancha), americanos (W) (**unidades US**) **560**
B-15 Perfiles I (vigas normales), americanos (S) (**unidades US**) **568**
B-16 Perfiles C (canales), americanos (**unidades US**) **570**
B-17 Perfiles L (angulares), lados iguales y lados desiguales, americanos (**unidades US**) **572**

Bibliografía **578**

Índice **580**

prólogo

En la actualidad, más que en cualquier otro momento, las aplicaciones en ingeniería son con frecuencia interdisciplinarias, e implican la interrelación de varias de las ciencias básicas de esa tecnología (mecánica, química, electricidad, etc.). Por tanto, el ingeniero moderno debe tener un conocimiento fundamental en cada una de esas áreas. La comprensión de cómo los cuerpos responden a la acción de las cargas o fuerzas aplicadas, el campo de estudio principal de la asignatura denominada *Resistencia de Materiales*, es parte de tal conocimiento. En el diseño de estructuras o máquinas, el cabal dominio de la mecánica de los materiales es indispensable.

La característica principal de la cuarta edición en inglés de este libro, en comparación con las ediciones anteriores, es que, además de las unidades métricas SI*, se incluye el uso de las llamadas US, de la expresión *U.S. Customary Units* (las unidades inglesas usuales en Estados Unidos). Como este país, Estados Unidos de América, no ha adoptado todavía las unidades internacionales como las estándares de uso general, es necesario que sus ingenieros se entrenen en el manejo de esos dos sistemas de unidades. En tal edición, los problemas a resolver se han dividido casi equitativamente en la aplicación de las unidades SI y US.**

Esta edición retiene el plan general y las características de las ediciones anteriores, asignando la mayor consideración al análisis en condiciones elásticas, y además, un capítulo dedicado a la respuesta inelástica. La importancia de la flexión en vigas para el diseño estructural, indujo a conservar el estudio bastante completo de este tema, que incluye los métodos de energía, doble integración, área de diagrama de momentos y distribución de momentos. Sin embargo, puesto que cada uno de estos temas se trata por separado, el profesor puede optar fácilmente sólo por aquellos métodos que sean de mayor interés para su curso.

Otros planteamientos pertinentes a esta edición incluyen un análisis amplio del esfuerzo plano, con una consideración mayor del esfuerzo cortante máximo absoluto (ECMA); una revisión del

---

* SI es la abreviatura oficial del Sistema Internacional de Unidades (o Système Internacional d'Unités)

** (N. del R.) Véase el *Prólogo de la Edición Anterior* y el *Preámbulo a la Edición en Español*, en páginas siguientes.

capítulo de uniones para explicar más cabalmente las diferencias entre las uniones atornilladas de los tipos de acción de empuje y de acción de fricción; y una actualización de varios conceptos debido a los cambios en diversos reglamentos de diseño.

Conservando en mente los especiales problemas de los estudiantes, se ha procurado, como en las ediciones anteriores, explicar los conceptos fundamentales utilizando un lenguaje claro y conciso. El número relativamente grande de problemas ilustrativos tiene por objeto ayudar al estudiante a cerrar la brecha entre la teoría y las aplicaciones. Las ecuaciones o principios que se emplean en la resolución de tales problemas, por lo general se enuncian primero poniéndolas entre corchetes; a continuación los valores numéricos se sustituyen en el orden en que los símbolos aparecen en la ecuación. Este método permite al lector seguir el análisis con más facilidad.

Los casi 1000 problemas que se presentan en este texto han sido cuidadosamente seleccionados para ilustrar los conceptos fundamentales sin abrumar al estudiante con tediosos cálculos numéricos, siempre que ello ha sido posible. La importancia de los diagramas de cuerpo libre en el estudio de la resistencia de materiales continúa siendo destacada. Los problemas se han dispuesto en su mayoría en orden de dificultad, y las respuestas a casi dos tercios de ellos acompañan a los enunciados de problemas apropiados.

Se continúa con el método de numeración que permite al lector localizar rápidamente cualquier referencia. Es decir, todos los artículos, figuras, ecuaciones, tablas y enunciados de problemas se señalan con el número del capítulo en que aparecen, seguido de la cifra o cifras, con un guión interpuesto, que indican su orden o posición consecutiva. Otra facilidad es que las figuras que corresponden a problemas se designan con el mismo número de éstos, al que se antepone la marca P.

Se agradecen muy sinceramente las valiosas sugerencias y consejos recibidos de colegas en todo el mundo. Mencionar aquí a cada uno, originaría una lista demasiado larga, con la posibilidad de que hubiese una omisión involuntaria. A cada una de esas personas se le ha expresado nuestro agradecimiento de modo personal. No obstante, existe una deuda especial de gratitud con Dr. Jean Landa Pytel, cuya colaboración en la preparación del manuscrito de esta obra es grandemente apreciada.

Andrew Pytel

prólogo de la edición anterior

Es casi imposible desarrollar correctamente el diseño de estructuras o de máquinas sin un profundo dominio de la mecánica del cuerpo rígido y de la resistencia de los materiales. La importancia de estas materias se manifiesta claramente, en los modernos *currícula* o programas de ingeniería, en un estudio cada vez más amplio de sus conceptos fundamentales y de nuevas teorías de mayor complejidad. En esta edición revisada se pretende explicar también con toda la claridad posible, compatible con el rigor matemático, la teoría y las aplicaciones más frecuentes de estos conceptos.

Durante la década de 1960, la enseñanza de la ingeniería en Estados Unidos de América se fue orientando hacia una mayor aplicación de las matemáticas. En algunos casos se llegó incluso a reemplazar cursos de resistencia de materiales por otros de mecánica del medio continuo y de teoría de la elasticidad. Los lineamientos actuales de la enseñanza de la ingeniería reconocen la importancia del diseño en los planes de estudio de esta carrera. Por esta razón, cursos de aplicación —como la Resistencia de Materiales— aparecen de nuevo, prácticamente en todos los campos, como elementos importantes de la educación en ingeniería.

La característica más notable de esta tercera edición, comparativamente con las anteriores, es el uso del *Sistema Internacional de Unidades (SI)* en todos los casos. Aunque se atraviesa actualmente por un periodo de transición en el que el ingeniero tiene que estar familiarizado aún con los sistemas de unidades anteriores, la tendencia mundial de adopción del SI hará que concluya pronto tal periodo. Los autores están de acuerdo con la consideración de que textos básicos como éste deben ser escritos por completo con las unidades SI. Una vez que se dominan cabalmente los principios en un sistema de unidades, no es difícil la extensión a otros sistemas.

Esta edición mantiene el plan general y las características principales de las ediciones anteriores. Aunque la mayor parte se dedica al cálculo elástico, se añade un amplio estudio sobre el cálculo plástico, reunido en un capítulo completo, desarrollado de manera que constituya en sí mismo un conjunto ordenado y coherente, junto con los temas de esfuerzos residuales y análisis al límite.

Es de señalar la moderna exposición que se continúa realizando del método de la doble integración, que tanto simplifica el cálculo de deformaciones en la vigas. Entre los temas especiales se incluyen métodos de la energía elástica, como el teorema de Castigliano y el del trabajo virtual, que junto con los de la doble integración y del área de momentos, constituyen un completo análisis de las de-

formaciones en el fenómeno de la flexión de vigas. La breve pero cabal introducción al método de la distribución de momentos, con la convención de signos más moderna y que facilita su aplicación práctica, completa el estudio de las estructuras hiperestáticas (o estáticamente indeterminadas) sometidas a flexión. Cada uno de estos temas es prácticamente independiente de los demás, por lo que puede prescindirse de uno o varios de ellos si la duración del curso es limitada.

Otras características importantes de la obra revisada se refieren a la introducción del concepto de flujo de cortante, y al amplio análisis de los estados de esfuerzo y deformación, destacando la aplicación del círculo de Mohr a las deformaciones, a la medición de éstas y al análisis por la roseta de deformaciones. En la última parte del libo se tratan más ampliamente las uniones soldadas y remachadas, incluyendo las sometidas a cargas excéntricas. Además, la revisión de los reglamentos hizo que se actualizara el estudio de la teoría de las columnas.

Estos temas, así como los restantes, se han expuesto de manera que pueden liberar al profesor de la penosa tarea de las explicaciones exhaustivas. Las distintas teorías se desarrollan según el planteamiento general siguiente: a) relación entre esfuerzos y deformaciones, b) aplicación de las condiciones de equilibrio estático y c) verificación de las condiciones de frontera.

La obra se ha escrito teniendo en cuenta fundamentalmente el punto de vista del estudiante. No se han escatimado palabras al explicar un concepto fundamental, pero se ha procurado al mismo tiempo evitar excesiva verbosidad. Se ha expuesto con sumo cuidado la significación física de los conceptos básicos, así como las hipótesis y limitaciones en su desarrollo. Los resúmenes al final de cada capítulo realizan una concisa exposición de los principales temas, lo que es muy útil en el repaso de la asignatura y, más adelante, en la aplicación práctica. Las reglas de los signos se han simplificado considerando *positivas* todas aquellas cantidades a las que se pueden aplicar expresiones del tipo "ascendente", como *hacia arriba, por encima,* etc. Se aplica signo *negativo* a las opuestas.

Numerosos problemas ilustrativos totalmente resueltos muestran en detalle cómo se utilizan las teorías estudiadas. En su resolución, y a la izquierda de la página, se indican las fórmulas o principios, y los valores numéricos se sustituyen en el mismo orden en que aparecen las magnitudes, lo que facilita seguir los diversos pasos sin tener que referirse a otras páginas del texto.

Los problemas incluidos en esta edición, que suman casi un millar, son versiones (en el SI) de ejercicios de ediciones anteriores, o bien, completamente nuevos. En todo caso se han escogido cuidadosamente con objeto de ilustrar los conceptos fundamentales sin abrumar al estudiante con cálculos numéricos tediosos. Se sigue enfatizando la importancia de los diagramas de cuerpo libre en la resolución de problemas de resistencia de materiales. Los problemas han sido dispuestos aproximadamente en orden de dificultad, dando las respuestas a dos tercios de ellos; los restantes podrán utilizarse para exámenes.

El sistema de numeración adoptado permite localizar rápidamente cualquier dato. Todas las designaciones de secciones, figuras, fórmulas, tablas y problemas están precedidas del número del capítulo al que pertenecen, y se numeran consecutivamente para cada uno. Las figuras correspondientes a los problemas propuestos llevan el mismo número del problema, precedido de la letra P, de manera que es más patente la figura y los datos del problema en cuestión.

Los autores desean expresar su agradecimiento a todos sus colegas por las valiosas sugerencias que generosamente les han formulado. Dar una relación nominal de todos ellos sería demasiado extensa y cabría la posibilidad de una omisión involuntaria. Por esa razón hemos preferido manifestar nuestra gratitud en forma individual. Sin embargo, se debe especial reconocimiento a Dr. Jean Landa por su ayuda en la preparación de esta edición. Aunque se ha tenido sumo cuidado en corregir las erratas, es inevitable que aparezca alguna. Los autores agradecen cualquier informe acerca de aquéllas y recibirán complacidos todo comentario que los lectores quieran hacerles.

Ferdinand L. Singer—Andrew Pytel

preámbulo a la edición en español

La presente versión de la Cuarta Edición en inglés de este texto para la enseñanza de ingeniería básica, en lo que corresponde a la *Resistencia de Materiales,* conserva las notables cualidades didácticas de las tres ediciones anteriores.

Después del sensible deceso de Ferdinand L. Singer, profesor emérito de la Universidad de Nueva York y autor de textos de mecánica general y de los materiales, el profesor Andrew Pytel se dio a la tarea de elaborar la edición número cuatro de la prestigiosa obra, cuya tercera edición fue escrita por él y el profesor Singer. El texto conserva la descripción cabal y bien fundamentada del estudio analítico-práctico de los efectos de esfuerzo y deformación que originan las acciones de carga sobre los elementos constitutivos de estructuras y maquinaria, para determinar su resistencia, diseño y construcción. Se proporciona asimismo una perspectiva útil para las ingenierías civil y mecánica, y para otras ramas de la ciencia aplicada.

En la presente versión en español se incorporan las siguientes características. **1**) En el nuevo Capítulo 15 se exponen los temas agregados de *Esfuerzo cortante máximo absoluto* (ECMA), y de *Uniones conectadas—Consideración adicional* (dichas uniones son las efectuadas con remaches, o con tornillos comunes o de alta resistencia). **2**) Se agrega la *Bibliografía*, que reúne las publicaciones citadas en el texto, y se indican las páginas de éste en las cuales se mencionan. **3**) Al final de la sección de *Símbolos y Abreviaturas* se ha incluido un *Índice de Tablas,* con las más importantes que se utilizan en diversas aplicaciones.

Consideración principal. La tercera edición anterior en inglés fue escrita utilizando en el desarrollo y en todos los ejemplos y problemas, las unidades modernas del Sistema Internacional (SI). Sin embargo, a pesar de esa ventaja formativa de la educación tecnológica, la cuarta edición en ese idioma (o sea, la actual) presenta como cambio y adición más importante, un conjunto de ejemplos y problemas en los que se aplican las unidades técnicas inglesas usuales aún en Estados Unidos de América —las US, o *U.S. Customary Units*— y que se basan en la libra (fuerza), el pie y la pulgada. La justificación es que ese país todavía no ha adoptado, por diversas causas, la *metrificación* cabal en todas sus actividades técnicas, industriales y comerciales.

Para la ingeniería civil de Estados Unidos de América resulta impráctico aún cambiar a las unidades métricas del SI en todos sus trabajos. Y aunque está prevista su adopción, no existe una fecha precisa para ello. Por tal motivo de conveniencia para esa nación, se vuelven a usar las unidades inglesas (o US) en muchos textos de enseñanza tecnológica y para ingeniería.

Debido a lo anterior, en la presente versión en castellano se conserva básicamente lo expuesto en la 3a. edición, ya que en los países de habla española *no* se justifica considerar preponderantemente las unidades técnicas inglesas.

En la actual edición en español se incluye una sección preliminar especial titulada *Las Unidades SI en Ingeniería Civil—Una apreciación práctica con las unidades técnicas e inglesas (*elaborada por el suscrito), que tiene por objeto facilitar la evaluación, comprensión y aplicación de la metrología del SI, así como su relación con las unidades técnicas métricas (basadas en el kilogramo fuerza, el metro y el centímetro)* y con las unidades US. Estas consideraciones facilitarán la enseñanza y la comunicación en la resistencia de materiales, junto con el análisis estructural** y el diseño de máquinas, con vistas a la integración internacional futura.

En estos años, sólo Estados Unidos de América sigue empleando en gran escala las unidades de medida creadas en Inglaterra. Se espera que en años próximos y antes del año 2000, termine esa situación, ya que las tecnologías de los demás países desarrollados del mundo emplean exclusivamente el SI.

Para mayor utilidad se agregan en el Apéndice B, las características y dimensiones en las unidades US, de los perfiles de acero estructural que figuran en la 4a.edición en inglés de este libro. Esto complementa las tablas de materiales metálicos de la anterior versión en español (la 3a.), que se conservan y están en las unidades SI y técnicas métricas. Todas estas adaptaciones y adiciones se estima que mantendrán vigente la aceptación de este útil texto para la enseñanza y el aprendizaje de la *Resistencia de Materiales,* o mecánica de los sólidos y los elementos básicos de las estructuras, materia fundamental para la educación en ingeniería en sus diversas ramas: civil, mecánica, aeronáutica, espacial, eléctrica y otras.

Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Asesor editorial en educación tecnológica
Comunicación en mecánica de materiales y estructuras
Miembro de la *United States Metric Association* (USMA)

---

* Este sistema técnico se utiliza aún en México, en las ingenierías civil y mecánica básicamente. En este país la metrología del SI es la de curso legal y obligatorio. Por la relación con Estados Unidos de América en los campos industrial y comercial, y en el intercambio educativo, se admite la consideración de las unidades inglesas US o "libra-pie-pulgada".

** En el libro "Análisis Estructural", de McCormac, que publica también esta casa editorial, Harla, se aplica el mismo enfoque.

Las unidades SI en ingeniería civil

Una apreciación práctica con las unidades técnicas e inglesas*

1. UNIDADES SI

En el mundo se ha establecido por adopción general, el sistema metrológico denominado *Sistema Internacional de Unidades,* que se simboliza universalmente como *SI.* Fue originado por el Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), con sede en París, Francia, y se difundió en su forma más completa en la norma ISO 1000, emitida por la Organización Internacional de Normalización.

Como el original Sistema Métrico Decimal, el SI se funda en las unidades básicas correspondientes a las magnitudes físicas longitud, masa y tiempo, que son el metro (m), el kilogramo (kg) y el segundo (s), respectivamente.

Por aplicación de la segunda ley mecánica del movimiento:

$$F = ma \qquad \text{(fuerza = masa} \times \text{aceleración)}$$

se obtiene la unidad SI de fuerza llamada *newton* (N), como

$$1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \text{m/s}^2 = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

En la dinámica, tal definición de la unidad de fuerza es de la mayor utilidad, y lo mismo sucede en fluidodinámica y electrodinámica. En estática hay que considerar amplia y frecuentemente el *peso* de los cuerpos en estudio, por efecto de la gravedad:

$$G = mg$$

donde G es peso, m es masa y g es la aceleración gravitatoria local.

* Por **Francisco Paniagua Bocanegra**, I.M.E. Miembro de la U.S. Metric Association (USMA).
Asesor editorial en ciencias de ingeniería — Comunicación en mecánica de materiales y estructuras.

1.1 ***Situación del SI en el mundo*** En las ingenierías térmica y eléctrica el uso de la unidad SI de fuerza, el newton, no tiene mayor dificultad para su comprensión, pues como ya se indicó, su concepto surge de la segunda ley del movimiento (o de la dinámica). A su utilización implícita se le aplica forzadamente la división entre "g", para obtener valores de fuerzas en la unidad técnica (ST), el kilogramo fuerza (kgf).

Dado que la ciencia y la tecnología mundiales se comunican exclusivamente con la metrología SI, es indispensable considerar su uso y facilitar su comprensión y manejo. En las actividades científicas, técnicas, industriales y comerciales de los países desarrollados de Europa y en los de alto adelanto económico de Asia, no hay dificultad en manejar tales unidades de medida, y sí al tratar de entender y aplicar las antiguas unidades técnicas métricas e inglesas. El SI es el sistema general obligatorio adoptado legalmente en todos los países de América, excepto en Estados Unidos.*

1.2 ***Reglas del SI*** A continuación se presentan las principales unidades del SI que se aplican en mecánica de materiales y estructuras. Se indican la magnitud física, el nombre de la unidad y su símbolo normalizado o estándar.

Magnitud física	Unidad	Símbolo
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo	segundo	s
fuerza	newton	N
momento de fuerza	newton-metro	N · m
esfuerzo (y presión)	pascal	Pa
trabajo (y energía)	joule	J

Los prefijos para múltiplos y submúltiplos de las unidades usuales son como sigue:

Nombre	Símbolo	Valor
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

* En México, el SI está integrado en el Sistema General de Unidades de Medida, y su aplicación es obligatoria según disposición de la Dirección General de Normas, de la Secretaría de Comercio y Fomento Industrial. La enseñanza del SI es también obligatoria conforme a disposiciones de la Secretaría de Educación Pública, del Gobierno Federal.

Algunas reglas básicas para la aplicación del SI son las siguientes:

1. El símbolo de una unidad que se use debe ser el establecido como estándar, no lleva punto final ni se indica pluralización.

   Por ejemplo: 1 m y 35 m; 1 MN y 15 MN; 1 N · m y 126 N · m; 1 kN/m^2 y 25 kN/m^2; 1 MPa y 18 MPa.

2. Las cantidades numéricas con más de 3 cifras se escriben separándolas en grupos de tres, a un lado y otro de la marca decimal (el punto o la coma, según el país). Se utilizan sólo espacios pequeños como separaciones, y nunca comas o puntos. Por ejemplo: 86 698.456 31. Las cantidades con sólo cuatro cifras pueden no separarse, como en el caso de 1586.

3. Las unidades derivadas muestran sus símbolos combinados por el signo de multiplicación (el punto semialto: ·) o el signo de división (la diagonal: /). Por ejemplo: N · m, kg/s, MN/m^2, kN/m^3, etc. Debe evitarse que en un denominador se tenga un símbolo de unidad con prefijo. Por ejemplo, J/ns no debe utilizarse, sino usar su equivalente, GJ/s. La excepción es el símbolo de la unidad fundamental de masa, el kilogramo (kg). Por ejemplo en m^3/kg.

En lo posible, estas recomendaciones se aplican también en el uso de las unidades de los sistemas técnico (ST) e inglés (US).

2. UNIDADES ST

Cuando se creó el sistema métrico gravitacional o *sistema técnico* (ST), se definió como una de sus unidades fundamentales, la de fuerza, adoptándose como tal el peso del kilogramo (unidad de masa) en un sitio determinado de la Tierra (al nivel del mar y a 45° de latitud norte). Tal es la definición de su unidad básica *kilogramo fuerza* (kgf). Como para esa localidad estándar se especifica que la aceleración gravitatoria es $g = 9.8066$ m/s^2, resulta que (por $G = mg$):

$$1 \text{ kgf} = 1 \text{ kg} \times 9.8066 \text{ m/s}^2 = 9.8066 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

De manera que, en función del newton, se tiene:

$$\mathbf{1 \text{ kgf} = 9.8066 \text{ N}} \text{ (equivalencia exacta a cuatro decimales)}$$
$$= \mathbf{9.81 \text{ N}} \quad \text{(equivalencia con redondeo usual)}$$

2.1 ***"Masa igual a peso"*** En la práctica se capta que el valor de la masa de un cuerpo en kilogramos, es numéricamente igual al valor de su peso en kilogramos fuerza, despreciando la variación local de la gravedad respecto de la estándar. Por ejemplo, un cuerpo cuya masa es de 100 kg, tiene un peso, en el ST, de

$$100 \text{ kg} \times g = 100 \text{ kgf}$$

Esto causó la confusión prevaleciente aún de designar a la unidad de fuerza del ST como "kilogramo", a secas, y de representarlo por "kg", así como la costumbre de no considerar específicamente al kilogramo (kg), la unidad normal de masa.

En la ingeniería civil se trabaja comúnmente con los conceptos estáticos de peso de cuerpos y de equilibrio de fuerzas. Por tal motivo, el ST se adapta muy adecuadamente a esa actividad. (Lo anterior se extiende también a parte de la ingeniería mecánica). En las determinaciones de pesos y fuerzas se habla sólo de "kilogramos", sobreentendiéndose que se trata de kilogramos fuerza.

Tal uso se extendió y arraigó firmemente, por lo que se dice que su comprensión es inmediata en la evaluación de fuerzas. Se aprecia (o siente) fácilmente lo que son fuerzas y pesos en "kilogramos" o "toneladas"; esfuerzos y presiones en "kilogramos" por centímetro cuadrado; momentos de fuerza en "kilogramos"-metro; etc. Y al considerar una masa, se traduce automáticamente a su expresión como "peso", expresado en la unidad de fuerza del ST.

2.2 ***Comprensión práctica del ST y el SI*** La equivalencia exacta entre el newton y el kilogramo fuerza, como ya se indicó, la da la expresión

$$\begin{aligned} 1\ \text{kgf} &= 9.8066\ \text{N} \quad \text{(equivalencia exacta)} \\ &= 9.81\ \text{N} \quad \text{(equivalencia con redondeo)} \end{aligned}$$

Sin embargo, puede obtenerse una apreciación fácil considerando la equivalencia simplificada, pero con *muy cercana aproximación,* que sigue:

$$\mathbf{1\ kgf \approx 10\ N} \quad \text{(equivalencia básica práctica)}$$

o bien

$$\mathbf{1\ N \approx 0.1\ kgf} \quad \text{(equivalencia básica práctica)}$$

[Para captar el significado de esta equivalencia puede considerarse que el *peso* de una persona de 70 kg de "peso" (más bien, de masa), vale 70 kgf, o sea 700 N. Así mismo, el peso de 1 m^3 de agua (o sea, una tonelada de este material, 1 000 kg) es 1 000 kgf o 10 000 N.]

Como es lo normal con las unidades de origen métrico (SI y ST), para simplificar las cantidades numéricas se emplean prefijos que antepuestos al nombre de una unidad modifican su valor en múltiplos de 10.

En el caso de la ciencia y la tecnología es muy útil la ampliación o reducción de las unidades con factores de 1 000. Para este objeto, en el SI se tienen —como ya se indicó— los prefijos *kilo* para 1 000, y *mega* para 1 000 000, como es ya bien conocido. También se utiliza el prefijo *giga*, para el múltiplo 10^9.

De modo que

$$\begin{aligned} 1\ \text{kN (kilonewton)} &= 1\ 000\ \text{N} \\ 1\ \text{MN (meganewton)} &= 10^6\ \text{N} = 1\ 000\ \text{kN} \\ 1\ \text{GN (giganewton)} &= 10^9\ \text{N} = 1\ 000\ \text{MN} \end{aligned}$$

[Así, el peso de una tonelada (1 000 kg) de agua, que se señaló es, aproximadamente, de 10 000 N —en el SI— en forma equivalente sería de 10 kN.]

2.3 ***Conversión práctica de unidades ST y SI****

A. *Fuerzas.* Para la conversión rápida muy aproximada de datos de fuerzas en ST (en kilogramos fuerza) a valores en SI, se aplican las equivalencias prácticas siguientes:

---

* La conversión normal se realiza aplicando las equivalencias exactas de la Tabla I.

De ST a SI:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kgf} &\approx 10 \text{ N (expresión básica)} \\ 100 \text{ kgf} &\approx 1000 \text{ N} \\ &\approx 1 \text{ kN} \\ 1\,000 \text{ kgf} &\approx 10 \text{ kN} \end{aligned}$$

Para la transformación inversa, de SI a ST, se utilizan las equivalencias prácticas que siguen:

De SI a ST:

$$\begin{aligned} 1 \text{ N} &\approx 0.1 \text{ kgf (expresión básica)} \\ 1 \text{ kN} &\approx 100 \text{ kgf} \\ 1 \text{ MN} &\approx 100\,000 \text{ kgf} \\ &\approx 10^5 \text{ kgf} \end{aligned}$$

B. *Esfuerzos (y presiones).* En el ST, la unidad de uso común para esfuerzo (o presión) es el *kilogramo fuerza por centímetro cuadrado* (kgf/cm^2). Esas magnitudes físicas corresponden a fuerza ejercida sobre una unidad de área.

En la transformación de esfuerzos (o presiones) en ST a valores en SI, en estos últimos se considera como unidad normal de área el metro cuadrado y no el centímetro cuadrado. La unidad estándar de esfuerzo (o presión) en el SI es demasiado pequeña, pues se trata del newton por metro cuadrado (N/m^2). Esta unidad recibe el nombre específico de *pascal* (Pa). Suelen utilizarse mejor sus múltiplos: kilopascal (kPa), megapascal (MPa) y gigapascal (GPa).

Las equivalencias prácticas son:

De ST a SI:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kgf/cm}^2 &\approx \frac{10 \text{ N}}{10^{-4} \text{ m}^2} \\ &\approx 10^5 \text{ N/m}^2 \\ &\approx 100 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

De SI a ST:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kPa} &\approx 0.01 \text{ kgf/cm}^2 \\ 1 \text{ MPa} &\approx 10 \text{ kgf/cm}^2 \\ 1 \text{ GPa} &\approx 10^4 \text{ kgf/cm}^2 \end{aligned}$$

y así

$$1 \text{ kgf/cm}^2 \approx 100 \text{ kPa}$$

C. *Momentos de fuerza.* El efecto de giro de una fuerza se evalúa como el producto de la fuerza por su distancia a una recta o punto de referencia. Se denomina *momento de fuerza*, o *momento*, simplemente. En el ST la unidad básica es el *kilogramo fuerza-metro* (kgf · m). En el SI es obviamente, el newton-metro (N · m).

Las equivalencias prácticas son:

De ST a SI:

$$1 \text{ kgf} \cdot \text{m} \approx 10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

De SI a ST:

$$1 \text{ N} \cdot \text{m} \approx 0.1 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

D. *Energía (o trabajo).* La energía se define como la capacidad de efectuar trabajo, y éste se evalúa como el producto de una fuerza y la longitud de su recorrido. En el ST, por tanto, la unidad de trabajo es el *kilogramo fuerza-metro*, aparentemente igual a la de momento. Las unidades de estas magnitudes son *dimensionalmente iguales*, pero su noción física es diferente. La unidad de trabajo y energía del ST se denomina mejor *kilográmetro*, y su símbolo es también kgf · m. (Para diferenciarla, la unidad de momento se expresa a veces como m · kgf.)

En el SI se tiene obviamente también que la unidad de trabajo y energía es el newton-metro (N · m), pero tiene además un nombre específico: *joule*, cuyo símbolo es J.

Las equivalencias prácticas son también somo sigue:

De ST a SI:

$1\ \text{kgf} \cdot \text{m} \approx 10\ \text{N} \cdot \text{m}$,

$1\ \text{kgf} \cdot \text{m} \approx 10\ \text{J}$

De SI a ST:

$1\ \text{J} \approx 0.1\ \text{kgf} \cdot \text{m}$

[El trabajo por unidad de tiempo, o potencia, tiene en el ST la unidad básica kilográmetro por segundo, kgf · m/s. En el SI, la unidad básica de potencia es el joule por segundo, J/s, que tiene el nombre específico de *watt* (W).]

2.4 ***Conversión exacta de unidades ST y SI*** Para la transformación exacta normal de valores en ST y SI de las cantidades físicas fuerza, esfuerzo (o presión), momento de fuerza y trabajo (o energía) se utilizan las equivalencias mostradas en la Tabla I.

TABLA I Equivalencias exactas entre las unidades ST y SI

Magnitudes	De ST a SI	De SI a ST
Fuerza	1 kgf = 9.8066 N	1 N = 0.10197 kgf
		1 kN = 101.972 kgf
Esfuerzo (y presión)	1 kgf/cm^2 = 98.0660 kPa	1 kPa = 0.010197 kgf/cm^2
		1 MPa = 10.1972 kgf/cm^2
Momento de fuerza	1 kgf · m = 9.8066 N · m	1 N · m = 0.10197 kgf · m
	(m · kgf) (m · N)	1 kN · m = 101.972 kgf · m
Trabajo (y energía)	1 kgf · m = 9.8066 J	1 J = 0.10197 kgf · m
		1 kJ = 101.972 kgf · m

3. UNIDADES US

Estas unidades corresponden al sistema técnico basado en las unidades gravitacionales inglesas, y que es todavía de uso común en Estados Unidos de América. Reciben en este país la denominación de *U.S. Customary Units* (es decir, Unidades usuales de Estados Unidos de América). En este trabajo sobre las unidades SI las hemos designado abreviadamente como *Unidades US*. Se emplean aún en la industria, el comercio y la tecnología. En especial, en la ingeniería civil y en la ingeniería mecánica, así como en las actividades y educación relacionadas con esas disciplinas técnicas. A las unidades US se las conoce también como unidades "libra-pie-pulgada" o unidades "pulgada-libra" (*inch-pound units*).

En el sistema US las unidades usuales de longitud son el **pie** (ft, de *foot*) y la **pulgada** (in., de *inch*). Las de área son el pie cuadrado (ft^2) y la pulgada cuadrada (in.^{2}). Las de volumen son asimismo el pie cúbico (ft^3) y la pulgada cúbica (in.^{3}). La equivalencia fundamental aquí es 1 ft = 12 in.

3.1 ***Relaciones económicas internacionales con Estados Unidos de América*** Aunque los reglamentos o códigos de ingeniería civil en ese país, y otras publicaciones técnicas como el *AISC Manual of Steel Construction*, presentan casi toda su información en las unidades US, existe ahí una difusión del SI impulsada por instituciones educativas, de promoción de la metrificación (como la U.S. Metric

Association) y de comunicación internacional, así como organismos importantes del gobierno y un buen número de industrias.

No obstante, la adopción general tardará todavía en Estados Unidos de América, y su comercio exterior influye en la necesidad de que países métricos como México y Canadá (en virtud del Tratado de Libre Comercio de América del Norte) tengan que conocer y manejar las unidades US, además de las SI y las todavía utilizadas ST.

3.2 ***Unidades US para fuerza, esfuerzo, momento y trabajo*** La unidad para la fuerza es la **libra.** Se simboliza con lb aunque su nombre en inglés es *pound.* El múltiplo usual en ingeniería es el *kip,* que equivale a 1 000 lb. Su nombre es una abreviación de *kilopound,* o sea kilolibra.

Las unidades técnicas estadounidenses usuales en ingeniería para esfuerzo (y presión) son: libra por pulgada cuadrada (lb/in.^{2}), libra por pie cuadrado (lb/ft^2), y sus múltiplos: kilolibra por pulgada cuadrada (kip/in.^{2}), kilolibra por pie cuadrado (kip/ft^2). En la práctica se simbolizan frecuentemente como psi, psf, ksi, ksf, respectivamente. Estos términos provienen de las denominaciones en inglés: *pound per square inch, pound per square foot, kip per square inch, kip per square foot.*

Sus equivalencias (recordando que 1 ft = 12 in.) son:

$$1 \text{ psi} = 144 \text{ psf}$$
$$1 \text{ ksi} = 144 \text{ ksf}$$

y obviamente,

$$1 \text{ ksi} = 1\,000 \text{ psi}$$
$$1 \text{ ksf} = 1\,000 \text{ psf}$$

Las unidades US de utilización común para el momento de fuerza son: libra-pulgada (lb · in.), libra-pie (lb · ft), kilolibra-pulgada (kip · in), kilolibra-pie (kip · ft).

Sus equivalencias son:

$$1 \text{ lb} \cdot \text{ft} = 12 \text{ lb} \cdot \text{in.} \qquad 1 \text{ kip} \cdot \text{in.} = 1\,000 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$
$$1 \text{ kip} \cdot \text{ft} = 12 \text{ kip} \cdot \text{in.} \qquad 1 \text{ kip} \cdot \text{ft} = 1\,000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

La unidad US básica para el trabajo y la energía es la llamada **pie-libra** (ft · lb). [El orden de los nombres de las magnitudes componentes, y de sus símbolos, es el inverso del que se tiene en la unidad ST: kilográmetro (kgf · m).]

[En el caso de la potencia (trabajo por unidad de tiempo), la unidad básica es el pie-libra por segundo (ft · lb/s). En el campo de la ingeniería mecánica se desarrolló más, y es aún de uso extenso en Estados Unidos de América, la unidad especial denominada *caballo* (de *horsepower*), que se simboliza con hp. Se tiene que 1 hp = 550 ft · lb/s.]

3.3 ***Equivalencias de las unidades US con las SI y ST*** En mecánica de materiales y análisis de estructuras, las unidades US corresponden a las ya descritas del SI y del ST. En la conversión de estas unidades no puede aplicarse una equivalencia simplificada de orden práctico adecuado, ya que las relaciones propias del US, que no son decimales simples, no se prestan para ello. La Tabla II y la III presentan las equivalencias *exactas* entre unidades US y SI, y entre unidades US y ST, respectivamente.

TABLA II Equivalencias exactas entre las unidades principales US y SI

Magnitudes	De US a SI		De SI a US	
Longitud	1 in.	= 2.54 cm = 2.54×10^{-2} m	1 cm	= 0.3937 in.
	1 ft	= 30.48 cm = 0.3048 m	1 m	= 3.281 ft
Área	1 $in.^2$	= 6.4516 cm^2	1 cm^2	= 0.1550 in.2
	1 ft^2	= 929.03 cm^2	1 cm^2	= 10.764 ft^2
Volumen	1 $in.^3$	= 16.387 cm^3	1 cm^3	= 0.0610 $in.^3$
	1 ft^3	= 0.0283 m^3	1 m^3	= 35.336 ft^3
Fuerza	1 lb	= 4.4482 N	1 N	= 0.2248 lb
	1 kip	= 4.4482 kN	1 kN	= 0.2248 kip
Fuerza/longitud	1 lb/ft	= 14.594 N/m	1 N/m	= 0.0685 lb/ft
	1 kip/ft	= 14.594 kN/m	1 kN/m	= 0.0685 kip/ft
Esfuerzo (y presión)	1 $lb/in.^2$	= 6.8947 kPa	1 kPa	= 0.1450 $lb/in.^2$
	1 lb/ft^2	= 47.880 Pa	1 Pa	= 0.02088 lb/ft^2
	1 $kip/in.^2$	= 6.8947 MPa	1 MPa	= 0.1450 $kip/in.^2$
	1 kip/ft^2	= 47.880 kPa	1 kPa	= 0.02088 kip/ft^2
Momento de fuerza	1 lb · in.	= 0.1130 N · m	1 N · m	= 8.8495 lb · in.
	1 lb · ft	= 1.3558 N · m	1 N · m	= 0.7376 lb · ft
	1 kip · in.	= 0.1130 kN · m	1 kN · m	= 8.8495 kip · in.
	1 kip · ft	= 1.3558 kN · m	1 kN · m	= 0.7376 kip · ft
Trabajo (y energía)	1 ft · lb	= 1.3558 J	1 J	= 0.7376 ft · lb

TABLA III Equivalencias exactas entre las unidades US y ST, de fuerza, esfuerzo (y presión), momento y trabajo

Magnitudes	De US a ST		
Fuerza	1 lb	= 0.4536 kgf	
	1 kip	= 453.6 kgf	
Fuerza/longitud	1 lb/ft	= 1.4862 kgf/m	
	1 kip/ft	= 1486.2 kgf/m	
Esfuerzo (y presión)	1 $lb/in.^2$ (psi)	= 0.07031 kgf/cm^2	
	1 lb/ft^2 (psf)	= 4.8825 kgf/m^2	
	1 $kip/in.^2$ (ksi)	= 70.3081 kgf/cm^2	
	1 kip/ft^2 (ksf)	= 4 882.5 kgf/m^2	
Momento de fuerza	1 lb · in.	= 0.01152 kgf · m	(o bien m · kgf)
	1 lb · ft	= 0.13826 kgf · m	(o bien m · kgf)
	1 kip · in.	= 11.5216 kgf · m	(o bien m · kgf)
	1 kip · ft	= 138.257 kgf · m	(o bien m · kgf)
Trabajo (y energía)	1 ft · lb	= 0.13826 kgf · m	

Como ejemplo de la variación en el valor numérico de propiedades físicas, cuando se evalúan en los sistemas de unidades en uso actual en la mecánica de materiales (o de sólidos) y en el análisis de estructuras de la ingeniería civil, se presentan a continuación los valores utilizados en la práctica, de dos magnitudes importantes: el módulo elástico longitudinal (E) y el esfuerzo de cedencia (o fluencia plástica) (F_Y) del acero estructural A36 (designación ASTM):

$$E = 29\,000 \text{ ksi} = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 = 206 \text{ GPa} \approx 200 \text{ GPa}$$

$$F_Y = 36\,000 \text{ psi} = 2\,530 \text{ kgf/cm}^2 = 248 \text{ MPa} \approx 250 \text{ MPa}$$

Los valores aparecen sucesivamente en las unidades US, ST y SI (se incluye un redondeo en el último caso). (Esas cantidades figuran en la obra *Análisis Estructural,* 3a. ed., de Jack C. McCormac, publicada por Harla.)

3.4 ***La metrificación en Estados Unidos de América (EUA)*** En el país citado se realiza actualmente una importante difusión del conocimiento del SI y sus aplicaciones en el uso diario, la educación, el comercio, la industria y la tecnología. La institución denominada U.S. Metric Association (USMA) colabora ampliamente con organizaciones que promueven el avance en la metrificación de EUA, como el National Institute of Standards and Technology (NIST), el American National Standards Institute (ANSI) y la American Society for Testing and Materials (ASTM).

La USMA publica bimestralmente su boletín *Metric Today* y mantiene una comunicación constante con instituciones educativas y del gobierno de Estados Unidos de América, con las de otros países y —específicamente para el caso de la industria de la construcción— con el National Institute of Building Sciences. La conversión cabal de EUA al uso exclusivo de las unidades métricas SI en la educación y en el trabajo técnico, industrial y comercial se prevé para el año 2000.

símbolos y abreviaturas —tablas

A	área
A'	área parcial de la sección transversal de una viga
$\bar{a}, \bar{b}$	coordenadas del centroide de un área del diagrama de momentos
b	ancho, anchura
C	compresión total en el concreto armado
c	distancia del eje neutro (E.N.) a la fibra más alejada o extrema
D, d	diámetro
d	peralte efectivo de una viga de concreto
E	módulo de elasticidad axial (a tensión o a compresión)
e	espesor, excentricidad, base de los logaritmos naturales
f	frecuencia de rotación (rev/s), esfuerzo calculado (AISC)
f_c	esfuerzo máximo de compresión en el concreto (u hormigón) armado
f_a	esfuerzo de tensión en el acero del concreto armado
F	fuerza (en general), esfuerzo admisible (AISC)
G	módulo de elasticidad al cortante (módulo de rigidez)
g	aceleración de la gravedad (9.81 m/s^2)
h	altura, peralte efectivo de una viga de concreto armado
I	momento de inercia (o segundo momento) de un área
$I_{E.N.}$	momento de inercia con respecto al eje neutro (E.N.)
$\bar{I}$	momento de inercia centroidal (respecto de un eje que pase por el c.g.)
J	momento polar de inercia de un área
J	momento polar de inercia centroidal
j	coeficiente de la distancia h en el concreto armado
K	factor de concentración del esfuerzo
k	constante de un resorte, radio de giro (o de inercia), coeficiente de la distancia h en el concreto armado

L	largo, longitud
L_e	longitud efectiva de una columna
M	momento de una fuerza, momento flexionante (o flector)
m	masa
N	fuerza normal, factor de seguridad
n	relación de módulos elásticos
P	fuerza, carga concentrada, tensión circunferencial
P_{cr}	carga crítica de una columna
P_{xr}, P_{uv}	productos de inercia (o momentos productos) de un área
$\mathcal{P}$	potencia
P	presión
Q	momento estático (o primer momento) de un área
q	flujo de cortante
R	fuerza resultante, reacción, radio
r	radio, radio de giro (AISC)
S	módulo de sección (o módulo resistente)
T	momento torsionante (o torsor), temperatura, tensión total en el acero del concreto armado
t	desviación tangencial, espesor
u,v,w	coordenadas rectangulares
V	fuerza cortante (vertical)
v	velocidad
W	peso o carga total
w	peso o carga por unidad de longitud
X, Y, Z	componentes ortogonales de una fuerza
x, y, z	coordenadas rectangulares
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	coordenadas del centroide o centro de gravedad (c.g.)
y	deflexión (ordenada de la elástica) de una viga
Z	módulo de sección (en la nomenclatura europea)
a	coeficiente de dilatación térmica longitudinal
α, β, γ	ángulos (en general)
γ	deformación angular (por cortante) (unitaria), distorsión
Δ	desplazamiento vertical de un apoyo
δ	deformación total (alargamiento o acortamiento), deflexión máxima (o flecha) de una viga o de una columna
δ_{st}	deformación (o deflexión), estática
ε	deformación axial (por tensión o por compresión) (unitaria)
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	componentes de la deformación axial o normal
θ	ángulo de torsión (total), pendiente de la curva elástica
ρ	radio de curvatura, radio variable, densidad (o masa volumétrica)
υ	relación de Poisson
σ	esfuerzo (en general), esfuerzo axial o normal
σ_b	esfuerzo de aplastamiento (o de contacto)
σ_e	esfuerzo de compresión
σ_{cr}	esfuerzo crítico en columnas
σ_f	esfuerzo por reflexión

σ_r	esfuerzo radial
σ_t	esfuerzo de trabajo (o admisible)
σ_t	esfuerzo de tensión, esfuerzo circunferencial (o de aro)
σ_x, σ_y, σ_z	componentes del esfuerzo axial o normal
σ_{yp}, σ_{pc}	esfuerzo en el punto de cedencia o fluencia
τ	esfuerzo cortante
τ_{xy}	esfuerzo cortante en la cara x, paralelo al eje y
ω	velocidad angular (rad/s)
c.g.	(CG) centro de gravedad o centroide
DE	diámetro exterior
DI	diámetro interior
E.N.	eje neutro (o línea neutra, L.N.) de una sección
FD	factor de distribución
FS	factor de seguridad
MEP	momento de empotramiento perfecto
PL	límite de proporcionalidad (LP) (*proportional limit*)
YP	punto de cedencia (PC) o de fluencia (PF) (*yield point*)

Índice de tablas

FÓRMULAS Y FACTORES NUMÉRICOS

Cargas en vigas—Fórmulas

Tabla 6-1 Cargas en vigas en voladizo o ménsulas **(p. 187)**
Tabla 7-1 Pendiente y deflexión en el extremo libre **(p. 229)**
Tabla 6-2 Resumen de vigas cargadas **(p. 218)**
Tabla 7-2 Vigas doblemente empotradas con diversos tipos de carga **(p. 246)**

Propiedades geométricas de áreas

Tabla 5-1 Módulos de resistencia de varias formas de sección transversal **(p. 127)**
Tabla A-1 Momentos de inercia **(p. 505)**

Factores y términos especiales

Tabla 13-1 Factores de concentración de esfuerzo **(p. 422)**
Tabla 13-2 Factores de corrección K para vigas curvas **(p. 460)**
Tabla 8-1 Valores de $A\bar{a}/L$ y $GA\bar{b}/L$ **(p. 256)**

PERFILES DE ACERO ESTRUCTURAL

(Véase al final el Apéndice B)

1
esfuerzo simple

1-1. INTRODUCCIÓN

La *resistencia de materiales* amplía el estudio de las fuerzas que se inició en *mecánica,* pero existe una diferencia obvia entre ambas materias. El campo de la mecánica abarca fundamentalmente las relaciones entre las fuerzas que actúan sobre un sólido indeformable. La *estática* estudia los sólidos en equilibrio, mientras que la *dinámica* estudia los sólidos acelerados, aunque se puede establecer el equilibrio dinámico mediante la introducción de las fuerzas de inercia.

En contraste con la mecánica, la resistencia de materiales estudia y establece las relaciones entre las cargas exteriores aplicadas y sus efectos en el interior de los sólidos. Además, no supone que los sólidos son idealmente indeformables, como en la primera, sino que las deformaciones, por pequeñas que sean, tienen gran interés. Las propiedades del material de que se construye una estructura o una máquina afectan tanto a su elección como a su diseño, ya que se deben satisfacer las condiciones de resistencia y de rigidez.

Las diferencias entre la mecánica de los cuerpos rígidos y la resistencia de materiales se pueden poner más de manifiesto con el siguiente ejemplo: La determinación de la fuerza (figura 1-1) que se requiere en el extremo de una palanca para levantar un peso dado es un

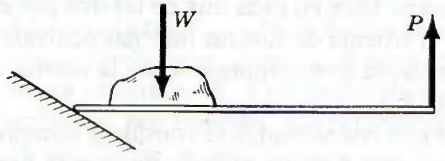


Figura 1-1. La palanca no debe romperse ni curvarse excesivamente.

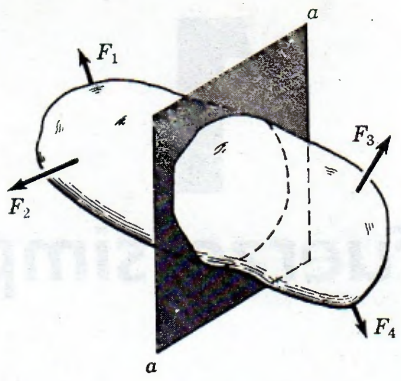


Figura 1-2. Sección de exploración *a-a* a través de un sólido sometido a la acción de varias fuerzas.

simple problema de estática. La suma de momentos respecto del punto de apoyo determina el valor de *P*. Esta solución de la estática supone que la palanca es lo bastante rígida y lo suficientemente fuerte para permitir su funcionamiento. Sin embargo, en resistencia de materiales se amplía la solución. Es necesario estudiar la barra en sí misma, para estar seguros de que ni se romperá ni será tan flexible que se doble sin levantar la carga.

En todo el libro se estudian los principios que rigen estos dos conceptos fundamentales de *resistencia* y *rigidez*. El primer capítulo comienza con los esfuerzos axiales simples posteriormente se consideran los esfuerzos por torsión y por flexión y, finalmente, se tratará de la combinación de estos tres tipos básicos de esfuerzos.

1-2. ANÁLISIS DE FUERZAS INTERNAS

Consideremos un sólido de forma cualquiera en el que actúa una serie de fuerzas, como se representa en la figura 1-2. En mecánica, se determinaría la resultante de las fuerzas aplicadas para averiguar si el sólido se encuentra o no en equilibrio. Si la resultante es nula existe equilibrio estático, condición que, en general, ha de existir en las estructuras. Si la resultante no es nula, introduciendo en el sistema exterior las fuerzas de inercia correspondientes, se obtiene el equilibrio dinámico. Tales casos se examinarán posteriormente en el estudio de los esfuerzos dinámicos. Por el momento, solo consideraremos los casos en que existe equilibrio estático.

La resistencia de materiales estudia la distribución interna de esfuerzos que produce un sistema de fuerzas exteriores aplicadas. Para ello, se suele hacer un corte ideal en el sólido por una sección de exploración, buscando qué fuerzas deben actuar en esta sección para mantener el equilibrio de cuerpo libre en cada una de las dos partes en que ha quedado dividido el cuerpo. En general, el sistema de fuerzas internas equivale a una fuerza y un par resultantes que, por conveniencia, se descomponen según la normal y la tangente a la sección, como se muestra en la figura 1-3.

El origen del sistema de ejes coordenados se considera siempre en el centroide, que es el punto de referencia de la sección. Aunque todavía no se está preparado para comprender esto, ya se verá claramente al entrar en materia; en particular, se probará para las fuerzas normales en el próximo artículo. Si el eje *X* es normal a la sección, ésta se denomina superfi-

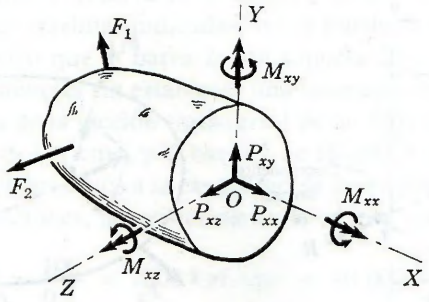


Figura 1-3. Componentes de los efectos internos en la sección de exploración *a-a*.

cie o cara X. La orientación de los ejes Z y Y en el plano de la sección se suele elegir de manera que coincidan con los ejes principales de inercia de la misma.

La notación empleada en la figura 1-3 identifica tanto la sección de exploración como la dirección de las componentes de la fuerza y del momento. El primer subíndice indica la cara sobre la que actúan las componentes, y el segundo la dirección de cada una de ellas. Por tanto, P_{xy} es la fuerza que actúa sobre la cara X en la dirección de Y.

Cada componente representa un efecto distinto de las fuerzas aplicadas sobre el sólido, en esta sección, y recibe un nombre especial, que se indica a continuación:

P_{xx} *Fuerza axial.* Esta componente corresponde a la acción de tirar (o de empujar) sobre la sección. Tirar (o jalar) representa una fuerza de extensión o tracción que tiende a alargar el sólido, mientras que empujar representa una fuerza de compresión que tiende a acortarlo. Se representa generalmente por P.

P_{xy}, P_{xz} *Fuerzas cortantes.* Son componentes de la resistencia total al deslizamiento de la porción de sólido a un lado de la sección de exploración respecto de la otra porción. La fuerza cortante total se suele representar por V y sus componentes, V_y y V_z, determinan su dirección.

M_{xx} *Momento torsionante.* Esta componente mide la resistencia a la torsión del sólido considerado, y se suele representar por T.

M_{xy}, M_{xz} *Momentos flexionantes.* Estas componentes miden la resistencia del cuerpo a curvarse o flexionarse respecto de los ejes Y o Z, y se suelen expresar, simplemente, por M_y y M_z, respectivamente.

De todo lo anterior, se deduce que el efecto interno de un sistema de fuerzas exterior dado depende de la elección y orientación de la sección de exploración. En particular, si las cargas actúan en un plano, que se suele considerar como el plano XY, las seis componentes de la figura 1-3 se reducen a tres: La fuerza axial P_{xx} (o P), la fuerza cortante P_{xy} (o V) y el momento flexionante M_{xz} (o M). En estas condiciones, como se observa en la figura 1-4a, estas componentes equivalen a una fuerza resultante R. Este hecho demuestra que si la sección de exploración tuviera otra orientación, por ejemplo, *b-b* perpendicular a R, en la figura 1-4b, el efecto de cortadura en la sección se podría anular, con lo que el efecto de tensión alcanzaría un valor máximo.

El fin que persigue la resistencia de materiales es asegurar que las estructuras puedan soportar los máximos efectos internos que puedan producirse por cualquier combinación de

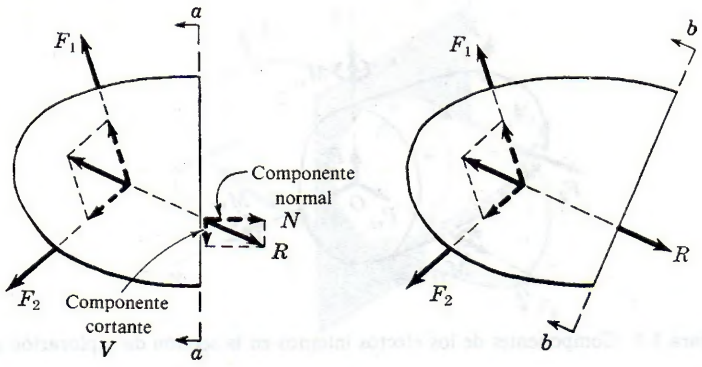


Figura 1-4. (a) Componentes normal y cortante sobre una sección arbitraria *a-a*. (b) Cuando la sección de exploración *b-b* es perpendicular a la resultante R de las fuerzas aplicadas, sólo se producen fuerzas normales.

cargas. A medida que se avance en el estudio, veremos cómo no siempre es posible, ni a veces conveniente, elegir la sección de exploración de manera que sea perpendicular a la fuerza resultante; por esta razón, se debe comenzar por analizar los efectos producidos en una sección cualquiera, como *a-a* de las figuras 1-2 y 1-4a y, después, estudiar cómo se combinan estos efectos para determinar en qué sección como *b-b* de la figura 1-4b, se producen los máximos esfuerzos internos. El procedimiento se verá en el Capítulo 9, al tratar de la combinación de esfuerzos. De momento, limitaremos el estudio a aquellas condiciones de carga en las que la sección de máximo esfuerzo interno se manifiesta por simple inspección.

1-3. ESFUERZO SIMPLE

Uno de los problemas básicos de la ingeniería es seleccionar el material más apropiado y dimensionarlo correctamente, de manera que permita que la estructura o máquina proyectada trabaje con la mayor eficacia. Para ello, es esencial determinar la resistencia, la rigidez y otras propiedades de los materiales. En el Apéndice *B*, la tabla B-1 muestra los valores medios de algunas de las propiedades de los metales más empleados.

Consideremos dos barras prismáticas de igual longitud y distinto material, suspendidas

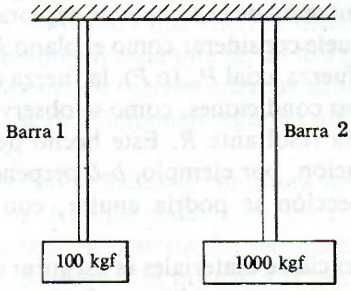


Figura 1-5. Barras que soportan diferentes cargas máximas.

de un soporte común, como se observa en la figura 1-5. Si solamente se sabe que las barras pueden soportar las cargas máximas indicadas, no se puede afirmar a priori qué material es más resistente. Por supuesto que la barra 2 está soportando una carga mayor, pero no se pueden comparar las resistencias sin establecer una base común de referencia. En este caso, se necesita conocer el área de la sección transversal de las barras. Supongamos, pues, que la barra 1 tiene una sección de 0.1 cm^2, y la barra 2 de 10 cm^2.* Ahora sí es posible comparar sus resistencias, reduciendo los datos a la capacidad de carga por unidad de área de la sección transversal. En estas condiciones, la resistencia unitaria (por unidad de área) de la barra 1 es

$$\sigma_1 = \frac{100}{0.1} = 1000 \text{ kgf/cm}^2 = 10\,000 \text{ N/cm}^2$$

y la correspondiente de la barra 2 es

$$\sigma_1 = \frac{1000}{10} = 100 \text{ kgf/cm}^2 = 1000 \text{ N/cm}^2$$

Por lo tanto, el material de la barra 1 es diez veces más resistente que el de la barra 2.

La fuerza por unidad de área que soporta un material se suele denominar *esfuerzo*† en el material, y se expresa matemáticamente en la forma:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1-1}$$

en donde σ es el esfuerzo o fuerza por unidad de área, P es la carga aplicada y A es el área de la sección transversal. Obsérvese que el esfuerzo máximo de tensión o compresión tiene lugar en una sección perpendicular a la carga, como se muestra en la figura 1-4*b*. Lo que ocurre con el esfuerzo cortante se examinará en el próximo artículo.

Sin embargo, hasta una expresión tan sencilla como la (1-1) requiere un cuidadoso examen. Dividiendo la carga entre el área de la sección no se obtiene el valor del esfuerzo en todos los puntos de aquélla, sino solamente el valor medio del esfuerzo. Una determinación más exacta del esfuerzo exige dividir la fuerza diferencial dP entre el elemento de área diferencial sobre el que actúa y escribir:

$$\sigma = \frac{dP}{dA} \tag{1-1a}$$

Veamos ahora en qué condiciones la expresión $\sigma = P/A$ define exactamente el esfuerzo en todos los puntos de la sección transversal. La situación en la que el esfuerzo es constante o uniforme se llama estado de *esfuerzo simple*. Veremos seguidamente que una distribución uniforme de esfuerzos sólo puede existir si la resultante de las fuerzas aplicadas pasa por el centroide de la sección considerada.‡

Supongamos que, mediante un corte ideal, aislamos la mitad inferior de una de las barras de la figura 1-5. Entonces, como se observa en la figura 1-6, las fuerzas resistentes en la sección y que representan la acción de la porción superior suprimida sobre la inferior,

* **N. del S.** En este ejemplo, y con fines de comparación se utilizará el kilogramo fuerza (kgf) para señalar su relación con la unidad SI, newton (N). Se emplea la equivalencia simplificada de 1 kgf = 10N, en vez de la real de un kgf = 9.8N.

† En este libro, *esfuerzo* designará siempre la intensidad de fuerza por unidad de área.

‡ Existen algunas excepciones a esta regla debidas al fenómeno de la concentración de esfuerzos (Secc. 13-3), a los cambios bruscos en la sección transversal y en el entorno de los puntos de aplicación de las fuerzas (ver más adelante).

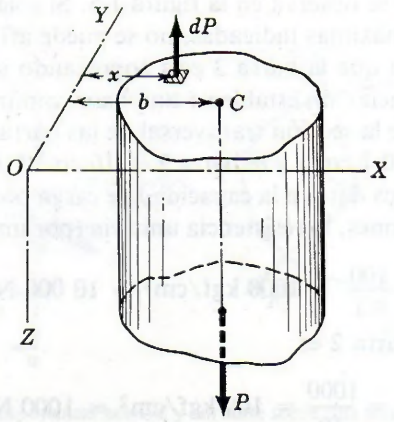


Figura 1-6. Para que pueda existir un esfuerzo uniforme, P debe pasar por el centroide C.

deben equilibrar la carga aplicada P, ya que la parte inferior aislada debe seguir en equilibrio como antes de la separación. Sea dP una fuerza resistente elemental. Aplicando las dos condiciones de equilibrio plano resulta:

$$[\Sigma Z = 0] \qquad P = \int dP = \int \sigma \, dA$$

$$[\Sigma M_y = 0] \qquad Pb = \int x \, dP = \int x(\sigma \, dA)$$

Si, como se ha supuesto, la distribución de esfuerzos es uniforme en la sección, σ es constante y sale de la integral en las expresiones anteriores, con lo que se obtiene:

$$P = \sigma \int dA = \sigma A$$

y por lo tanto

$$Pb = (\sigma A)b = \sigma \int x \, dA$$

Por consiguiente, eliminando σ se obtiene que:

$$b = \frac{\int x \, dA}{A} = \bar{x}$$

es decir, la coordenada b del punto C es la misma coordenada x del centroide de la sección. Tomando momentos respecto del eje X, se obtendría análogamente que $\bar{y}$ coincide con la coordenada y de C. De aquí se deduce que sólo es posible obtener una distribución uniforme de esfuerzos cuando la fuerza aplicada pasa por el centroide (o centro de gravedad) de la sección considerada.

No se puede inferir, sin embargo, que si la fuerza es tal que su línea de acción pasa por el centroide de la sección, resulte *siempre* una distribución uniforme de esfuerzos. Por ejemplo, la figura 1-7 representa el perfil de una placa de espesor constante con una carga P aplicada axialmente. En las secciones b-b y f-f la distribución de esfuerzos es uniforme e ilustra el principio señalado anteriormente; pero en las demás secciones indicadas, las tensiones no están uniformemente distribuidas.

En la sección e-e la distribución de esfuerzos no puede ser uniforme porque la línea de acción de P no pasa por el centroide de la sección. Tampoco resulta una distribución unifor-

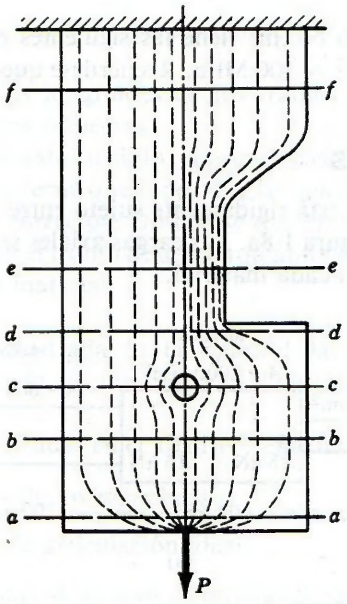


Figura 1-7. En las secciones *a-a*, *c-c*, *d-d* y *e-e* no existe una distribución uniforme de esfuerzos.

me en la sección *c-c* ni en la sección *d-d*, porque aunque la línea de acción de *P* pasa por el centroide de cada sección, existen cambios bruscos en sus inmediaciones. En tales zonas, los esfuerzos están muy localizados en ciertos puntos, y sólo se pueden determinar mediante la teoría matemática de la elasticidad o por algunos métodos experimentales como el de la fotoelasticidad. Tampoco es uniforme el esfuerzo en la sección *a-a*, porque está muy próximo al punto de aplicación de la fuerza. A menos que la sección esté a una distancia del extremo de la barra igual o mayor que la mínima anchura de ésta, no se obtiene una distribución uniforme de esfuerzos*.

Para tener una idea de por qué en las secciones *a-a*, *c-c* y *d-d* no existe un esfuerzo uniforme, imaginemos que la fuerza aplicada *P* origina una especie de líneas de esfuerzo que radian desde su punto de aplicación y se distribuyen por todo el sólido, como se indica mediante las líneas punteadas de la figura. Aunque este concepto no es realmente correcto, muestra la existencia de una concentración de esfuerzos en cualquier parte en que la geometría del sólido obstaculice el «libre flujo» de las líneas de esfuerzo. El agrupamiento de estas líneas en las proximidades del orificio en la sección *c-c* y en el entrante de la sección *d-d*, lo cual indica una concentración de esfuerzo, contrasta con el fluir suave y más uniforme junto al ensanchamiento entre *e-e* y *f-f* que se ha suavizado mediante redondeos o filetes de gran radio.

UNIDADES SI

En todo lo que sigue se usará siempre la unidad SI de fuerza, el newton (N). La unidad SI de esfuerzo, el newton por metro cuadrado (N/m^2), se denomina también pascal (Pa). Por

* Ver S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1951, p. 33.

ejemplo, un esfuerzo de 10 000 N/cm^2 tiene las siguientes equivalencias: 100 N/mm^2 = 100 × 10^6 N/m^2 = 100 MN/m^2 = 100 MPa. Recuérdese que 1 kN ≈ 100 kgf, 1 MPa ≈ 10 kgf/cm^2

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

101. Un tubo de aluminio está rígidamente sujeto entre una barra de bronce y una de acero, según se muestra en la figura 1-8a. Las cargas axiales se aplican en las posiciones indicadas. Determine el esfuerzo en cada material.

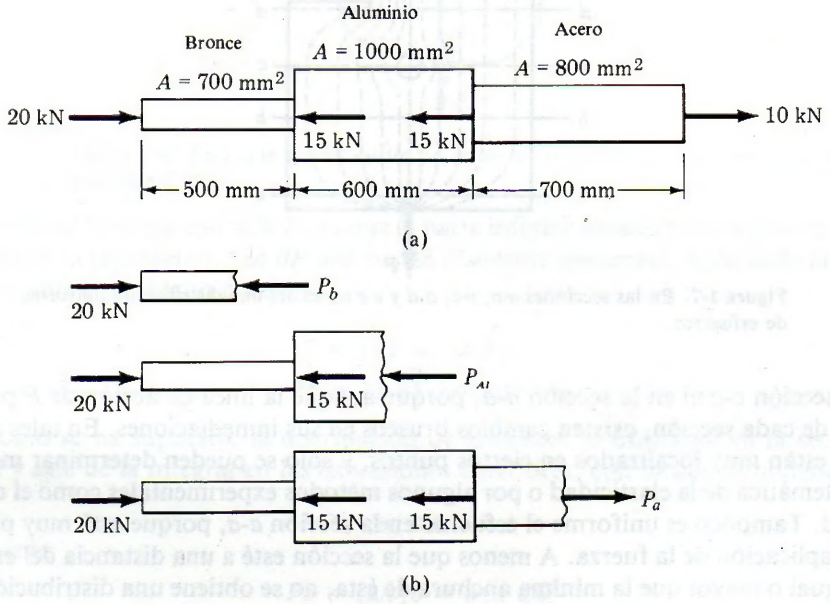


Figura 1-8

Solución: Para calcular el esfuerzo en cada sección, debemos determinar primero la carga axial en cada una de éstas. Los diagramas adecuados de cuerpo libre se muestran en la figura 1-8b, por la que se determina la carga axial en cada sección como P_b = 20 kN (compresión), P_{Al} = 5 kN (compresión) y P_a = 10 KN (tensión). Los esfuerzos en cada sección son

$$\left[\sigma = \frac{P}{A}\right]$$

$$\sigma_b = \frac{20\text{ kN}}{700\text{ mm}^2} = \frac{20 \times 10^3\text{ N}}{700 \times 10^{-6}\text{ m}^2}$$

$$= 28.6 \times 10^6\text{ N/m}^2 = 28.6\text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

$$\sigma_{Al} = \frac{5\text{ kN}}{1000\text{ mm}^2} = \frac{5 \times 10^3\text{ N}}{1000 \times 10^{-6}\text{ m}^2}$$

$$= 5 \times 10^6\text{ N/m}^2 = 5\text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

$$\sigma_a = \frac{10\text{ kN}}{800\text{ mm}^2} = \frac{10 \times 10^3\text{ N}}{800 \times 10^{-6}\text{ m}^2}$$

$$= 12.5 \times 10^6\text{ N/m}^2 = 12.5\text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

Los esfuerzos en el bronce y el aluminio son de compresión, mientras que en el acero se tiene tensión.

Nótese que ninguna de las longitudes de los tramos ni los materiales de que están hechos, afectan el cálculo de los esfuerzos.

Como puede observarse en este ejemplo, el primer paso al calcular el esfuerzo en un elemento es determinar la fuerza interna que soporta. Este cálculo se realiza mediante el análisis de diagramas de cuerpo libre **correctos**. Obsérvese que en este ejemplo, podría haber sido más fácil determinar la carga en el tramo de acero tomando la sección situada a la *derecha* de la sección exploratoria en este material.

102. Para la armadura mostrada en la figura 1-9a, determinar el esfuerzo en los miembros AC y BD. El área de la sección transversal de cada uno es 900 mm^2.

Solución: Las tres hipótesis utilizadas en el análisis elemental de armaduras son como sigue:

1. Se desprecian los pesos de los miembros.
2. Todas las uniones son de articulación ideal.
3. Todas las cargas externas se aplican directamente en las articulaciones.

Usando las tres hipótesis anteriores, los elementos de la armadura pueden analizarse como *miembros de dos fuerzas*; el sistema de fuerzas internas soportado por cada miembro se

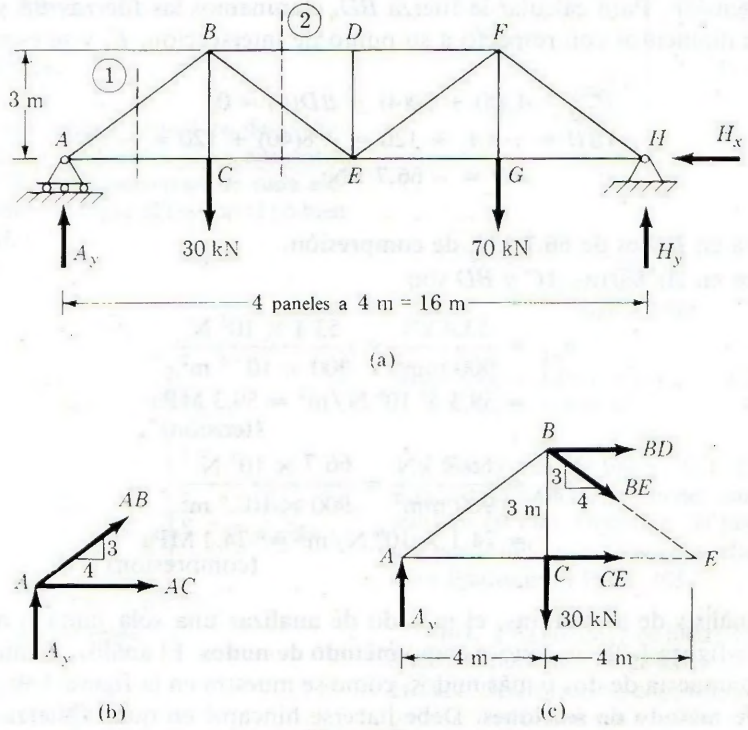


Figura 1-9.

reduce a una sola fuerza (de tensión o de compresión) que actúa a lo largo de la línea central del elemento.

El diagrama de cuerpo libre de la armadura completa se muestra en la figura 1-9a. Un análisis del equilibrio de este diagrama resulta en los siguientes valores para las reacciones externas; $A_y = 40$ kN, $H_y = 60$ kN y $H_x = 0$.

Para determinar la fuerza en AC, se hace pasar un plano de corte que aísle la junta o nudo A (sección ①, fig. 1-9a). El diagrama de cuerpo libre del nudo A se muestra en la figura 1-9b. Aquí, AB y AC representan las fuerzas en los miembros AB y AC, respectivamente. Nótese que ambas barras se han supuesto a tensión. Analizando el diagrama de cuerpo libre de la figura 1-9b,

$[\Sigma Y = 0]$ $\quad +\uparrow \quad A_y + \frac{3}{5}AB = 0$

$$AB = -\tfrac{5}{3}A_y = -\tfrac{5}{3}(40) = -66.7 \text{ kN}$$

$[\Sigma X = 0]$ $\quad +\rightarrow \quad AC + \frac{4}{5}AB = 0$

$$AC = -\tfrac{4}{5}AB = -\tfrac{4}{5}(-66.7) = 53.4 \text{ kN}$$

El signo negativo indica que la fuerza de 66.7 kN en AB es de compresión. La fuerza en AC es de 53.4 kN, de tensión.

Para determinar la fuerza en el miembro BD, se pasa un plano de corte que exponga la fuerza en BD (sección ②, figura 1-9a). El diagrama de cuerpo libre de la porción de la armadura situada a la izquierda de la sección ② se muestra en la figura 1-9c. (La porción a la derecha de la sección ② se podría usar también.) Las fuerzas en los miembros BD, BE y CE se suponen de tensión. Para calcular la fuerza BD, eliminamos las fuerzas BE y CE tomando una suma de momentos con respecto a su punto de intersección, E, y se escribe

$[\Sigma M_E = 0]$ $\quad +\circlearrowleft \quad -A_y(8) + 30(4) - BD(4) = 0$

$$4BD = -8A_y + 120 = -8(40) + 120 = -200$$

$$BD = -66.7 \text{ kN}$$

Así, la fuerza en BD es de 66.7 kN, de compresión.

Los esfuerzos en las barras AC y BD son

$\left[\sigma = \dfrac{P}{A}\right]$

$$\sigma_{AC} = \frac{53.4 \text{ kN}}{900 \text{ mm}^2} = \frac{53.4 \times 10^3 \text{ N}}{900 \times 10^{-6} \text{ m}^2}$$

$$= 59.3 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 59.3 \text{ MPa}$$

(tensión) **Resp.**

$$\sigma_{BD} = \frac{66.7 \text{ kN}}{900 \text{ mm}^2} = \frac{66.7 \times 10^3 \text{ N}}{900 \times 10^{-6} \text{ m}^2}$$

$$= 74.1 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 74.1 \text{ MPa}$$

(compresión) **Resp.**

En el análisis de armaduras, el método de analizar una sola junta o nudo, como se muestra en la figura 1-9b, se conoce como **método de nudos**. El análisis de una sección de la armadura compuesta de dos o más nudos, como se muestra en la figura 1-9c, se conoce con el nombre de **método de secciones**. Debe hacerse hincapié en que la fuerza interna en un miembro de una armadura está dirigida a lo largo de la línea o eje de cada miembro, pues por

hipótesis sólo son miembros de dos fuerzas. Como se describe en la sección 1-2, las fuerzas internas en un elemento cargado arbitrariamente son mucho más complicadas que una simple fuerza axial.

PROBLEMAS

103. Determine el máximo peso W que pueden soportar los cables mostrados en la figura P-103. Los esfuerzos en los cables AB y AC no deben exceder 100 MPa, y 50 MPa, respectivamente. Las áreas transversales de ambos son: 400 mm^2 para el cable AB y 200 mm^2 para el cable AC.

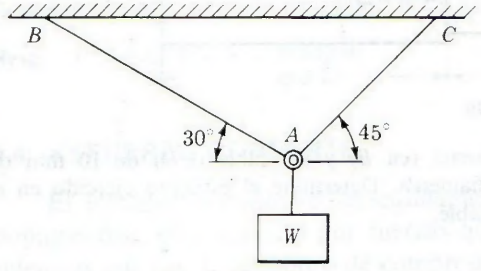


Figura P-103.

Resp. $W = 33.5$ kN

104. Calcule, para la armadura de la fig. P-104, los esfuerzos producidos en los elementos DF, CE y BD. El área transversal de cada elemento es 1200 mm^2. Indique la tensión (T) o bien la compresión (C).

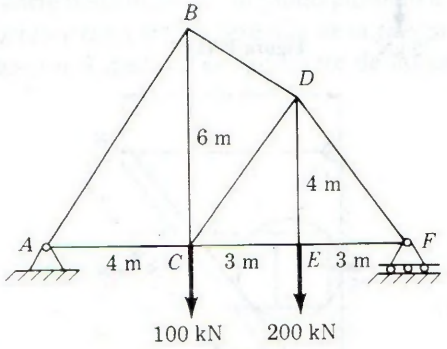


Figura P-104.

Resp. $DF = 188$ MPa (C);
$CE = 113$ MPa (T);
$BD = 80.1$ MPa (C);

105. Determine, para la armadura de la figura P-105, las áreas transversales de las barras BE, BF y CF, de modo que los esfuerzos no excedan de 100 MN/m^2 en tensión ni de 80 MN/m^2 en compresión. Para evitar el peligro de un pandeo, se especifica una tensión reducida en la compresión.

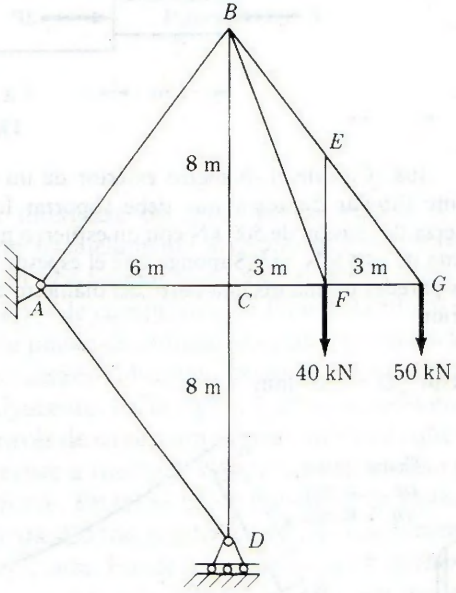


Figura P-105.

Resp. $A_{BE} = 625$ mm^2; $A_{BF} = 427$ mm^2;
$A_{CF} = 656$ mm^2

106. Todas las barras de la estructura articulada de la figura P-106 tienen una sección de 30 mm por 60 mm. Determine la máxima carga P que puede aplicarse sin que los esfuerzos excedan a los fijados en el Prob. 105.

107. Una columna de hierro fundido (o fundición) soporta una carga axial de compresión de 250 kN. Determinar su diámetro interior si el exterior es de 200 mm y el máximo esfuerzo no debe exceder de 50 MPa.

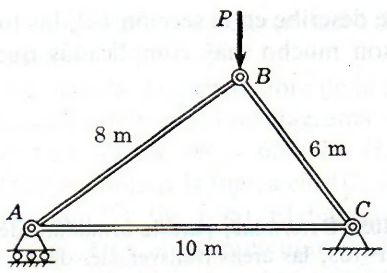


Figura P-106.

110. Un tubo de acero se encuentra rígidamente sujeto por un perno de aluminio y por otro de bronce, tal como se muestra en la figura P-110. Las cargas axiales se aplican en los puntos indicados. Calcule el máximo valor de P que no exceda un esfuerzo de 80 MPa en el aluminio; de 150 MPa en el acero; o de 100 MPa en el bronce.

111. Una barra homogénea AB (de 150 kg) soporta una fuerza de 2-kN, como puede verse en la figura P-111. La barra está sostenida por un perno (en B) y un cable (CD) de 10 mm de diámetro. Determine el esfuerzo ejercido en el cable.

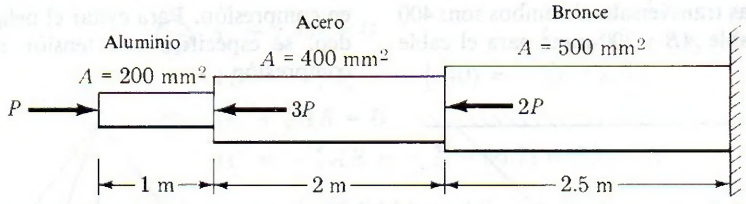


Figura P-110.

108. Calcule el diámetro exterior de un tirante tubular de acero que debe soportar una fuerza de tensión de 500 kN con un esfuerzo máximo de 140 MN/m^2. Suponga que el espesor de las paredes es una décima parte del diámetro exterior.

Resp. $D = 107$ mm

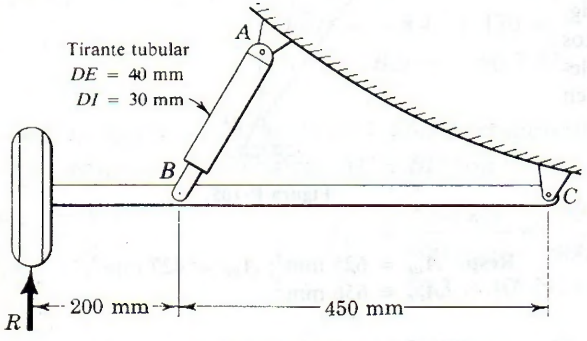


Figura P-109.

109. En la figura P-109 se muestra parte del tren de aterrizaje de una avioneta. Determine el esfuerzo de compresión en el tornapunta AB producido al aterrizar por una reacción del terreno R = 20 kN. AB forma un ángulo de 53.1° con BC. BC.

Resp. $\sigma = 65.7$ MN/m^2

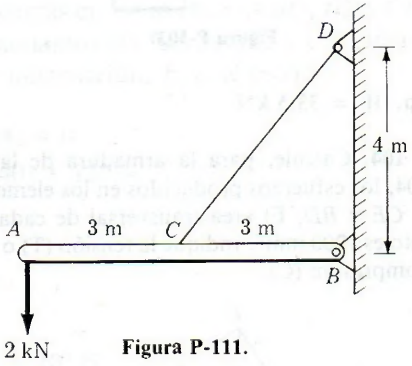


Figura P-111.

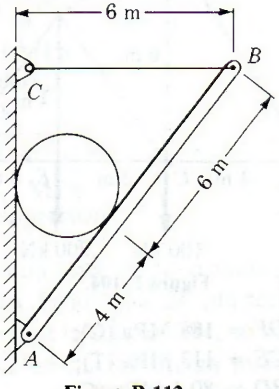


Figura P-112.

112. Calcule el peso del cilindro más pesado que se puede colocar en la posición que se indica en la figura P-112, sin rebasar un esfuerzo de 50 MN/m^2 en el cable *BC*. Desprecie el peso de la barra *AB*. El área transversal del cable *BC* es 100 mm^2.

113. Una barra homogénea *AB* (de 1000 kg de masa) pende de dos cables *AC* y *BD*, cada uno de los cuales tiene un área transversal de 400 mm^2, como se observa en la figura P-113. Determine la magnitud *P*, así como la ubicación de la fuerza adicional máxima que se puede aplicar a la barra. Los esfuerzos en los cables *AC* y *BD* tienen un límite de 100 MPa y 50 MPa, respectivamente.

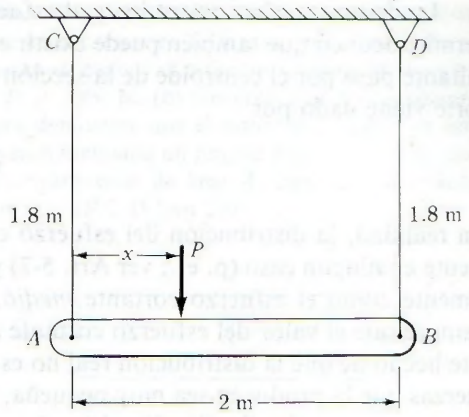


Figura P-113.

Resp. $P = 50.2$ kN; $x = 0.602$ m

1-4. ESFUERZO CORTANTE

El esfuerzo *cortante* (o de cizallamiento), a diferencia del *axial* (o de tensión o de compresión), es producido por fuerzas que actúan paralelamente al plano que las resiste, mientras que los de tensión o de compresión lo son por fuerzas normales al plano sobre el que actúan. Por esta razón, los esfuerzos de tensión y de compresión se llaman también esfuerzos *normales*, mientras que el esfuerzo cortante puede denominarse esfuerzo *tangencial*.

Aparecen esfuerzos cortantes siempre que las fuerzas aplicadas obliguen a que una sección del sólido tienda a deslizar sobre la sección adyacente. En la figura 1-10 se muestran varios ejemplos. En (a) el remache resiste el corte a través de su sección central, mientras que en la articulación representada en (b) el pasador lo resiste a través de dos secciones; el caso (a) puede llamarse *cortante simple*, y el (b) *cortante doble*. En (c) se ha de punzonar una placa; el área resistente es semejante al canto de una moneda. En todos estos casos, el cizallamiento o corte tiene lugar en un plano paralelo a la carga aplicada. Puede llamárseles casos de *fuerza cortante directa*, a diferencia de la *fuerza cortante indirecta* que aparece en secciones inclinadas con respecto a la resultante de las cargas, como en la figura 1-4a.

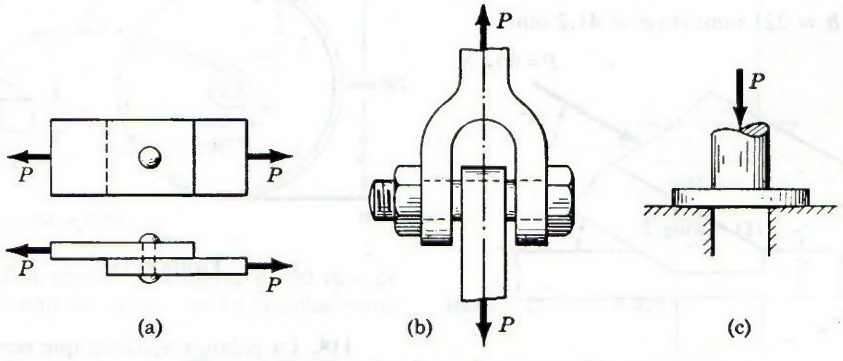


Figura 1-10. Ejemplos de secciones sometidas a cortante.

La demostración concerniente al esfuerzo normal uniforme dada en la sección anterior permite deducir que también puede existir esfuerzo cortante uniforme si la fuerza de corte resultante pasa por el centroide de la sección sometida a cortante. Si ocurre así, el esfuerzo de corte viene dado por

$$\tau = \frac{V}{A} \tag{1-2}$$

En realidad, la distribución del esfuerzo cortante en una sección no es uniforme prácticamente en ningún caso (p. ej., ver Art. 5-7) y por ello la expresión (1-2) debe interpretarse solamente como el esfuerzo cortante *medio*. Esto no restringe su empleo en modo alguno, siempre que el valor del esfuerzo cortante admisible para un material dado tenga en cuenta este hecho de que la distribución real no es uniforme. Además, cuando la distancia entre las fuerzas que la producen sea muy pequeña, o el ancho de la sección que la soporta sea igualmente pequeño, la distribución del esfuerzo cortante tiende a ser uniforme. Estas son las condiciones existentes en la figura 1-10 y en los problemas siguientes.

PROBLEMAS

114. Se quiere punzonar una placa, tal como se indica en la figura 1-10c, que tiene un esfuerzo cortante último de 300 MPa. (*a*) Si el esfuerzo de compresión admisible en el punzón es 400 MPa, determine el máximo espesor de la placa para poder punzonar un orificio de 100 mm de diámetro. (*b*) Si la placa tiene un espesor de 10 mm, calcule el máximo diámetro que puede punzonarse.

Resp. (a) t = 33.3 mm; (b) d = 30.0 mm

115. La figura P-115 muestra la unión de un tirante y la base de una armadura de madera. Despreciando el rozamiento, (*a*) determine la dimensión b si el esfuerzo cortante admisible es de 900 kPa. (*b*) Calcule también la dimensión c si el esfuerzo de contacto no debe exceder de 7 MPa.

Resp. (a) b = 321 mm; (b) c = 41.2 mm

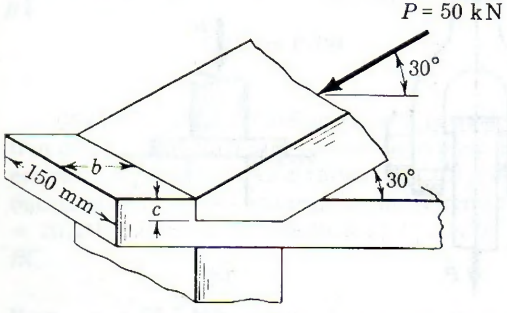


Figura P-115.

116. En el dispositivo del tren de aterrizaje descrito en el Prob. 109, los pernos en A y B trabajan a cortante simple y el perno en C a cortante doble. Determine los diámetros necesarios si el esfuerzo cortante admisible es de 50 MN/m^2.

117. Una polea de 750 mm sometida a la acción de las fuerzas que indica la figura P-117 está montada mediante una cuña en un eje de 50 mm de diámetro. Calcule el ancho b de la cuña si tiene 75 mm de longitud y el esfuerzo cortante admisible es de 70 MPa.

Resp. b = 11.4 mm

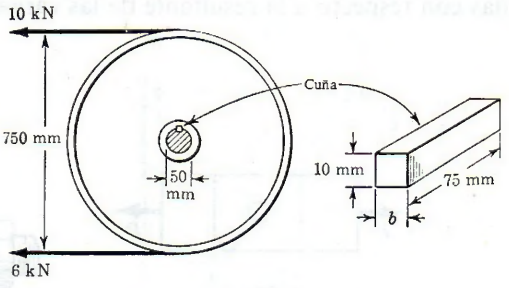


Figura P-117.

118. La palanca acodada que representa la figura P-118 está en equilibrio. (a) Determine el

diámetro de la barra AB si el esfuerzo normal está limitado a 100 MN/m^2. (b) Determine el esfuerzo cortante en el pasador situado en D, de 20 mm de diámetro.

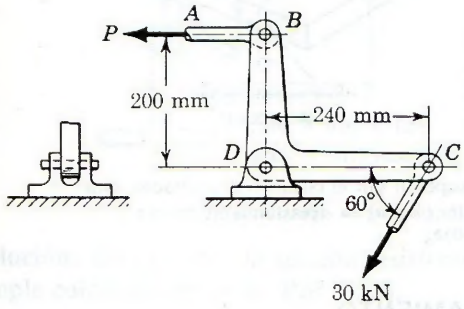


Figura P-118.

119. La masa de la barra homogénea AB mostrada en la figura P-119 es 2000 kg. La barra está apoyada mediante un perno en B y mediante una superficie vertical lisa en A. Determine el diámetro del perno más pequeño que puede usarse en B si su esfuerzo cortante está limitado a 60 MPa. El detalle del apoyo en B es idéntico al apoyo D mostrado en la figura P-118.

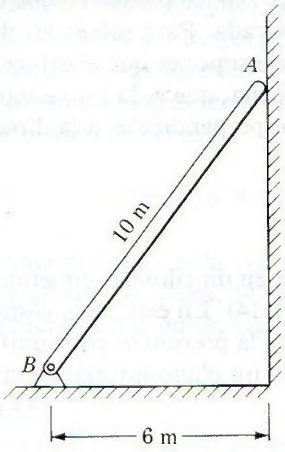


Figura P-119.

Resp. $d = 14.9$ mm

120. Dos piezas de madera, de 50 mm de ancho y 20 mm de espesor, están pegadas como indica la figura P-120. (a) Aplicando las ideas que se expresan en la figura 1-4a, determine la fuerza cortante y el esfuerzo cortante en la unión si $P = 6000$ N. (b) Generalice el procedimiento para demostrar que el esfuerzo cortante en una sección inclinada un ángulo θ respecto a una sección transversal de área A, tiene un valor dado por $\tau = (P/2A)$ (sen 2θ).

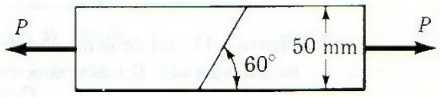


Figura P-120.

121. Un cuerpo rectangular de madera, de sección transversal de 50 mm × 100 mm, se usa como elemento de compresión, según se muestra en la figura P-121. Determine la fuerza axial máxima P que pueda aplicarse con confianza al cuerpo si el esfuerzo de compresión en la madera está limitado a 20 MN/m^2 y el esfuerzo cortante paralelo a las vetas lo está a 5 MN/m^2. Las vetas forman un ángulo de 20° con la horizontal, según se muestra. (*Indicación:* Use los resultados del Problema 120.)

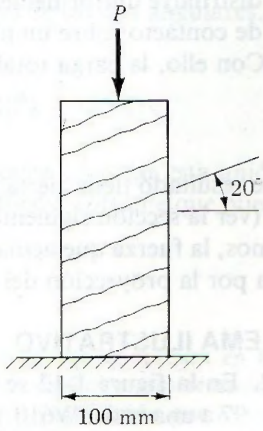


Figura P-121.

Resp. $P = 77.8$ kN

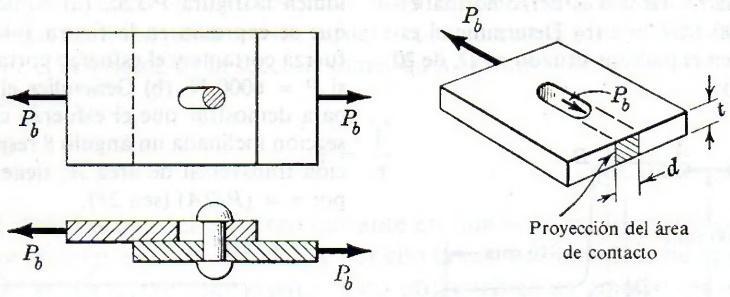


Figura 1-11. La deformación de la placa superior por el esfuerzo de contacto, está muy exagerada. (El subíndice *b* es del inglés *bearing* = aplastamiento.)
$P_b = A_b\sigma_b = (td)\sigma_b$

1-5. ESFUERZO DE CONTACTO O APLASTAMIENTO

Este esfuerzo, a diferencia del esfuerzo de compresión que existe en el interior de los cuerpos bajo la acción de cargas exteriores, es el que se produce en la superficie de contacto de dos cuerpos. Ya hemos visto algún ejemplo de este tipo de esfuerzo de compresión, como la presión sobre el terreno bajo una columna, o la presión en las placas de apoyo. Ahora, examinaremos el esfuerzo de contacto entre un eje y su cojinete, o entre un remache o un perno y las paredes del orificio de las placas que sujeta.

En la figura 1-11 se observa cómo por un excesivo esfuerzo de contacto se puede llegar a la fluencia en el material de la placa, del remache o de ambos. La presión del remache contra las paredes del orificio no es constante, variando desde cero en los puntos en que desaparece el contacto hasta un máximo en el centro de la parte apoyada. Para salvar las dificultades inherentes a una distribución variable de esfuerzos se suele suponer que el esfuerzo de contacto se distribuye uniformemente sobre un área más pequeña, que es la proyección de la superficie de contacto sobre un plano diametral del orificio, perpendicular a la dirección de la fuerza. Con ello, la carga total se puede expresar por

$$P_b = A_b\sigma_b = (td)\sigma_b \tag{1-3}$$

Este resultado tiene cierta analogía con lo que ocurre en un cilindro sometido a presión interior (ver la sección siguiente, especialmente la figura 1-14). En este caso, como luego estudiaremos, la fuerza que actúa, en una dirección es igual a la presión interior uniforme multiplicada por la proyección del área sobre la que actúa, en un plano normal a esa dirección.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

122. En la figura 1-12 se muestra el detalle de la unión del extremo de una viga tipo W460 × 97 a una trabe W610 × 125 mediante dos ángulos de 100 × 90 × 10, y remaches de 19 mm de diámetro. En las tablas del Apéndice B se relacionan las dimensiones y otros datos de éstos y otros perfiles normalizados. Para los remaches, realizados en el taller, que unen los ángulos a la viga puede tomarse $\tau = 80$ MPa y $\sigma_b = 170$ MPa. Para los demás, colocados en obra, $\tau = 70$ MPa y $\sigma_b = 140$ MPa. El alma de la trabe tiene 11.9 mm de espesor y la de la viga, 11.4 mm. Determinar la máxima reacción de la viga que puede soportar esta unión remachada.

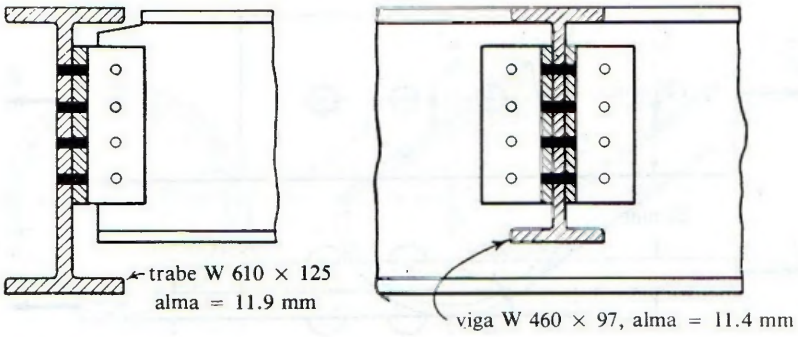


Figura 1-12. Detalles de la unión de una viga y una trabe o viga maestra.

Solución: En la trabe, la sección resistente al corte es la de los ocho remaches a cortante simple colocados en obra. Por tanto,

$$[P = A\tau] \qquad P = 8\left(\frac{\pi}{4}\right)(19 \times 10^{-3})^2(70 \times 10^6) = 159 \text{ kN}$$

La resistencia al aplastamiento o esfuerzo de contacto en esta unión depende de la placa de menor espesor, que en este caso es el ángulo de 10 mm de espesor. Para los ocho remaches se tiene:

$$[P = A\sigma_b] \qquad P = 8(19 \times 10^{-3})(10 \times 10^{-3})(140 \times 10^6) = 213 \text{ kN}$$

En la unión viga-ángulos, los cuatro remaches a cortante doble dan un total de ocho secciones resistentes, como en la otra unión, que con un esfuerzo admisible mayor, 80 MPa, admiten una fuerza también mayor.

La resistencia al aplastamiento o esfuerzo de contacto en la viga se calcula para el alma de ésta, ya que su espesor es menor que la suma de los espesores de los dos angulares, y para los cuatro remaches se obtiene:

$$[P = A\sigma_b] \qquad P = 4(19 \times 10^{-3})(11.4 \times 10^{-3})(170 \times 10^6) = 147 \text{ kN}$$

La máxima reacción de la viga (carga de seguridad) que debe soportar esta unión es la menor de las calculadas, o sea, 147 kN, y está limitada por la fuerza cortante que pueden resistir los remaches en la unión viga-ángulos.

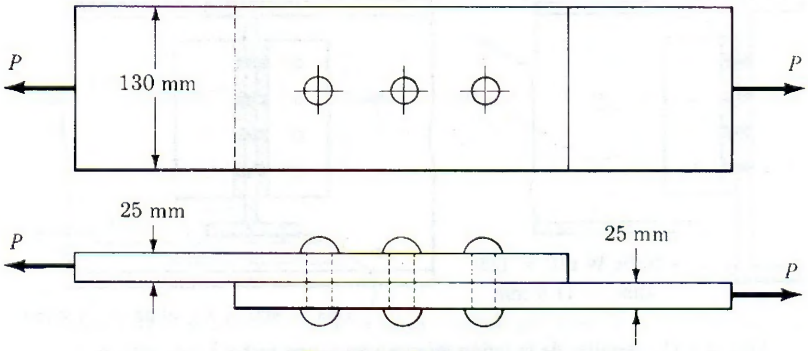
PROBLEMAS

123. En la figura 1-11 se supone que el remache tiene 20 mm de diámetro y une placas de 100 mm de ancho. (a) Si los esfuerzos admisibles son de 140 MN/m^2 para el aplastamiento y 80 MN/m^2 para el esfuerzo cortante, determinar el mínimo espesor de cada placa. (b) Según las condiciones especificadas en la parte (a), ¿cuál será el máximo esfuerzo medio de tensión en las placas?

Resp. (a) 8.98 mm; (b) 35.0 MN/m^2

124. La junta que se muestra en la figura P-124 está sujeta mediante tres remaches de 20 mm de diámetro. Suponiendo que P = 50 kN, determine (a) el esfuerzo cortante en cada remache, (b) el esfuerzo de contacto en cada placa, y (c) el máximo esfuerzo promedio en cada placa. Suponga que la carga aplicada P está distribuida igualmente entre los tres remaches.

125. Para la junta traslapada del problema



Figuras P-124 y 125.

124, determine la máxima carga P que pueda aplicarse con confianza si el esfuerzo cortante en los remaches está limitado a 60 MPa, el esfuerzo de contacto en las placas, a 110 MPa, y el esfuerzo de tensión medio en las placas, a 140 MPa.

Resp. 56.5 kN

126. En la articulación de la figura 1-10b determine el diámetro mínimo de perno el mínimo espesor de cada rama de la horquilla si debe soportar una carga $P = 55$ kN sin sobrepasar un esfuerzo cortante de 70 MPa ni uno de 140 MPa a compresión.

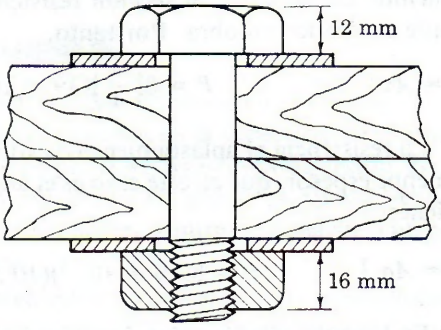


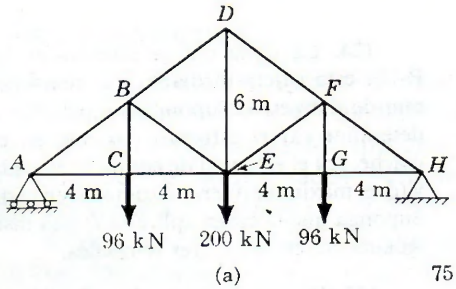
Figura P-127.

127. Un tornillo de 22.2 mm de diámetro exterior y 18.6 mm en el fondo de la rosca, sujeta dos piezas de madera, como se indica en la figura P-127. Se aprieta la tuerca hasta tener un esfuerzo de 34 kN en el tornillo. (a) Calcular el esfuerzo cortante en la cabeza del mismo y en la rosca. (b) Determinar también el diámetro exterior de las arandelas si el interior es de 28 mm y el esfuerzo de aplastamiento admisible en la madera es de 6 MPa.

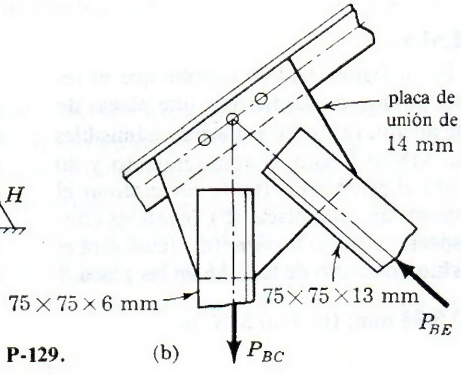
128. En la figura P-128 se muestra el esquema de una armadura y en el croquis (b) el detalle de la unión de las barras, mediante una placa, en el nudo B. ¿Cuántos remaches de 19 mm de diámetro se necesitan para unir la barra BC a la placa, si los esfuerzos admisibles son $\tau = 70$ MPa y $\sigma_b = 140$ MPa? ¿Cuántos para la barra BE? ¿Cuál es el esfuerzo medio de compresión o de tensión en BC y BE?

Resp. Para BC, 7 remaches; para BE, 5.

129. Repetir el problema anterior con remaches de 22 mm de diámetro sin variar los demás datos.



(a)



(b)

Figuras P-128 y P-129.

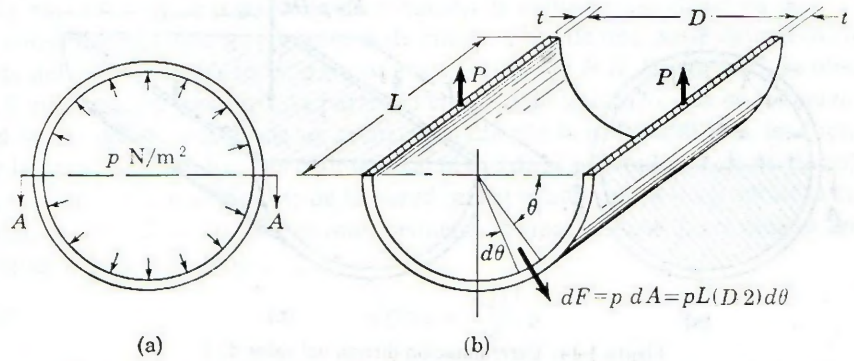


Figura 1-13. Determinación analitica de la fuerza F de presión, que tiende a separar las dos partes del cilindro.

1-6. CILINDROS DE PARED DELGADA

Un depósito cilíndrico que contenga un fluido a una presión p N/m^2 está sometido a fuerzas de tensión según sus secciones longitudinales y transversales, y las paredes han de resistir estas fuerzas para evitar que estalle. Consideremos primeramente una sección longitudinal cualquiera A-A que corte diametralmente al cilindro de la figura 1-13(a) sometido a presión interior. En la figura 1-13(b) se representa el diagrama de cuerpo libre de una de las mitades del cilindro.

La fuerza elemental, que actúa normalmente a un elemento diferencial de la pared del cilindro, a un ángulo θ del diámetro horizontal, es

$$dF = p\,dA = pL\frac{D}{2}d\theta$$

Por simetría respecto al plano vertical que pasa por el eje del cilindro, a cada dF le corresponde otra (no dibujada) cuya componente horizontal será igual, pero de sentido contrario, por lo que todas las parejas de componentes horizontales se anulan y la fuerza total F que tiende a separar una mitad del cilindro de la otra es la suma de las componentes verticales de dichas fuerzas elementales:

$$F = \int_0^{\pi}\left(pL\frac{D}{2}d\theta\right)\operatorname{sen}\theta = pL\frac{D}{2}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

que se reduce a

$$F = pDL$$

Evidentemente, y para mantener el equilibrio del medio cilindro, la fuerza total F, que actúa normalmente al plano A-A, es resistida por las fuerzas iguales P que actúan en las dos secciones cortadas de la pared del cilindro. Por tanto,

$$[\Sigma V = 0] \qquad \boldsymbol{F = pDL = 2P} \qquad \textbf{(1–4)}$$

Un procedimiento más sencillo para determinar la fuerza F resultante de todas las fuerzas elementales en una dirección, es el indicado en la figura 1-14. La mitad inferior del cilindro está ocupada por un fluido, y puesto que éste transmite por igual las presiones en to-

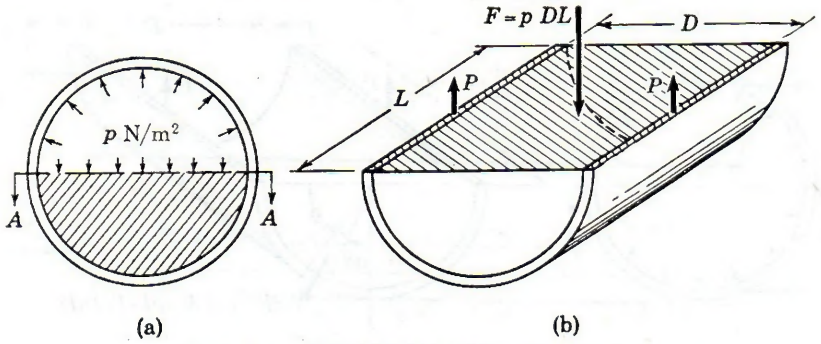


Figura 1-14. Determinación directa del valor de F.

das las direcciones, la distribución de presiones y de fuerzas elementales es la misma que en la figura 1-13. En estas condiciones, y de acuerdo con la figura 1-14b, en donde se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la mitad inferior del cilindro, es evidente que la fuerza F (que es la misma que antes), es igual a la presión por el área en la que actúa. Como esta área es la superficie libre del fluido, o sea, DL, se obtiene, como antes, que $F = pDL$. pDL.

El esfuerzo en la sección longitudinal que soporta la fuerza F resulta de dividir ésta entre el área de las dos secciones de corte. Por tanto,

$$\left[\sigma = \frac{F}{A}\right] \qquad \sigma_t = \frac{pDL}{2tL} = \frac{pD}{2t} \tag{1-5}$$

Este esfuerzo suele llamarse *esfuerzo «tangencial» o circunferencial.* El adjetivo tangencial se debe a que actúa tangencialmente a la circunferencia directriz del cilindro, pero es preferible llamarlo circunferencial, para no confundirlo con el esfuerzo cortante, al que también se conoce con el nombre de tangencial.

El esfuerzo calculado mediante la expresión (1-5) es el esfuerzo medio; para cilindros en los que la pared tenga un espesor igual o menor que un décimo de su radio interior, este esfuerzo medio calculado es prácticamente igual al esfuerzo máximo que aparece en la superfi-

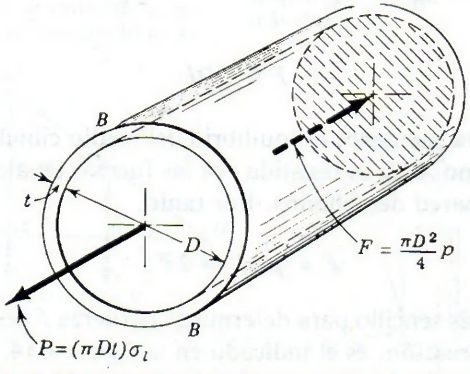


Figura 1-15. Fuerza total de presión que actúa en una sección transversal.

cie interior del cilindro, y el mínimo de la superficie exterior se diferencia muy poco de éste (véase la Sec. 13-11, que trata de la distribución de esfuerzos en cilindros de pared gruesa).

Si consideramos ahora el diagrama de cuerpo libre de una parte del depósito cilíndrico separada del resto por una sección transversal cualquiera *B-B*, figura 1-15, se observa que la fuerza F que tiende a separar esta parte del cilindro de la otra, y que es la fuerza que actúa sobre el fondo del mismo, ha de ser contrarrestada por la resultante P de las fuerzas que actúan en la pared del cilindro, normalmente al plano de la sección transversal de corte. El área de esta sección es igual al espesor de la pared multiplicado por la longitud de la circunferencia media, o sea $\pi(D + t)t$. Si t es muy pequeño comparado con D, el área es aproximadamente igual a πDt. Por tanto,

$$[P = F] \qquad \pi Dt\sigma_l = \frac{\pi D^2}{4} p$$

o bien,

$$\sigma_l = \frac{pD}{4t} \tag{1-6}$$

en donde el subíndice $_l$ indica que se trata de una tensión longitudinal, porque actúa paralelamente al eje longitudinal del cilindro.

Comparando las expresiones (1-5) y (1-6) se observa que el esfuerzo circunferencial tiene un valor doble del longitudinal y, por tanto, se puede afirmar que si la presión en un depósito cilíndrico se eleva hasta alcanzar el valor de ruptura, la falla del material tendrá lugar a lo largo de una sección longitudinal, o de una junta longitudinal. Cuando un depósito cilíndrico se construye con dos o más placas remachadas, como en la figura 1-16, la resistencia de las juntas longitudinales deberá hacerse doble que la resistencia de las juntas circunferenciales. Dicho con otras palabras, si las juntas longitudinales no tienen doble resistencia que las circunferenciales, cosa que ocurre con frecuencia, las presión interna admisible dependerá de la resistencia de las juntas longitudinales.

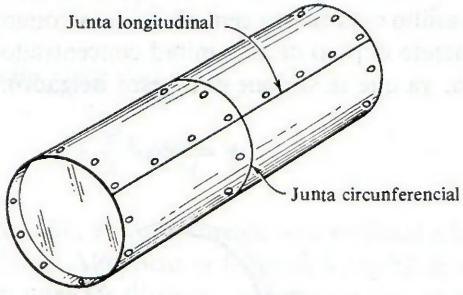


Figura 1-16.

La deducción de las ecuaciones (1-5) y (1-6) se ha hecho principalmente para determinar la relación que se acaba de establecer en el párrafo anterior, *y no para aprenderla de memoria.* Es mucho mejor calcular los esfuerzos determinando la fuerza resistente P mediante un estudio del estado de equilibrio de la parte separada del cuerpo, utilizando después la expresión $\sigma = P/A$. En este orden de ideas, la figura 1-14 se puede sustituir por el esquema equivalente de la figura 1-17, que establece igualmente la relación $2P = pDL$.

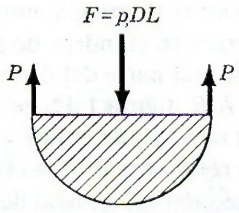


Figura 1-17.

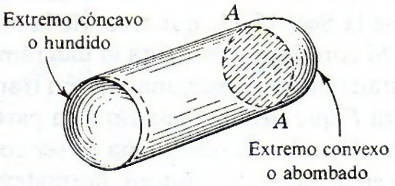


Figura 1-18.

Si los extremos del cilindro son redondeados, como los de la figura 1-18, bien salientes o bien entrantes, la fuerza total que tiende a romper el depósito por una sección transversal se calcula multiplicando la presión interna por el área encerrada en esta sección transversal por intersección con ella de la pared interna del cilindro o depósito en general, ya que, de acuerdo con lo expuesto con relación a la figura 1-14, se puede suponer que el espacio comprendido entre la sección transversal *A-A* y el extremo abombado de la figura 1-18 está ocupado por un fluido. La fuerza total longitudinal es igual al producto de la presión interior por el área, rayada en la figura, de esta sección transversal del depósito, no de sus paredes.

Como otro ejemplo de aplicación del concepto fluido como elemento que transmite presiones consideremos una cámara de presión de una bomba, que ha sido construida en varias piezas, con pestañas salientes para sujetar unas a otras mediante tornillos, figura 1-19. La fuerza que han de resistir los tornillos en la sección *A-A* es proporcional al área de la sección interior *A-A* y vale $F_1 = p(\pi D_1^2/4)$. De la misma manera, la que tienen que resistir los tornillos en la sección *B-B* es $F_2 = p(\pi D_2^2/4)$.

Los principios expuestos en esta sección sobre la determinación del esfuerzo circunferencial en cilindros de pared delgada se pueden aplicar igualmente al cálculo del esfuerzo de contacto en el reforzamiento de cilindros mediante anillos o a los esfuerzos desarrollados en un anillo que gira en su plano. En este último caso, por ejemplo, la fuerza que tiende a separar las dos mitades del anillo es la fuerza centrífuga desarrollada en una mitad del mismo. Su valor se calcula suponiendo el peso de esta mitad concentrado en el centro de gravedad (de una semicircunferencia, ya que se supone el espesor delgado). Se tiene,

$$F = m\bar{r}\omega^2 \qquad (a)$$

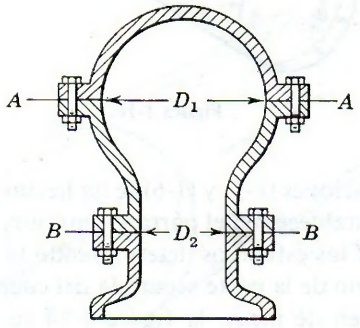


Figura 1-19.

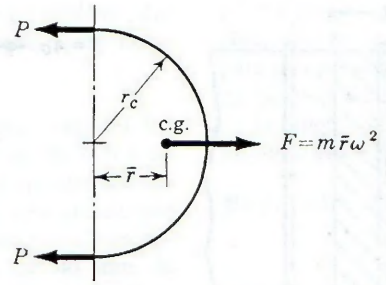


Figura 1-20. Diagrama de cuerpo libre de la mitad de un anillo giratorio.

donde ω es la velocidad angular dada en radianes por segundo y m es la masa de la mitad del anillo. En un anillo delgado m esta dado por

$$m = \rho V = \rho\pi A r_c$$

donde ρ (letra griega *ro* minúscula) es la masa por volumen unitario del anillo; A es el área transversal del anillo y r_c es el radio de la circunferencia media. De la mecánica, deducimos que el valor de $\bar{r}$ para un anillo semicircular es $\bar{r} = 2r_c/\pi$. Al sustituir estos valores, la ecuación (a) se vuelve

$$F = (\rho A \pi r_c)\left(\frac{2r_c}{\pi}\right)\omega^2 = 2\rho A v^2 \qquad (b)$$

siendo $v = r_c\omega$ la velocidad de un punto de la periferia del anillo.

Por el equilibrio de fuerzas, según el diagrama de cuerpo libre, representado en la figura 1-20, se tiene,

$$2P = F$$

con lo que el esfuerzo en el anillo viene dado por

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{\rho A v^2}{A} = \rho v^2 \qquad (c)$$

Se observa que el esfuerzo, de tensión, es directamente proporcional a la masa específica y al cuadrado de la velocidad periférica. Al aplicar la fórmula (*c*) se ha de tener mucho cuidado en emplear unidades coherentes para las distintas magnitudes que en ella intervienen.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

130. Una tubería de gran tamaño, llamada tubería de presión en obras hidráulicas, tiene 1.5 m de diámetro. Está formada por duelas de madera sujetas mediante aros de acero de 300 mm^2 de sección, y se utiliza para suministrar el agua desde un embalse a la sala de máquinas. Si el máximo esfuerzo que se permite en los aros es de 130 MPa, y la carga hidráulica es de 30 m, determine la máxima separación entre aros.

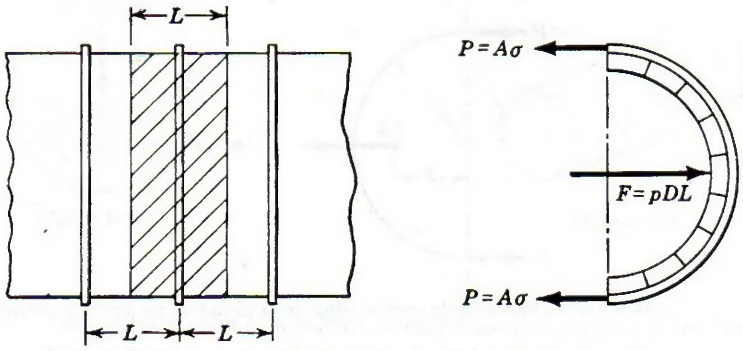


Figura 1-21. Separación de aros en una tubería de presión.

Solución: La presión correspondiente a 30 m de carga hidráulica es

$$[p = \rho gh] \qquad p = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(30 \text{ m})$$
$$= 294 \times 10^3 \text{ N/m}^2 = 294 \text{ kPa}$$

Sea L la máxima distancia entre dos aros de sujeción, como se observa en la figura 1-21. Cada aro debe soportar la fuerza de presión que se ejerce en una longitud L de tubo. Puesto que la fuerza de tensión en un aro viene dada por $P = A\sigma$, según el diagrama de cuerpo libre correspondiente,

$$[pDL = 2P] \qquad (294 \times 10^3)(1.5)L = 2(300 \times 10^{-6})(130 \times 10^6)$$

de donde

$$L = 0.177 \text{ m} = 177 \text{ mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

131. Demuestre que el esfuerzo en un cascarón esférico de pared delgada, de diámetro D y espesor t, sujeto a una presión interna p, está dado por $\sigma = pD/4t$.

132. Un recipiente cilíndrico a presión está fabricado de placas de acero que tienen un espesor de 20 mm. El diámetro del recipiente es 500 mm y su longitud, 3 m. Determine la máxima presión interna que puede aplicársele si el esfuerzo en el acero está limitado a 140 MPa. Si se aumentara la presión interna hasta que el recipiente fallara, bosqueje el tipo de fractura que ocurriría.

Resp. 11.2 MPa

133. Hallar la velocidad periférica límite de un anillo giratorio de acero si el esfuerzo normal admisible es de 140 MN/m^2 y la densidad del acero, 7850 kg/m^3. Si el radio medio es de 250 mm, ¿a qué velocidad angular se alcanzará un esfuerzo de 200 MN/m^2?

Resp. 134 m/s; 640 rad/seg

134. Un depósito cilíndrico de agua de eje vertical tiene 8 m de diámetro y 12 m de altura. Si ha de llenarse hasta el borde, determinar el mínimo espesor de las placas que lo componen si el esfuerzo está limitado a 40 MPa.

Resp. 11.8 mm

135. En el depósito cilíndrico de la figura 1-16 la resistencia de las juntas longitudinales es de 480 kN y de las trasversales, de 200 kN.

Si la presión interior ha de ser de 1.5 MN/m^2, determinar el máximo diámetro que se puede dar al depósito.

136. Una tubería que conduce vapor a 3.5 MPa tiene un diámetro exterior de 450 mm y un espesor de 10 mm. Se cierra uno de sus extremos mediante una placa atornillada al reborde de este extremo, con interposición de una junta o empaquetadura. ¿Cuántos tornillos de 40 mm de diámetro se necesitan para sujetar la tapa si el esfuerzo admisible es de 80 MPa y tiene un esfuerzo de apriete de 55 MPa? ¿Qué esfuerzo cincunferencial se desarrolla en la tubería? ¿Por qué es necesario el apriete inicial de los tornillos de la tapa? ¿Qué sucedería si la presión del vapor hiciera duplicar el esfuerzo de apriete?

Resp. 17 tornillos; 75.3 MPa

137. Un conducto o tubería de presión formado por una placa remachada en espiral tiene 1.5 m de diámetro interior y 10 mm de espesor. El paso de la espiral es de 3 m. La junta, en espiral, consiste en un solape sencillo, sujetado con remaches de 20 mm. Si los esfuerzos admisibles son τ = 70 MPa y σ_b = 140 MPa, determinar el espaciamiento de los remaches a lo largo de la junta para una presión de 1.25 MPa de acción hidráulica. Se desprecia el efecto del cierre de un extremo de la tubería (esfuerzo longitudinal). ¿Cuál es el esfuerzo circunferencial?

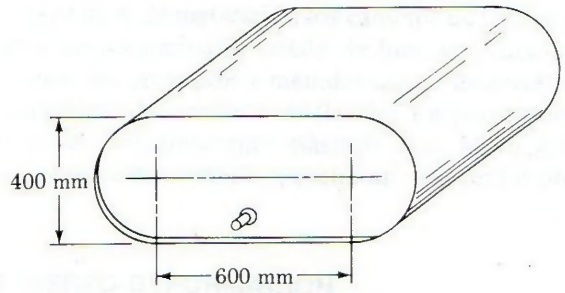
Resp. 43.7 mm; 93.8 MPa

138. Repetir el problema anterior con un diámetro del conducto de 2 m y remaches de 30 mm de diámetro sin modificar los otros datos.

139. El depósito de la figura P-139 se construyó con placa de 10 mm de acero. Calcular los esfuerzos máximos circunferencial y longitudinal que originará una presión interior de 1.2 MPa.

Resp. 17.9 MPa; 60 MPa

140. Calcule el mínimo espesor de la placa que forma el depósito del problema anterior, si el esfuerzo admisible es de 40 MN/m^2 y la presión interior vale 1.5 MN/m^2.



Figuras P-139 y P-140.

RESUMEN

Las cargas axiales originan una distribución uniforme de esfuerzo cuyo valor está dado por

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1-1}$$

El esfuerzo cortante y el de contacto también se calculan dividiendo la carga entre el área resistente, pero el resultado sólo proporciona valores medios. En particular, la superficie de contacto entre un remache y una placa se mide por su proyección diametral.

Los esfuerzos en cilindros de pared delgada sometidos a presión interior se obtienen rápidamente aplicando las condiciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte del cilindro separada por una sección longitudinal o una transversal, según el esfuerzo a determinar sea circunferencial o longitudinal, respectivamente. Se supone que las fuerzas resistentes obtenidas se distribuyen uniformemente sobre las correspondientes secciones de corte.

Para esta aplicación del diagrama de cuerpo libre, véase por ejemplo, la figura 1-14. Para un cilindro, de diámetro D y espesor de pared t, el esfuerzo circunferencial o tangencial σ_t y el esfuerzo longitudinal σ_l están dados por

$$\sigma_t = \frac{pD}{2t} \tag{1-5}$$

$$\sigma_l = \frac{pD}{4t} \tag{1-6}$$

En el caso de recipientes esféricos, el esfuerzo es

$$\sigma = \frac{pD}{4t} \tag{1-7}$$

2
deformación simple

2-1. INTRODUCCIÓN

El capítulo anterior se dedicó exclusivamente a la resistencia de un material, es decir, a las relaciones entre la fuerza (carga), la superficie y el esfuerzo. En este capítulo se estudia otro gran campo de la resistencia de materiales, los cambios de forma, es decir, las deformaciones que acompañan a un determinado estado de fuerzas. Aunque se limita al caso de barras cargadas axialmente, los principios y métodos que se desarrollan son aplicables también a los casos más complejos de torsión y de flexión. En particular, se estudian las relaciones geométricas entre las deformaciones elásticas que, junto con las condiciones de equilibrio y las relaciones fuerza-deformación, permitan resolver los problemas estáticamente indeterminados.

2-2. DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN

La resistencia de un material no es el único criterio que debe utilizarse al diseñar estructuras. Frecuentemente, la rigidez suele tener la misma o mayor importancia. En menor grado, otras propiedades tales como la dureza, la tenacidad y la ductilidad también influyen en la elección de un material. Estas propiedades se determinan mediante pruebas, comparando los resultados obtenidos con patrones establecidos. Aunque la descripción completa de estas pruebas corresponde al «ensayo de materiales», examinaremos una de ellas, la prueba de tensión en el acero, dada su importancia y la inapreciable ayuda que proporciona en la introducción de otros conceptos básicos.

Consideremos una probeta de acero sujeta entre las mordazas de una máquina de pruebas de tensión y observemos simultáneamente la carga y el alargamiento de una deter-

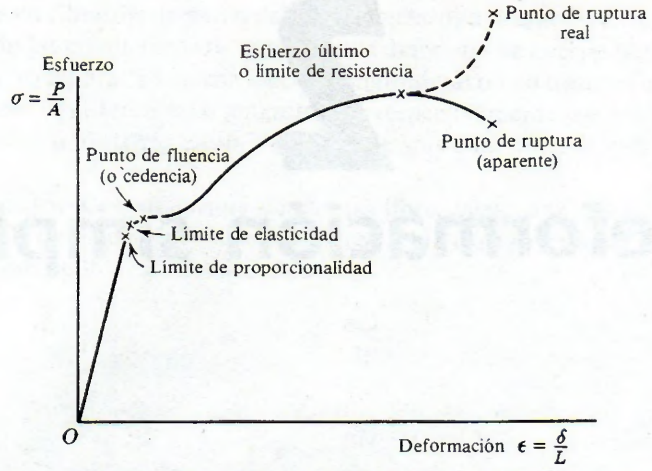


Figura 2-1. Diagrama esfuerzo-deformación

minada longitud de la misma. Los resultados se suelen representar en un gráfico en el que en ordenadas se llevan las cargas y en abscisas los correspondientes alargamientos.

En la figura 2-1 se representa un gráfico de esta clase; se puede observar que no aparecen representadas las fuerzas y los alargamientos totales, sino las fuerzas unitarias o *esfuerzos* y los alargamientos unitarios o *deformaciones*, ya que sólo se pueden comparar las propiedades de una muestra con las de la otra si se reducen los valores observados a unos puntos de referencia comunes. El diagrama de la figura 2-1 se denomina diagrama esfuerzo-deformación, cuyo nombre deriva de las magnitudes que aparecen en sus ejes de coordenadas.

Deformación

El valor de la deformación (unitaria) ϵ es el cociente del alargamiento (deformación total) δ y la longitud L en la que se ha producido. Por tanto,

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2-1}$$

Sin embargo, de este modo sólo se obtiene el valor medio de la deformación. La expresión correcta de la deformación en cualquier punto es

$$\epsilon = \frac{d\delta}{dL} \tag{2-1a}$$

que determina el valor de la deformación en una longitud tan pequeña (dL) que puede considerarse constante en dicha longitud. No obstante, en ciertas condiciones, se puede suponer que la deformación es constante y aplicar la expresión (2-1). Estas condiciones son:

1. El elemento sometido a tensión debe tener una sección transversal o recta constante.
2. El material debe ser homogéneo.
3. La fuerza o carga debe ser axial, es decir, producir un esfuerzo uniforme.

Por último, obsérvese que, como la deformación representa un cambio de longitud dividido entre la longitud inicial, la deformación es una cantidad sin dimensiones. No obstante, cuando se habla de deformaciones se emplean unidades de metro por metro (m/m). En la práctica es frecuente encontrar deformaciones del orden de 1.0×10^{-3} m/m.

Esfuerzos límites

En la figura 2-1 se observa que, desde el origen *O* hasta un punto llamado *límite de proporcionalidad*, el diagrama esfuerzo-deformación es un segmento rectilíneo, de donde se deduce la tan conocida relación de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación, enunciada en el año 1678 por Robert Hooke*. Queremos hacer resaltar que esta proporcionalidad no se extiende a todo el diagrama, si no que termina en el límite de proporcionalidad, y más allá de este punto, el esfuerzo deja de ser proporcional a la deformación. El límite de proporcionalidad tiene una gran importancia, ya que toda la teoría subsiguiente respecto al comportamiento de los sólidos elásticos está basada precisamente en la citada proporcionalidad† entre esfuerzos y deformaciones estableciendo, pues, un límite superior al esfuerzo admisible que un material dado puede soportar. También proporciona una primera indicación de por qué debe de ser el límite de proporcionalidad y no el esfuerzo de ruptura el máximo esfuerzo al que un material puede ser sometido. Más adelante volveremos a referirnos a esta observación al hablar del esfuerzo de trabajo y del coeficiente de seguridad.

Otros conceptos interesantes del diagrama esfuerzo-deformación son los siguientes: (1) *El límite de elasticidad* (o límite elástico) es el esfuerzo más allá del cual el material no recupera totalmente su forma original al ser descargado, sino que queda con una deformación residual llamada *deformación permanente*. (2) El *punto de fluencia* es aquel en el que aparece un considerable alargamiento o fluencia del material sin el correspondiente aumento de carga que, incluso, puede disminuir mientras dura la fluencia. Sin embargo, el fenómeno de la fluencia es característico del acero al carbono, mientras que hay otros tipos de acero, aleaciones y otros metales y materiales diversos, en los que no se manifiesta, como se observa en la figura 2-2, en donde se representa el diagrama típico de diversos materiales. Esta forma de los diagramas es también característica de la primera carga de piezas en las que los materiales tienen esfuerzos residuales importantes, como consecuencia de ciertos tratamientos o de sus procesos de fabricación, pero al cabo de sucesivas cargas y descargas, los esfuerzos residuales van desapareciendo y la curva se hace prácticamente recta, como se comprueba experimentalmente en el laboratorio. (3) El *límite aparente de proporcionalidad al* 0.2% (o a otro tanto por ciento), está estrechamente asociado al punto de fluencia. Se aplica este concepto en aquellos materiales que no tienen un punto de fluencia bien definido, o que carecen de él, mediante un procedimiento de equiparación con los que sí lo tienen. Consiste en trazar una paralela a la tangente en el origen a la curva partiendo de un valor normalizado (equivalente a la deformación en el límite de proporcionalidad de otros materiales) que suele tomarse del 0.2%, o sea 0.002 m/m. Como se observa en la figura 2-3, la intersección de esta recta con la

* La celebre ley de Robert Hooke, *Ut tensio sic vis,* es decir, «Según la deformación, así es la fuerza», relacionó la deformación total con la fuerza total sin admitir límite alguno a esta proporcionalidad.

† El diagrama esfuerzo-deformación de muchos materiales es en realidad una curva en la que no está definido límite de proporcionalidad alguno. En tales casos se suele admitir que existe proporcionalidad hasta un valor del esfuerzo en que la relación entre los incrementos de la deformación y el esfuerzo es un 50% mayor que en el origen del diagrama.

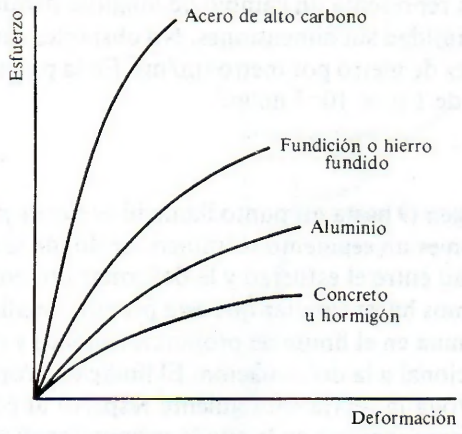


Figura 2-2. Comparación de diagramas de distintos materiales.

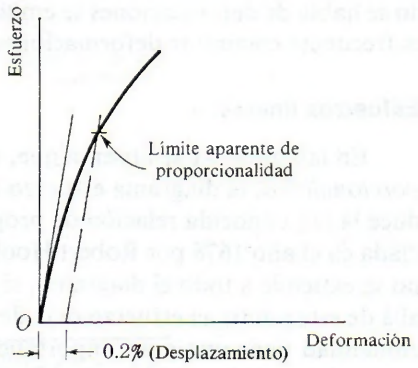


Figura 2-3. Determinación del límite de proporcionalidad al 0.2%.

curva esfuerzo-deformación define el punto considerado. (4) El *esfuerzo último*, o bien el *límite de resistencia,* es la máxima ordenada de la curva esfuerzo-deformación. (5) El *punto de ruptura* o *esfuerzo en el punto de ruptura*, que en el acero al carbono es algo menor que el esfuerzo último, debido a que el esfuerzo en este punto de ruptura se mide dividiendo la carga entre el área inicial de la sección de la barra, lo que, aunque más cómodo, es incorrecto. El error es debido al fenómeno denominado *estricción*. Próximo a tener lugar la ruptura, el material se alarga muy rápidamente y al mismo tiempo se estrecha, en una parte muy localizada de la probeta, figura 2-4, de forma que la carga, en el instante de la ruptura, se distribuye realmente sobre una sección mucho más pequeña*. Si la carga en el momento de la ruptura se divide entre el área medida después de la fractura se tiene el valor real del esfuerzo en el punto de ruptura, pero aunque es bastante mayor que el esfuerzo último, como puede observarse en la figura 2-4, se sigue tomando éste, en la mayoría de los casos, como esfuerzo máximo del material.

Esfuerzo de trabajo y factor o coeficiente de seguridad

El *esfuerzo de trabajo* es el esfuerzo real que soporta el material bajo la acción de unas cargas, y no debe sobrepasar al *esfuerzo admisible*, que es el máximo al que puede ser sometido el material, con un cierto grado de seguridad en la estructura o elemento que se considere. En un diseño real, el esfuerzo admisible σ_w ha de ser inferior al límite de proporcionalidad, con objeto de que pueda aplicarse en todo momento la relación lineal entre esfuerzos y

Figura 2-4. Estricción, o estrechamiento súbito, de una probeta de acero en la ruptura.

* Como se verá en la sección 13-4 la ruptura se produce realmente por cortante, produciéndose por esto en forma de copa, como se observa en la figura.

deformaciones que establece la ley de Hooke, y en la que se basa toda la teoría subsiguiente. Sin embargo, como es difícil determinar exactamente el límite de proporcionalidad, se acostumbra tomar como base para fijar el esfuerzo admisible el límite de fluencia (σ_{yp}) o, en su defecto, el esfuerzo último dividiéndolos entre un número N, convenientemente elegido, que se llama *factor* o *coeficiente de seguridad:*

$$\sigma_w = \frac{\sigma_{yp}}{N_{yp}} \quad \text{o bien,} \quad \sigma_w = \frac{\sigma_{ult}}{N_{ult}} \tag{2-2}$$

En el acero al carbono se toma como base para la determinación de σ_w el punto de fluencia, ya que en él tiene lugar una deformación permanente de gran magnitud y totalmente prohibitiva. En otros materiales, se suele considerar el esfuerzo último como base para fijar el esfuerzo admisible.

Dada su importancia y los distintos factores a tener en cuenta, la determinación del esfuerzo admisible debe hacerse por equipos de ingenieros con experiencia. Los esfuerzos admisibles a emplear según los casos suelen publicarse en numerosas especificaciones y normas de construcción. En el breve examen de los factores que intervienen en la determinación de los esfuerzos admisibles, empezaremos haciendo observar que en bastantes materiales el límite de proporcionalidad está próximo a la mitad del valor del esfuerzo último. A fin de evitar el peligro de sobrecargas accidentales, en el caso de estructuras con cargas permanentes gradualmente aplicadas, se suele tomar como esfuerzo admisible la mitad del límite de proporcionalidad. Al decir cargas permanentes nos referimos al peso propio de la estructura o a las cargas que, una vez aplicadas, ya no se van a suprimir. En este sentido, el coeficiente de seguridad N basado en el límite de resistencia es 4, recomendable para materiales que sean isótropos y homogéneos. Para otros materiales, como la madera, en los que pueden existir imprevisibles faltas de homogeneidad (los nudos) se deben considerar coeficientes de seguridad mayores. Los efectos dinámicos de las fuerzas aplicadas bruscamente requieren también un mayor coeficiente de seguridad. Estos, como vemos, no van a estar normalizados, ya que no son siempre los mismos, y los esfuerzos admisibles han de ser elegidos de acuerdo con la experiencia del diseñador relativa a los diferentes materiales y condiciones en que vaya a ser utilizada la estructura o el elemento correspondiente.

2-3. LEY DE HOOKE: DEFORMACIÓN AXIAL—DISTORSIÓN

Consideremos de nuevo el diagrama esfuerzo-deformación representado en la figura 2-1, y observemos su parte rectilínea. La pendiente de la recta es la relación entre el esfuerzo y la deformación; se llama *módulo de elasticidad* y se representa por la letra E:

$$\text{Pendiente de la línea esfuerzo-deformación} = E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

que se suele escribir en la forma

$$\sigma = E\epsilon \tag{2-3}$$

que no expresa otra cosa que la conocida ley de Hooke. En principio, Hooke sólo enunció la ley de que el esfuerzo es proporcional a la deformación. Fue Thomas Young, en el año 1807, quien introdujo la expresión matemática con una constante de proporcionalidad que se llamó *módulo de Young*. Finalmente, este nombre se sustituyó por el de *módulo de elasticidad* o módulo elástico que, aunque da la impresión de que se trata de una medida de las pro-

piedades elásticas del material, es una medida de su rigidez. Un nombre más apropiado hubiera sido quizá el de «módulo de rigidez».

De la ley de Hooke, ecuación (2-3), podemos ver que las unidades para el módulo de elasticidad E son idénticas a las unidades para el esfuerzo σ —recordemos que la deformación ϵ es una cantidad adimensional. Como ejemplo, el módulo de elasticidad para el acero es aproximadamente 200×10^9 N/m^2 (200×10^9 Pa). Si empleamos el prefijo G (léase "giga") del SI para representar múltiplos de 10^9, esto se puede expresar como 200 GN/m^2 (200 GPa).

Otra forma de la expresión de la ley de Hooke, muy conveniente a veces, es la que se obtiene al sustituir σ por su equivalente P/A y ϵ por δ/L, de modo que la ecuación (2-3) resulta

$$\frac{P}{A} = E\frac{\delta}{L}$$

o lo que es igual,

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E} \tag{2-4}$$

La expresión (2-4) relaciona la deformación total δ con la fuerza o carga aplicada P, la longitud de la barra L, el área de la sección recta A y el módulo de elasticidad E. La deformación total se obtiene en las mismas unidades que la longitud L, ya que σ y E tienen las mismas unidades. Recalquemos que en la validez de la expresión (2-4) hay que tener en cuenta las hipótesis siguientes:

1. La carga ha de ser axial.
2. La barra debe ser homogénea y de sección constante.
3. El esfuerzo no debe sobrepasar el límite de proporcionalidad.

Deformación angular (o por cortante) — Distorsión

Las fuerzas cortantes producen una deformación angular o distorsión, de la misma manera que las fuerzas axiales originan deformaciones longitudinales, pero con una diferencia fundamental. Un elemento sometido a tensión experimenta un alargamiento, mientras que un elemento sometido a una fuerza cortante no varía la longitud de sus lados, manifestándose por el contrario un cambio de forma, de rectángulo a paralelogramo como se observa en la figura 2-5.

El proceso puede imaginarse como producido por el desplazamiento infinitesimal o resbalamiento de capas infinitamente delgadas del elemento unas sobre otras, siendo la suma de

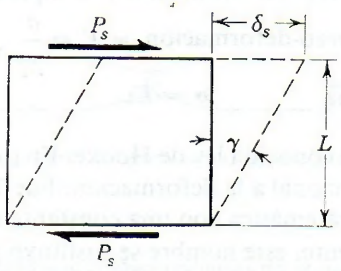


Figura 2-5. Deformación angular o distorsión.

estos infinitos resbalamientos infinitesimales la deformación transversal total δ_s, en una longitud L. El proceso real es más complejo que lo expuesto y será examinado más a fondo en la sección 9-9.

La deformación angular media se obtiene dividiendo δ_s entre L. Por tanto, tan $\gamma = \delta_s/L$, figura 2-5; ahora bien, como γ es siempre muy pequeño, tan $\gamma \approx \gamma$ con lo que, que,

$$\gamma = \frac{\delta_s}{L} \tag{2-5}$$

Para ser más precisos, la distorsión es la variación experimentada por el ángulo entre dos caras perpendiculares de un elemento diferencial.

Suponiendo que la ley de Hooke también es válida en el cortante, existe una relación lineal entre la distorsión y el esfuerzo cortante dada por:

$$\tau = G\gamma \tag{2-6}$$

en donde G es el *módulo de elasticidad al cortante* llamado a veces «módulo de rigidez». La relación entre la deformación tangencial total y las fuerzas cortantes aplicadas es

$$\delta_s = \frac{VL}{A_s G} \tag{2-7}$$

en donde V representa la fuerza cortante que actúa sobre la sección de área A_s que la soporta. Obsérvese la semejanza de este resultado con la expresión (2-4).

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

201. Determinar el alargamiento producido por una fuerza de 100 kN aplicada a una barra plana de 20 mm de espesor y un ancho que varía gradual y linealmente desde 20 mm hasta 40 mm en una longitud de 10 m, como se indica en la figura 2-6. Supóngase $E = 200 \times 10^9$ N/m^2.

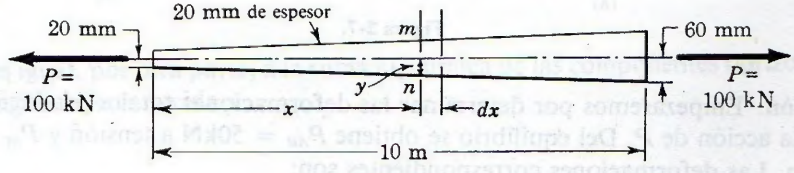


Figura 2-6.

Solución: Como el área de la sección transversal de la barra no es constante, la expresión (2-4) no se puede aplicar directamente. Sin embargo, sí se puede utilizar para hallar el alargamiento de una longitud diferencial para la que la sección pueda considerarse constante. El alargamiento total será la suma de los alargamientos infinitesimales.

En una sección m-n a una distancia x del extremo más estrecho, la semianchura y es, por consideraciones geométricas,

$$\frac{y - 20}{x} = \frac{60 - 20}{10} \quad \text{de donde,} \quad y = (4x + 20) \text{ mm}$$

y el área de esta sección,

$$A = 20(2y) = (160x + 800)\ \text{mm}^2$$

Por tanto, en la sección *m-n* y en una longitud diferencial *dx*, el alargamiento se puede obtener de la expresión (2-4):

$$\left[\delta = \frac{PL}{AE}\right] \qquad d\delta = \frac{(100 \times 10^3)\,dx}{(160x + 800)(10^{-6})(200 \times 10^9)}$$

$$= \frac{0.500\,dx}{160x + 800}$$

por lo que el alargamiento total es

$$\delta = 0.500 \int_0^{10} \frac{dx}{160x + 800} = \frac{0.500}{160}\left[\ln(160x + 800)\right]_0^{10}$$

$$= (3.13 \times 10^{-3}) \ln \frac{2400}{800} = 3.44 \times 10^{-3}\ \text{m} = 3.44\ \text{mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

202. Dos barras de acero *AB* y *BC* soportan una carga $P = 30$ kN, como se indica en la figura 2-7a. La sección de *AB* es 300 mm^2, y la de *BC* es 500 mm^2. Si $E = 200$ GPa, determinar el desplazamiento horizontal y vertical del punto *B*.

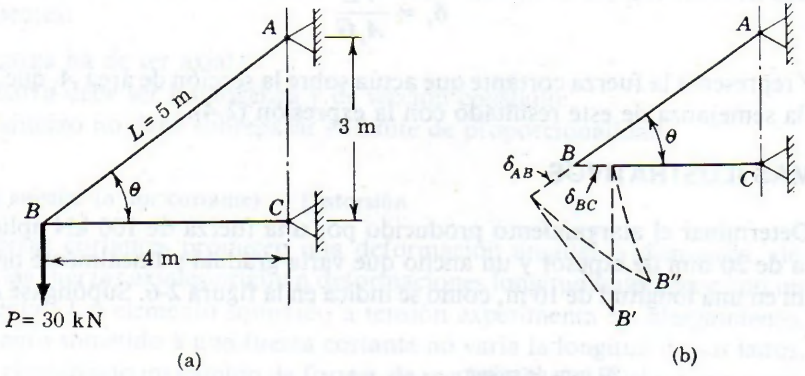


Figura 2-7.

Solución: Empezaremos por determinar las deformaciones totales producidas en cada barra por la acción de *P*. Del equilibrio se obtiene $P_{AB} = 50$kN a tensión y $P_{BC} = 40$ kN a compresión. Las deformaciones correspondientes son:

$$\left[\delta = \frac{PL}{AE}\right] \qquad \delta_{AB} = \frac{(50 \times 10^3)(5000)}{(300 \times 10^{-6})(200 \times 10^9)}$$

$$= 4.17\ \text{mm, alargamiento}$$

$$\delta_{BC} = \frac{(40 \times 10^3)(4000)}{(500 \times 10^{-6})(200 \times 10^9)}$$

$$= 1.60\ \text{mm, acortamiento}$$

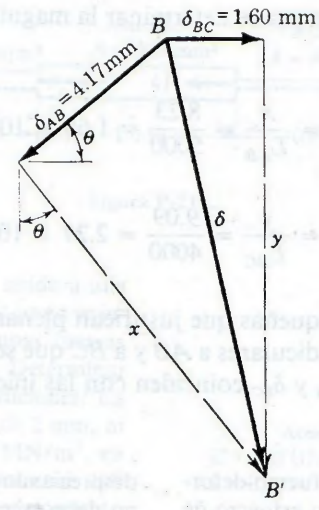


Figura 2-8.

Para analizar el efecto de estas deformaciones en el movimiento de B, imaginemos que se desconectan entre sí las barras AB y BC de manera que puedan acortarse y alargarse, tal como se indica exageradamente en la figura 2-7b. Para reunir sus extremos B hay que girarlas alrededor de A y de C hasta que se encuentren en B''. Ahora bien, los arcos engendrados por estas rotaciones son tan pequeños que se pueden remplazar, sin error apreciable, por rectas perpendiculares a AB y BC; estas rectas, que se cortan en B', determinan la posición final de B. En la figura 2-8 se representan, a mayor escala, las deformaciones δ_{AB} y δ_{BC}. El desplazamiento total de B es el vector BB' o δ dirigido como se indica.

En la figura 2-8 se observa que el desplazamiento horizontal de B, o componente horizontal de δ, es

$$\delta_h = \delta_{BC} = 1.60 \text{ mm, hacia la derecha} \qquad \textbf{Resp.}$$

Como δ_h es igual, por otra parte, a la suma algebraica de las componentes horizontales de δ_{AB} y de la longitud desconocida x,

$$\delta_h = x \operatorname{sen} \theta - \delta_{AB} \cos \theta$$

de donde

$$1.60 = x\left(\tfrac{3}{5}\right) - 4.17\left(\tfrac{4}{5}\right), \qquad x = 8.23 \text{ mm}$$

Con este valor de x se puede determinar y, es decir, δ_v, que es la suma de las componentes verticales de δ_{AB} y de x;

$$\delta_v = \delta_{AB} \operatorname{sen} \theta + x \cos \theta = 4.17\,\tfrac{3}{5} + 8.23\,\tfrac{4}{5} = 9.09 \text{ mm, hacia abajo} \qquad \textbf{Resp.}$$

Volviendo a la figura 2-7b se puede determinar la magnitud de los ángulos que giran las barras AB y BC,

$$\left[\theta = \frac{s}{r}\right] \qquad \alpha_{AB} = \frac{x}{L_{AB}} = \frac{8.23}{5000} = 1.65 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.0945°$$

y

$$\alpha_{BC} = \frac{y}{L_{BC}} = \frac{9.09}{4000} = 2.27 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.130°$$

Estas rotaciones son tan pequeñas que justifican plenamente la simplificación hecha al sustituir los arcos por las perpendiculares a AB y a BC que se cortan en B' (figura 2-7b) y suponer que las direcciones de δ_{AB} y δ_{BC} coinciden con las iniciales de las barras AB y BC.

PROBLEMAS

203. Durante una prueba esfuerzo-deformación se ha obtenido que para un esfuerzo de 35 MN/m^2 la deformación ha sido de 167 $\times$ 10^{-6} m/m y para un esfuerzo de 140 MN/m^2, de 667 $\times$ 10^{-6} m/m. Si el límite de proporcionalidad es de 200 MN/m^2 ¿cuál es el valor del módulo elástico? ¿Cuál es el esfuerzo correspondiente a una deformación unitaria de 0.002? Si el límite de proporcionalidad hubiese sido de 150 MN/m^2, ¿se hubieran deducido los mismos resultados? Razonar la respuesta.

Resp. $E = 210 \times 10^9$ N/m^2; $\epsilon = 381 \times 10^{-6}$ m/m

204. Una barra prismática de longitud L, sección transversal A y densidad ρ se suspende verticalmente de un extremo. Demostrar que su alargamiento total es $\delta = \rho g L^2/2AE$. Llamando M a su masa total demostrar que también $\delta = MgL/2AE$

205. Una varilla de acero que tiene una sección constante de 300 mm^2 y una longitud de 150 m se suspende verticalmente de uno de sus extremos y soporta una carga de 20 kN que pende de su extremo inferior. Si la densidad del acero es 7850 kg/m^3 y E = 200 $\times$ 10^3 MN/m^2, determinar el alargamiento de la varilla. *Indicación*: Aplique el resultado del problema 204.

Resp. δ = 54.3 mm

206. Un alambre de acero de 10 m de longitud que cuelga verticalmente soporta una carga de 2000 N. Determinar el diámetro necesario, despreciando el peso del alambre, si el esfuerzo no debe exceder de 140 MPa y el alargamiento debe ser inferior a 5 mm. Supóngase E = 200 GPa.

207. Una llanta de acero, de 10 mm de espesor, 80 mm de ancho y de 1500 mm de diámetro interior, se calienta y luego se monta sobre una rueda de acero de 1500.5 mm de diámetro. Si el coeficiente de fricción estática es 0.30, ¿qué par se requiere para girar la llanta con respecto a la rueda? Desprecie la deformación de la rueda y use E = 200 GPa.

Resp. T = 75.0 kN · m

208. Una barra de aluminio de sección constante de 160 mm^2 soporta unas fuerzas axiales aplicadas en los puntos que indica la figura P-208. Si E = 70 GPa, determinar el alargamiento, o acortamiento, total de la barra. (No hay pandeo de este elemento.)

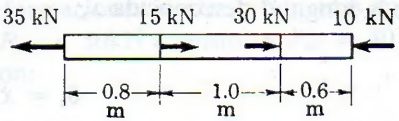


Figura P-208 y P-209.

209. Resolver el problema 208 intercambiando las fuerzas aplicadas en sus extremos, en el izquierdo la fuerza de 10 kN y en el derecho la de 35 kN.

Resp. δ = 1.61 mm (acortamiento)

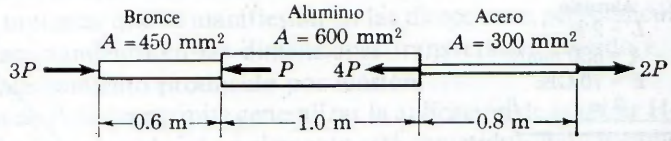


Figura P-210.

210. Un tubo de aluminio está unido a una varilla de acero y a otra de bronce, tal como se indica en la figura P-210, y soporta unas fuerzas axiales en las posiciones señaladas. Determinar el valor de P con las siguientes condiciones: La deformación total no ha de exceder de 2 mm, ni las tensiones han de sobrepasar 140 MN/m^2, en el acero, 80 MN/m^2 en el aluminio ni 120 MN/m^2 en el bronce. Se supone que el conjunto está convenientemente anclado para evitar el pandeo y que los módulos de elasticidad son 200 $\times$ 10^3 MN/m^2 para el acero, 70 $\times$ 10^3 MN/m^2 para el aluminio y 83 $\times$ 10^3 MN/m^2 para el bronce.

211. Dos barras AB y CD que se suponen absolutamente rígidas están articuladas en A y en D y separadas en C mediante un rodillo, como indica la figura P-211. En B, una varilla de acero ayuda a soportar la carga de 50 kN. Determinar el desplazamiento vertical del rodillo situado en C.

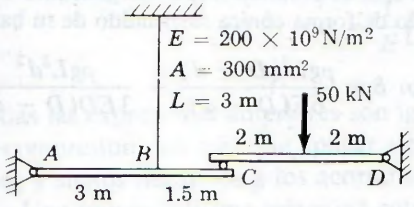


Figura P-211.

Resp. 2.82 mm

212. Un bloque prismático de concreto de masa M ha de ser suspendido de dos varillas cuyos extremos inferiores están al mismo nivel, tal como se indica en la figura P-212. Determinar la relación de las secciones de las varillas, de manera que el bloque no se desnivele.

Resp. $A_{Al}/A_a = 8.57$

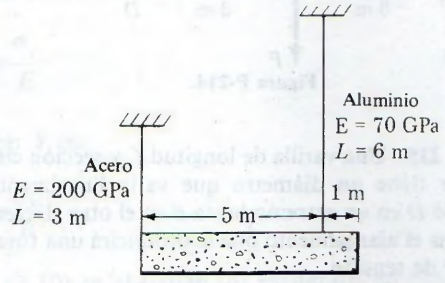


Figura P-212.

213. La barra rígida AB, sujeta a dos varillas verticales como se muestra en la figura P-213, está en posición horizontal antes de aplicar la carga P. Si P = 50 kN, determine el movimiento vertical de la barra.

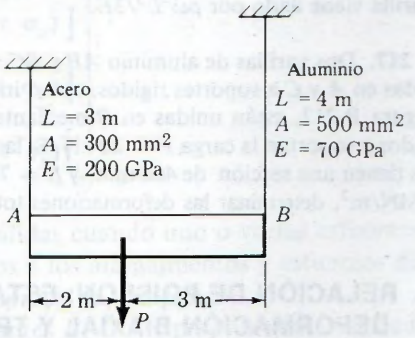


Figura P-213.

214. Las barras rígidas AB y CD mostradas en la figura P-214 están apoyadas mediante pernos en A y en C, y mediante las varillas mostradas. Determine la máxima fuerza P que pueda aplicarse como se muestra si el movimiento vertical de las barras está limitado a 5 mm. Desprecie los pesos de todos los miembros.

Resp. P = 76.3 kN

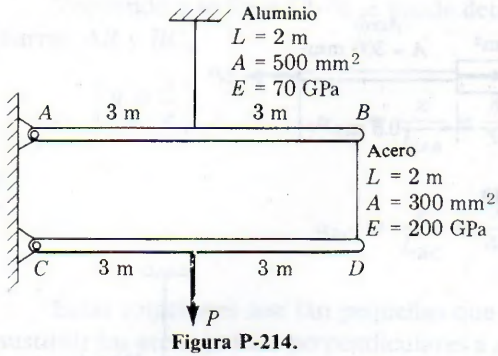


Figura P-214.

215. Una varilla de longitud L y sección circular tiene un diámetro que varía linealmente desde D en un extremo hasta d en el otro. Determinar el alargamiento que le producirá una fuerza P de tensión.

Resp. $\delta = 4PL/\pi EDd$

216. Una varilla delgada de longitud L y sección recta constante A, situada en un plano horizontal, experimenta una rotación alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos. Llamando ρ a la densidad y ω a la velocidad angular, demostrar que el alargamiento total de la varilla viene dado por $\rho\omega^2L^3/3E$.

217. Dos varillas de aluminio AB y BC articuladas en A y C a soportes rígidos, como indica la figura P-217, están unidas en B mediante un pasador y soportan la carga $P = 20$ kN. Si las varillas tienen una sección de 400 mm^2 y $E = 70 \times 10^3$ MN/m^2, determinar las deformaciones totales

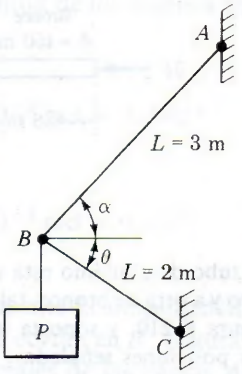


Figura P-217 y P-218.

de cada una y el desplazamiento horizontal y vertical del punto B. Considérese $\alpha = 30°$ y $\theta = 30°$.

Resp. $\delta_h = 0.412$ mm, $\delta_v = 3.57$ mm

218. Resolver el problema 217 si la varilla AB es de acero de $E = 200 \times 10^3$ MN/m^2, $\alpha = 45°$ y $\theta = 30°$, sin modificar los demás datos.

219. Una barra de sección circular que varía linealmente desde un diámetro D en un extremo hasta otro menor d en el opuesto, se suspende verticalmente de su extremo más ancho. Si la densidad del material es ρ, determinar el alargamiento debido a su peso propio. Aplicar el resultado a la determinación del alargamiento de un sólido de forma cónica suspendido de su base

Resp. $\delta = \dfrac{\rho g L^2(D + d)}{6E(D - d)} - \dfrac{\rho g L^2 d^2}{3ED(D - d)}$

2-4. RELACIÓN DE POISSON: ESTADOS DE DEFORMACIÓN BIAXIAL Y TRIAXIAL

Otro tipo de deformación elástica es la variación de las dimensiones transversales que acompaña a toda tensión o compresión axial. En efecto, se comprueba experimentalmente que si una barra se alarga por una tensión axial sufre una reducción de sus dimensiones transversales. Poisson comprobó en el año 1811 que la relación entre las deformaciones unitarias en estas direcciones es constante, por debajo del límite de proporcionalidad. En recuerdo suyo, se ha dado su nombre a esta relación, que se nombra con la letra griega ν (*nu* minúscula) y está definida por:

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \tag{2-8}$$

donde ϵ_x es la deformación debida solamente a un esfuerzo en la dirección X, y ϵ_y y ϵ_z son las deformaciones unitarias que se manifiestan en las direcciones perpendiculares. El signo menos indica un acortamiento en las dimensiones transversales cuando ϵ_x es positiva, como ocurre con un alargamiento producido por tensión.

La relación de Poisson permite generalizar la aplicación de la ley de Hooke al caso de esfuerzos biaxiales. Por ejemplo, si un elemento está sometido simultáneamente a esfuerzos de tensión según los ejes X y Y, la deformación en la dirección X debida a σ_x es σ_x/E pero, al mismo tiempo, el esfuerzo σ_y producirá una contracción lateral en la dirección X de valor $\nu\sigma_y/E$, por lo que la deformación resultante en la dirección X estará dada por:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \tag{2-9}$$

Análogamente, la deformación según la dirección Y es:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} \tag{2-10}$$

Resolviendo el sistema formado por (2-9) y (2-10) se obtienen los esfuerzos en función de las deformaciones:

$$\sigma_x = \frac{(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)E}{1 - \nu^2}; \quad \sigma_y = \frac{(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)E}{1 - \nu^2} \tag{2-11}$$

Más aún estas expresiones pueden todavía generalizarse al caso de deformaciones por tensión triaxiales, obteniéndose:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

Todas las expresiones anteriores son igualmente válidas cuando uno o varios esfuerzos son de compresión, sin más que aplicar signos positivos a los alargamientos y esfuerzos de tensión, y signos negativos a los acortamientos y esfuerzos de compresión.

Una importantísima relación* entre las constantes E, G y ν para un material dado es:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{2-13}$$

que se suele utilizar para determinar el valor de ν cuando se conocen las constantes E y G. Los valores más frecuentes de la relación de Poisson son 0.25 a 0.30 para el acero, 0.33 aproximadamente para otros muchos metales y 0.20 para el concreto.

* Esta relación se demostrará en la sección 9-11.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

220. Una muestra de un cierto material se somete a un esfuerzo uniforme según los tres ejes coordenados. Determinar el máximo valor teórico que puede alcanzar la relación de Poisson.

Solución: Sumando las expresiones (2-12) resulta:

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (a)$$

Para un esfuerzo uniforme triaxial, $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon$, y $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$, con lo que de la ecuación (a) se tiene:

$$\epsilon = (1 - 2\nu)\left(\frac{\sigma}{E}\right)$$

Ahora bien, como ϵ y σ han de tener el mismo signo, $(1 - 2\nu)$ ha de ser positivo, por lo que

$$1 - 2\nu \geqq 0$$

de donde

$$\nu \leqq \tfrac{1}{2} \qquad \textbf{Resp.}$$

221. Un eje macizo de aluminio de 80 mm de diámetro se introduce concéntricamente dentro de un tubo de acero. Determinar el diámetro interior del tubo de manera que no exista presión alguna de contacto entre eje y tubo, aunque el aluminio soporte una fuerza axial de compresión de 400 kN. Para el aluminio $\nu = \frac{1}{3}$ y $E_a = 70 \times 10^9\ \text{N/m}^2$.

Solución: La compresión axial en el aluminio es

$$\left[\sigma = \frac{P}{A}\right] \qquad \sigma_x = -\frac{400 \times 10^3}{\frac{\pi}{4}(0.080)^2} = -79.6\ \text{MN/m}^2$$

Para el esfuerzo unidireccional, la deformación transversal es:

$$\left[\epsilon_y = -\nu\epsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}\right] \qquad \epsilon_y = -\frac{1}{3}\left(\frac{-79.6 \times 10^6}{70 \times 10^9}\right)$$
$$= 379 \times 10^{-6}\ \text{m/m}$$

por lo que la holgura diametral que se requiere es:

$$[\delta = \epsilon L] \qquad \delta_y = (379 \times 10^{-6})(80) = 0.0303\ \text{mm}$$

El diámetro interior del tubo de acero se obtiene sumando el diámetro del eje de aluminio a la holgura requerida

$$D = 80 + 0.0303 = 80.0303\ \text{mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

222. Un cilindro macizo de diámetro d soporta una carga axial P. Demostrar que la variación en su diámetro es $4Pv/\pi Ed$.

223. Un bloque rectangular de aluminio tiene 100 mm de longitud según la dirección X, 75 mm de ancho según la dirección Y y 50 mm de grueso en la dirección Z. Está sometido a tres fuerzas según tres direcciones. Una fuerza de tensión uniformemente distribuida de 200 kN en la dirección X y fuerzas de compresión uniformemente distribuidas de 160 y 220 kN según las direcciones Y y Z, respectivamente. Si $v = \frac{1}{3}$ y $E = 70$ GPa, determinar qué carga total uniformemente distribuida en la dirección X produciría la misma deformación transversal en la dirección Z que las cargas dadas.

Resp. 410 kN (tensión)

224. Un tambor cilíndrico de acero construido de placa soldada de 10 mm, tiene un diámetro interior de 1.20 m. Calcular el aumento de diámetro bajo la acción de una presión interior de 1.5 MPa. Suponga que la relación de Poisson es 0.30 y $E = 200$ GPa.

225. Un tubo de acero de 50 mm de diámetro y 2 mm de espesor encaja perfectamente y sin holgura en un orificio absolutamente rígido e indeformable. Determinar el esfuerzo circunferencial en el tubo cuando se le aplica una fuerza axial de compresión de 10 kN. El coeficiente $v = 0.30$ y $E = 200 \times 10^9$ N/m^2. Despreciar la posibilidad de pandeo en las paredes del tubo.

226. Un tubo de bronce de 150 mm de longitud, cerrado en sus extremos, tiene 80 mm de diámetro y 3 mm de espesor. Se introduce sin holgura en un orificio de 80 mm de diámetro realizado en un bloque absolutamente rígido e indeformable y se somete a una presión interior de 4 MN/m^2. Con los valores $v = \frac{1}{3}$ y $E = 83 \times 10^3$ MN/m^2, determinar el esfuerzo circunferencial en el tubo.

Resp. 8.89 MN/m^2

227. Un tubo de aluminio de 200 mm de largo, cerrado en sus extremos, tiene 100 mm de diámetro y una pared de 2 mm de espesor. Si el tubo cabe justamente entre dos paredes rígidas con presión interna nula, determine los esfuerzos longitudinal y tangencial para una presión interna de 4.00 MN/m^2. Suponga $v = \frac{1}{3}$ y $E = 70 \times 10^9$ N/m^2.

2-5. ELEMENTOS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS (O HIPERESTÁTICOS)

Con frecuencia aparecen conjuntos de elementos cargados axialmente en los que las ecuaciones de equilibrio estático no son suficientes para determinar las fuerzas que, en cada sección, soportan. Estas condiciones se dan en estructuras en las que las reacciones o las fuerzas resistivas internas exceden en número al de ecuaciones independientes de equilibrio que pueden establecerse. Tales casos se llaman estáticamente indeterminados y requieren ecuaciones adicionales que relacionen las deformaciones elásticas en los distintos elementos. La variedad de casos es tan grande que es preferible describirlos mediante ejemplos que muestren cómo se aplican los principios generales siguientes:

1. En el diagrama de cuerpo libre de la estructura o de parte de ella, aplicar las ecuaciones del equilibrio estático.

2. Si hay más incógnitas que ecuaciones independientes de equilibrio, obtener nuevas ecuaciones mediante relaciones geométricas entre las deformaciones elásticas producidas por las cargas y por las fuerzas desconocidas. Para ver con claridad estas relaciones, dibujar un esquema, exagerando las deformaciones elásticas.

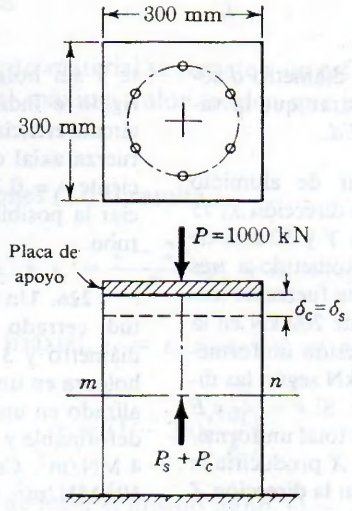


Figura 2-9. Pilar de concreto armado.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

228. Un pilar de concreto de poca altura se refuerza axialmente con seis barras de acero de 600 mm^2 de sección colocadas simétricamente en círculo alrededor del eje del pilar, como se indica en la figura 2-9. Se le aplica una carga de 1000 kN. Determinar los esfuerzos en el concreto y en el acero teniendo en cuenta los módulos elásticos $E_a = 200 \times 10^9$ N/m^2 (acero) y $E_c = 14 \times 10^9$ N/m^2 (concreto).

Solución: La fuerza aplicada y las fuerzas resistivas en cualquier sección *m-n* forman un sistema de fuerzas coaxiales. La única ecuación de equilibrio estático es:

$$[\Sigma F = 0] \qquad P_a + P_c = 1 \times 10^6 \text{ N} \qquad (a)$$

Como no existe ninguna otra ecuación estática que muestre la proporción en que se distribuye la fuerza total entre los dos materiales, se ha de acudir a la deformación elástica de la estructura. Es evidente que la placa de apoyo hace que el concreto y el acero se deformen la misma cantidad y, por tanto, aplicando la expresión $\delta = \sigma L/E$ a estas dos deformaciones iguales resulta:

$$[\delta_a = \delta_c] \qquad \left(\frac{\sigma L}{E}\right)_a = \left(\frac{\sigma L}{E}\right)_c$$

en donde simplificando y sustituyendo los valores dados de los módulos elásticos se deduce la relación entre los esfuerzos:

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_c}\sigma_c = \frac{200}{14}\sigma_c = 14.3\sigma_c \qquad (b)$$

Obsérvese que en esta ecuación se ha tenido en cuenta el hecho de que ambos materiales se han de deformar la misma cantidad, pero que es independiente de las ecuaciones de la estática y, por tanto, de las fuerzas y de las secciones del acero y del concreto, siendo válida mientras no se sobrepase el límite de proporcionalidad de ninguno de los dos materiales.

Aplicando las relaciones $P = A\sigma$ a la ecuación (*a*) se trasforma en

$$\sigma_a[6(600 \times 10^{-6})] + \sigma_c\{[(300 \times 300) - 6(600)] \times 10^{-6}\} = 1 \times 10^6$$
$$\sigma_a(3.6 \times 10^{-3}) + \sigma_c(86.4 \times 10^{-3}) = 1 \times 10^6$$

Sustituyendo σ_a por $14.3\sigma_c$ como indica la ecuación (*b*), resulta:

$$14.3\sigma_c(3.6 \times 10^{-3}) + \sigma_c(86.4 \times 10^{-3}) = 1 \times 10^6$$
$$\sigma_c = 7.25 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 7.25 \text{ MN/m}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

y de la ecuación (*b*)

$$\sigma_a = 14.3\sigma_c = 104 \text{ MN/m}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

229. En el problema anterior y suponiendo que los esfuerzos admisibles son 120 MN/m^2 en el acero y 6 MN/m^2 en el hormigón, determinar la máxima carga axial P que se puede aplicar.

Solución: La sustitución de los esfuerzos admisibles en la ecuación de equilibrio estático sería erróneo, pues entonces no se tendría en cuenta que las deformaciones en ambos materiales tienen que ser forzosamente iguales. En la ecuación (*b*) del problema anterior veíamos que para iguales deformaciones se ha de cumplir la relación entre los esfuerzos dada por:

$$\sigma_a = 14.3\sigma_c$$

y de esta relación se deduce que, cuando el concreto alcance su esfuerzo límite de 6 MN/m^2, el correspondiente en el acero debe ser:

$$\sigma_a = (14.3)6 = 85.8 \text{ MN/m}^2$$

Por tanto, el acero no podrá alcanzar su esfuerzo admisible de 120 MN/m^2 sin que en el concreto se sobrepase el suyo. Los esfuerzos reales deben ser, pues, de 6 y 85.8 MN/m^2 en el concreto y acero respectivamente, y éstos son los valores que se deben sustituir en la ecuación del equilibrio estático. Se obtiene:

$$P = P_a + P_c = A_a\sigma^a + A_c\sigma_c$$
$$= (85.8 \times 10^6)(3.6 \times 10^{-3}) + (6 \times 10^6)(86.4 \times 10^{-3})$$
$$= 827 \text{ kN} \qquad \textbf{Resp.}$$

230. Una varilla de cobre se introduce en un cilindro hueco de aluminio. La varilla sobresale 0.130 mm, como indica la figura 2-10. Determinar la carga máxima P que se puede aplicar al conjunto por intermedio de la placa de apoyo con los datos que se especifican seguidamente:

	COBRE (Cu)	ALUMINIO (Al)
Área (mm^2)	1200	1800
E (GPa)	120	70
Esfuerzo admisible (MPa)	140	70

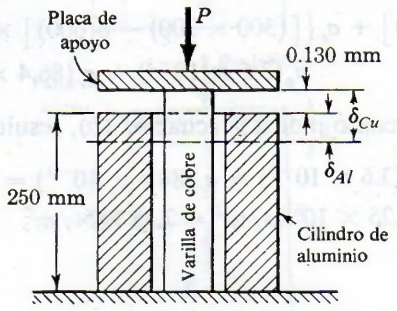


Figura 2-10.

Solución: Independientemente de la ecuación de equilibrio estático, que es la misma que en los problemas anteriores, hay que hallar una relación entre los esfuerzos a través de una ecuación entre deformaciones. Para ello, consideremos la figura 2-10 en la que se representan, muy exageradas, estas deformaciones. Se tiene:

$$[\delta_{Cu} = \delta_{Al} + (0.130 \times 10^{-3})\text{m}]$$

$$\left(\frac{\sigma L}{E}\right)_{Cu} = \left(\frac{\sigma L}{E}\right)_{Al} + (0.130 \times 10^{-3})$$

$$\frac{\sigma_{Cu}(0.25)}{120 \times 10^9} = \frac{\sigma_{Al}(0.25)}{70 \times 10^9} + (0.130 \times 10^{-3})$$

de donde

$$\sigma_{Cu} = 1.71\sigma_{Al} + (62.4 \times 10^6) \qquad (a)$$

La ecuación (a) determina la relación que debe existir necesariamente entre esfuerzos. Es evidente que si se llega a $\sigma_{Al} = 70$ MPa, se sobrecargará el cobre por alcanzar, según (b), un esfuerzo de 182 MPa. Por tanto, es el esfuerzo en el cobre el que limita la carga y, entonces, el correspondiente, en el aluminio, deberá ser, según (a),

$$(140 \times 10^6) = 1.71\sigma_{Al} + (62.4 \times 10^6) \qquad \sigma_{Al} = 45.4 \text{ MPa}$$

La carga total es:

$$P = P_{Cu} + P_{Al} = \sigma_{Cu} A_{Cu} + \sigma_{Al} A_{Al}$$

en la que, sustituyendo los esfuerzos por los valores que se acaban de determinar, resulta:

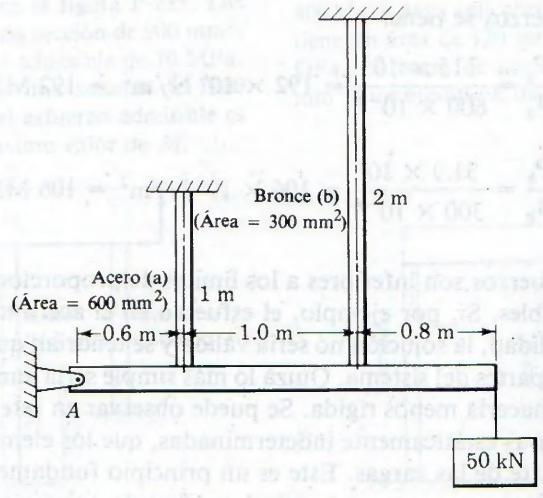
$$P = (140 \times 10^6)(1200 \times 10^{-6}) + (45.4 \times 10^6)(1800 \times 10^{-6})$$
$$= 250 \text{ kN} \qquad \textbf{Resp.}$$

231. Una barra horizontal de peso despreciable, y que se supone absolutamente rígida, está articulada en A como indica la figura 2-11a y cuelga de una varilla de bronce de 2 m y otra de acero de 1 m de longitud. Si los módulos elásticos son de 83 y 200 GN/m^2 para el bronce y el acero, respectivamente, y los límites de proporcionalidad son de 240 MN/m^2 para el acero y 140 MN/m^2 para el bronce, determinar los esfuerzos en cada varilla.

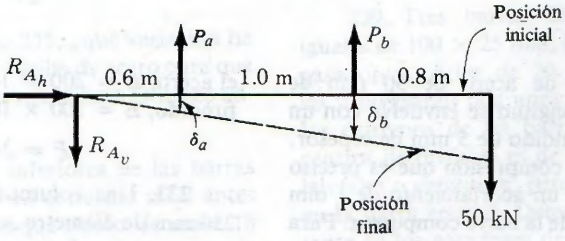
Solución: El diagrama de cuerpo libre correspondiente a la barra, figura 2-11b, muestra que el sistema es estáticamente indeterminado con un grado de indeterminación, es decir, existe una incógnita más de las que pueden determinarse mediante las ecuaciones del equilibrio estático. Tomando momentos con respecto a A se obtiene una relación entre las fuerzas en las varillas,

$$[\Sigma M_A = 0] \qquad 0.6P_a + 1.6P_b = 2.4(50 \times 10^3 \qquad (a)$$

Para determinar otra relación entre estas fuerzas se ha de acudir a una relación entre las deformaciones elásticas de las varillas. Puesto que la barra se supone rígida, de la semejanza



(a)



(b)

Figura 2-11.

de triángulos en la figura 2-11b se obtiene:

$$\frac{\delta_a}{0.6} = \frac{\delta_b}{1.6} \text{ o bien, } \frac{1}{0.6}\left(\frac{PL}{AE}\right)_a = \frac{1}{1.6}\left(\frac{PL}{AE}\right)_b$$

$$\frac{1}{0.6}\frac{P_s(1)}{(600)(200)} = \frac{1}{1.6}\frac{P_b(2)}{(300)(83)}$$

de donde

$$P_a = 3.61P_b \qquad (b)$$

Obsérvese que, en este caso, las áreas de las varillas no se han expresado en metros cuadrados, ya que al ser la ecuación una relación simple entre ambas magnitudes, éstas pueden escribirse en cualquier unidad, aunque la misma en las dos. En este sentido, también se han dividido los dos módulos elásticos entre el factor común 10^9.

De las ecuaciones (*a*) y (*b*)

$$P_a = 115 \text{ kN}$$
$$P_b = 31.9 \text{ kN}$$

Para calcular los esfuerzos se tiene:

$$\sigma_a = \frac{P_a}{A_a} = \frac{115 \times 10^3}{600 \times 10^{-6}} = 192 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 192 \text{ MN/m}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{31.9 \times 10^3}{300 \times 10^{-6}} = 106 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 106 \text{ MN/m}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

Como ambos esfuerzos son inferiores a los límites de proporcionalidad respectivos, las soluciones son aceptables. Si, por ejemplo, el esfuerzo en el acero hubiera sobrepasado su límite de proporcionalidad, la solución no sería válida y se tendrían que modificar las dimensiones de las distintas partes del sistema. Quizá lo más simple sería aumentar la longitud de la varilla de acero para hacerla menos rígida. Se puede observar en este problema lo que suele ocurrir en las estructuras estáticamente indeterminadas, que los elementos de mayor rigidez soportan la mayor parte de las cargas. Este es un principio fundamental en la teoría de las estructuras hiperestáticas, que se conoce con el nombre de *principio de las rigideces**.

PROBLEMAS

232. Una barra de acero de 50 mm de diámetro y 2 m de longitud se envuelve con un cascarón de hierro fundido de 5 mm de espesor. Calcular la fuerza de compresión que es preciso aplicar para producir un acortamiento de 1 mm en la longitud de 2 m de la barra compuesta. Para el acero, $E = 200 \times 10^9$ N/m^2, y para el hierro fundido, $E = 100 \times 10^9$ N/m^2.

$$P = 240 \text{ kN} \qquad \textbf{Resp.}$$

233. Una columna de concreto armado de 250 mm de diámetro se diseña para soportar una

* Ver Parcel y Maney, *Statically Indeterminate Stresses*, 2.ª ed., Wiley, Nueva York, 1936, pág. 109.

fuerza axial de compresión de 400 kN. Si el esfuerzo admisible en el concreto es de 6 MPa y en el acero de 120 MPa, determinar la sección de refuerzo de acero que se necesitará. $E_c = 14$ GPa y $E_a = 200$ GPa.

Resp. $A_a = 1320 \text{ mm}^2$

234. Una columna de madera de sección 250 × 250 mm se refuerza mediante placas de acero de 250 mm de ancho y espesor t, en sus cuatro caras laterales. Determinar el espesor de las placas de manera que el conjunto pueda soportar una carga axial de 1200 kN sin que se excedan los esfuerzos admisibles de 8 MN/m^2 en la madera y de 140 MN/m^2 en el acero. Los módulos elásticos son $E_m = 10 \times 10^3$ MN/m^2 y $E_a = 200 \times 10^3$ MN/m^2.

235. Un bloque completamente rígido de masa M se apoya en tres varillas situadas en un mismo plano, como indica la figura P-235. Las varillas de cobre tienen una sección de 900 mm^2, $E = 120$ GPa, y esfuerzo admisible de 70 MPa. La varilla de acero tiene una sección de 1200 mm^2, $E = 200$ GPa, y el esfuerzo admisible es 140 MPa. Calcular el máximo valor de M.

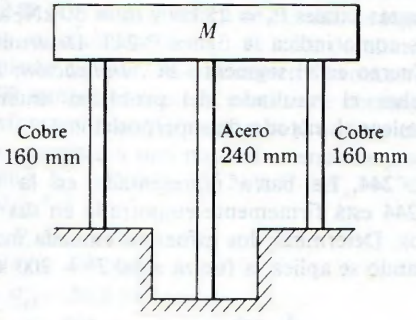


Figura P-235 y P-236.

Resp. $M = 22.3 \times 10^3$ kg

236. En el problema 235, ¿qué variación ha de tener la longitud de la varilla de acero para que las tres varillas trabajen a su máximo esfuerzo admisible?

237. Los extremos inferiores de las barras de la figura P-237 están en el mismo nivel antes de colgar de ellas un bloque rígido de masa 18 Mg. Las barras de acero tienen una sección de 600 mm^2 y $E = 200$ GN/m^2. La barra de bronce tiene una sección de 900 mm^2 y $E = 83$ GN/m^2. Determinar el esfuerzo en las tres barras.

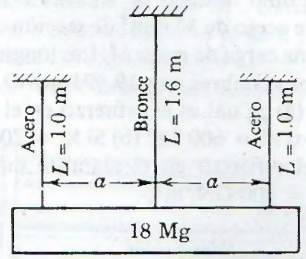


Figura P-237.

Resp. $\sigma_a = 124$ MN/m^2; $\sigma_b = 32.0$ MN/m^2

238. La plataforma rígida de la figura P-238 tiene masa despreciable y descansa sobre dos barras de aluminio, cada una de 250.00 mm de longitud. La barra central es de acero y tiene una longitud de 249.90 mm. Calcule el esfuerzo en la barra de acero una vez que la carga central P de 400 kN se haya aplicado. Cada barra de aluminio tiene un área de 120 mm^2 y un módulo E de 70 GPa. La barra de acero tiene un área de 2400 mm^2 y un módulo E de 200 GPa.

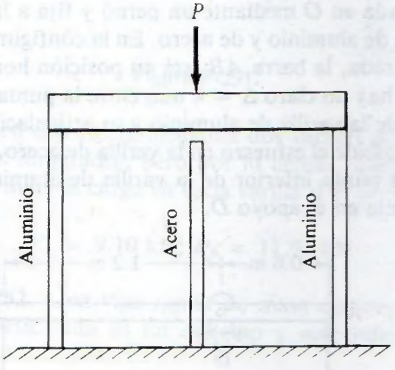


Figura P-238.

239. Tres barras de acero, de secciones iguales de 100 × 25 mm, han de unirse mediante pasadores rígidos de 20 mm de diámetro que las atravesarán por unos orificios realizados en los extremos de las barras. La distancia entre centros de orificios es de 10 m en las dos barras laterales o exteriores, pero es 1.25 mm más corta en la barra central. Determinar el esfuerzo cortante en los pasadores despreciando la deformación local en los orificios.

Resp. $\tau = 66.2$ MPa

240. Como indica la figura P-240, tres alambres de acero de 30 mm^2 de sección cada uno soportan una carga de masa M. Las longitudes iniciales de los alambres son 19.994 m, 19.997 m y 20.000 m. (a) ¿Cuál es el esfuerzo en el alambre más largo, si M = 600 kg? (b) Si M = 200 kg, determinar el esfuerzo en el alambre más corto. Emplee E = 200 GN/m^2.

Figura P-240.

241. El conjunto de la figura P-241 consiste de una barra rígida AB, de masa despreciable, articulada en O mediante un perno y fija a las varillas de aluminio y de acero. En la configuración mostrada, la barra AB está en posición horizontal y hay un claro Δ = 4 mm entre la punta inferior de la varilla de aluminio y su articulación en D. Calcule el esfuerzo en la varilla de acero cuando la punta inferior de la varilla de aluminio se articula en el apoyo D.

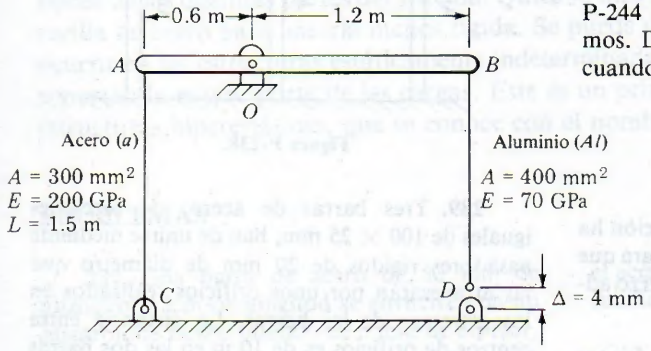


Figura P-241.

Resp. σ_a = 174 MPa

242. Una varilla homogénea de sección constante se empotra en sus extremos en soportes indeformables. Soporta una carga axial P aplicada, como indica la figura P-242. Demostrar que las reacciones vienen dadas por $R_1 = Pb/L$ y $R_2 = Pa/L$. Obsérvese que estas reaccciones son análogas a las de una viga simplemente apoyada con una carga concentrada transversal aplicada en el mismo punto.

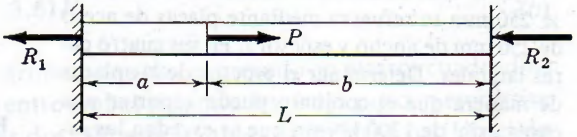


Figura P-242.

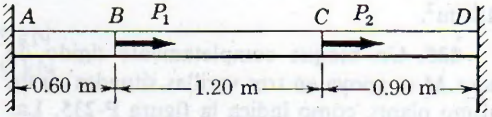


Figura P-243.

243. Una barra homogénea de sección constante igual a 500 mm^2 se empotra en sus extremos en soportes rígidos. Se somete a la acción de las fuerzas axiales P_1 = 25 kN y P_2 = 50 kN, aplicadas como indica la figura P-243. Determinar el esfuerzo en el segmento BC. *Indicación*: Aprovechar el resultado del problema anterior y emplear el método de superposición.

244. La barra representada en la figura P-244 está firmemente empotrada en sus extremos. Determinar los esfuerzos en cada material cuando se aplica la fuerza axial P = 200 kN.

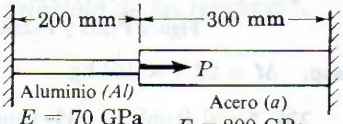


Figura P-244 y P-245.

Resp. σ_{Al} = 62.8 MN /m^2; σ_a = 120 MN/m^2

245. En el problema anterior, ¿qué fuerza máxima P puede aplicarse sin que se sobrepasen los esfuerzos admisibles de 70 MPa en el aluminio y de 120 MPa en el acero? ¿Se puede aplicar

una fuerza mayor si se modifica la longitud de la varilla de aluminio permaneciendo constante la de acero? En caso afirmativo, determinar la nueva longitud de aquélla.

246. Una varilla está formada de tres partes distintas, como indica la figura P-246, y soporta unas fuerzas axiales $P_1 = 120$ kN y $P_2 = 50$ kN. Determinar los esfuerzos en cada material si los extremos están firmemente empotrados en unos muros rígidos e indeformables.

Resp. $\sigma_a = 122$ MN/m^2

247. Resolver el problema anterior si los muros ceden, separándose 0.60 mm al aplicar las fuerzas dadas.

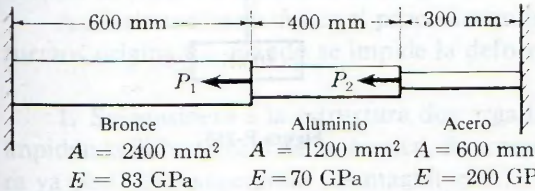


Figura P-246 y P-247.

248. Un tubo de acero de 2.5 mm de espesor ajusta exactamente dentro de otro de aluminio del mismo espesor. Si el diámetro de contacto es de 100 mm determinar la presión de contacto y los esfuerzos circunferenciales si se somete el tubo de aluminio a una presión exterior de $p = 4$ MN/m^2. $E_a = 200 \times 10^9$ N/m^2, y $E_{Al} = 70 \times 10^9$ N/m^2.

Resp. $P_c = 2.96$ MN/m^2; $\sigma_a = 59.2$ MN/m^2 $\sigma_{Al} = 20.8$ MN/m^2

249. En el problema anterior determinar la presión de contacto y los esfuerzos circunferenciales en el caso de que, inicialmente, exista una holgura radial de una centésima de milímetro entre ambos tubos, antes de aplicar la presión de 4 MN/m^2 en el tubo de aluminio.

250. La figura P-250 representa un tornillo de acero que sujeta, mediante unas arandelas y tuerca, un tubo o manguito de bronce. El paso del tornillo es de 0.80 mm, la sección recta del tubo de bronce es de 900 mm^2 y la del tornillo de acero es de 450 mm^2. Se aprieta la tuerca hasta conseguir en el manguito de bronce un esfuerzo de compresión de 30 MN/m^2. Determinar el esfuerzo si a continuación se le da a la tuerca una vuelta más. ¿Cuántas vueltas habrá que dar ahora en sentido contrario para reducir tal esfuerzo a cero?

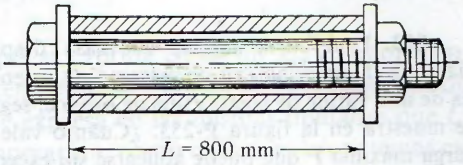


Figura P-250.

Resp. $\sigma_b = 75.4$ MN/m^2; 1.66 vueltas

251. Según se muestra en la figura P-251, una viga rígida de masa despreciable está articulada en O y sujeta mediante dos varillas de diferentes longitudes; pero por lo demás, idénticas. Determine la carga en cada varilla si $P = 30$ kN

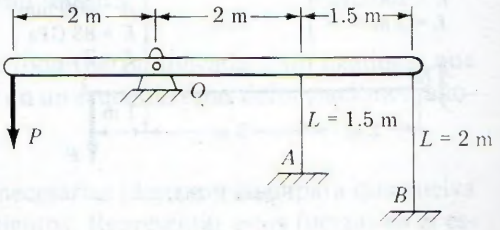


Figura P-251.

Resp. $P_A = 9.10$ kN; $P_B = 11.94$ kN

252. Una viga rígida de masa despreciable está articulada en un extremo y suspendida de

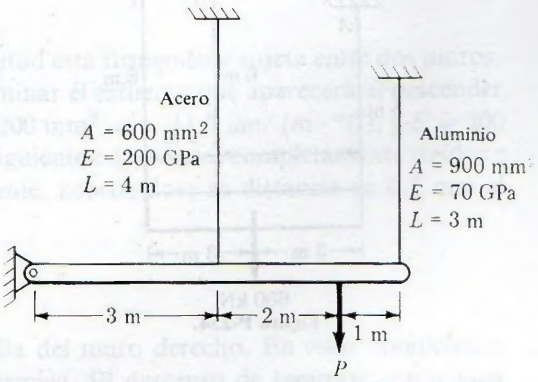


Figura P-252.

dos varillas. La viga está inicialmente en posición horizontal y en seguida se aplica la carga P. Calcule el movimiento vertical de la carga si $P = 120$ kN.

Resp. 2.92 mm

253. Una barra rígida, de masa despreciable, está articulada en un extremo y suspendida de una varilla de acero y una de bronce, según se muestra en la figura P-253. ¿Cuánto vale la carga máxima P que puede aplicarse sin exceder un esfuerzo en el acero de 120 MN/m^2 ni uno en el bronce de 70 MN/m^2?

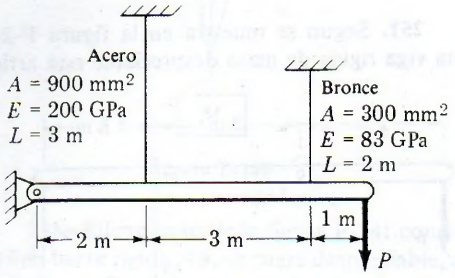


Figura P-253.

254. La figura P-254 representa la sección esquemática de un balcón. La carga total, uniformemente repartida es de 600 kN y está soportada por tres varillas de la misma sección y del mismo material. Determinar la parte de la carga que soporta cada varilla. Se supone al suelo colgante como perfectamente rígido, y téngase en cuenta que no queda necesariamente horizontal.

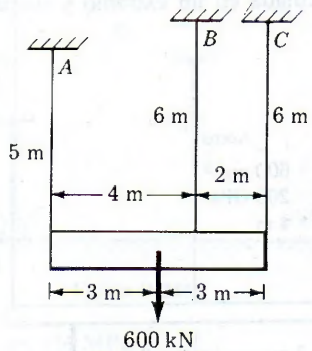


Figura P-254.

Resp. $P_B = 183$ kN

255. Tres varillas, situadas en un mismo plano, soportan conjuntamente una fuerza de 10 kN como se indica en la figura P-255. Suponiendo que antes de aplicar la carga ninguna de las tres estaba ni floja ni tensa, determinar las tensiones que aparecen en cada una. Para el acero, $E_a = 200 \times 10^9$ N/m^2, y para el bronce, $E_b = 83 \times 10^9$ N/m^2.

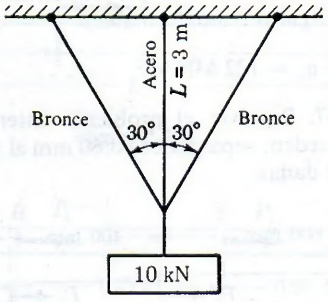


Figura P-255.

256. Tres barras AB, AC y AD se articulan en A para soportar juntas un carga $P = 20$ kN, como se indica en la figura P-256. El desplazamiento horizontal del punto A está impedido por una corta varilla horizontal AE que se supone infinitamente rígida. Determinar los esfuerzos en cada barra y la fuerza total en AE. Para la barra de acero, $A = 200$ mm^2 y $E = 200$ GPa, y para cada una de las barras de aluminio, $A = 400$ mm^2 y $E = 70$ GPa.

257. Con los mismos datos del problema anterior, calcular el máximo valor P si los esfuerzos admisibles son de 40 MPa en el aluminio y de 120 MPa en el acero.

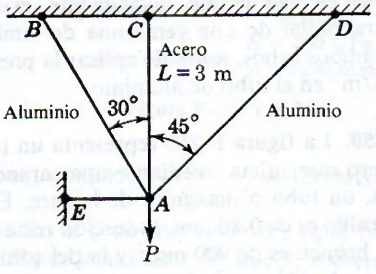


Figura P-256 y P-257.

2-6. ESFUERZOS DE ORIGEN TÉRMICO

Es bien conocido el hecho de que los cambios de temperatura provocan en los cuerpos dilataciones o contracciones, de manera que la deformación lineal δ_T, viene dada por

$$\delta_T = \alpha L(\Delta T) \tag{2-14}$$

en donde α es el coeficiente de dilatación lineal, que se expresa en m/m·°C, o simplemente $(°C)^{-1}$, L es la longitud y ΔT es la variación de temperatura en °C. Por la ecuación de dimensiones de la fórmula (2-14) se deduce que δ_T se expresa en las mismas unidades que L.

Si no se impide la deformación debida a la temperatura, como ocurre en los sistemas estáticamente determinados, no aparecerán esfuerzos en la estructura, pero en multitud de casos no es posible evitar que las deformaciones térmicas estén total o parcialmente impedidas. Como resultado de ello aparecen fuerzas internas que contrarrestan, también parcial o totalmente, estas deformaciones. Los esfuerzos originados por estas fuerzas internas se llaman esfuerzos *térmicos,* o *esfuerzos de origen térmico.*

A continuación se indica el procedimiento general para determinar las fuerzas y los esfuerzos originados cuando se impide la deformación térmica.

1. Se considera a la estructura descargada de toda fuerza aplicada y sin ligaduras que impidan la libre deformación térmica. Representar en un esquema estas deformaciones, ahora ya posibles, exagerando sus magnitudes.

2. Se aplica ahora a la estructura las fuerzas necesarias (desconocidas) para que vuelva a las condiciones iniciales de restricción de movimientos. Representar estas fuerzas en el esquema anterior.

3. Las relaciones geométricas entre las deformaciones debidas a la temperatura y las debidas a las fuerzas aplicadas en el esquema proporcionan unas ecuaciones que, junto con las de equilibrio estático, permiten determinar las fuerzas desconocidas.

Los ejemplos siguientes ilustran la aplicación de este procedimiento a distintos casos.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

258. Una varilla de acero de 2.50 m de longitud está firmemente sujeta entre dos muros. Si el esfuerzo en la varilla es nulo a 20°C, determinar el esfuerzo que aparecerá al descender la temperatura hasta −20°C. La sección es de 1200 mm^2, $\alpha = 11.7\ \mu m/(m \cdot °C)$, y $E = 200$ GN/m^2. Resolver el problema en los dos casos siguientes: (a) Muros completamente rígidos e indeformables, y (b) muros que ceden ligeramente, acortándose su distancia en 0.5 mm al descender la temperatura de la barra.

Solución:

Caso a) Imaginemos que se suelta la varilla del muro derecho. En estas condiciones puede producirse libremente la deformación térmica. El descenso de temperatura origina

Figura 2-12. Muros rígidos.

una contracción, representada por δ_T en la figura 2-12. Para volver a unir la varilla al muro, se necesitará aplicar a la varilla una fuerza de tensión P que produzca una deformación por carga δ. Del esquema de deformaciones se deduce en este caso que $\delta_T = \delta$, o bien,

$$\alpha(\Delta T)L = \frac{PL}{AE} = \frac{\sigma L}{E}$$

de donde

$$\sigma = \alpha L(\Delta T) = (200 \times 10^9)(11.7 \times 10^{-6})(40) = 93.6 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$
$$= 93.6 \text{ MN/m}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

Obsérvese que la longitud L no interviene en la ecuación. Quiere esto decir que el esfuerzo es independiente de la longitud y sólo depende de las características físicas de la barra y de la variación de la temperatura, y no de sus características geométricas.

Caso b) Si el muro cede acercándose al otro, en la figura 2-13 se observa que la contracción térmica libre es igual a la suma de la deformación debida a la carga y del acercamiento de los muros. Es decir,

$$\delta_T = \delta_P + \text{acercamiento}$$

Sustituyendo los valores de las deformaciones resulta:

$$\alpha L(\Delta T) = \frac{\sigma L}{E} + \text{acercamiento}$$

o bien

$$(11.7 \times 10^{-6})(2.5)(40) = \frac{\sigma(2.5)}{200 \times 10^9} + (0.5 \times 10^{-3})$$

de donde

$$\sigma = 53.6 \text{ MN/m}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

Obsérvese que en este caso, al ceder ligeramente los muros en una cantidad fija, el esfuerzo se reduce considerablemente y la longitud de la barra ya no desaparece de la ecuación, como ocurría en el caso *a*).

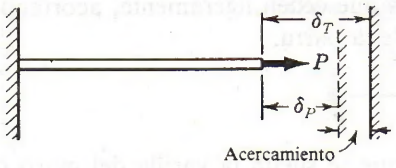


Figura 2-13. Muros no rígidos.

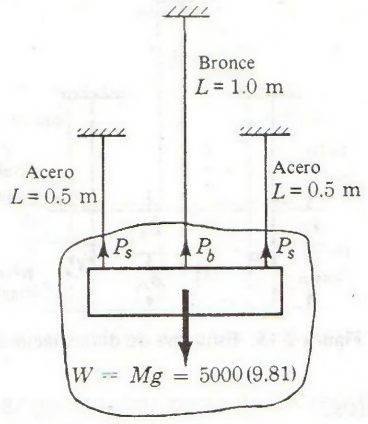


Figura 2-14. Diagrama de cuerpo libre.

259. Un bloque rígido que tiene una masa de 5 Mg pende de tres varillas simétricamente colocadas, como se indica en la figura 2-14. Antes de colgar el bloque, los extremos inferiores de las varillas estaban al mismo nivel. Determinar la tensión en cada varilla después de suspender el bloque y de una elevación de temperatura de 40°C. Emplear los datos de la tabla siguiente:

	CADA VARILLA DE ACERO	VARILLA DE BRONCE
Area (mm^2)	500	900
E (N/m^2)	200×10^9	83×10^9
α [$\mu m/(m \cdot °C)$]	11.7	18.9

Solución: La figura 2-15 muestra el nivel inicial de las varillas antes de suspender el bloque. Con las varillas completamente libres, una elevación de temperatura daría lugar a las deformaciones térmicas δ_{T_a} y δ_{T_b} en el acero y en el bronce, respectivamente. Finalmente, cuando las varillas están unidas al bloque, después de la elevación de temperatura, se llega a la posición final indicada en la figura. Pero para poder unir las varillas al bloque, habrá sido preciso estirarlas para alcanzar unas deformaciones δ_{P_a} y δ_{P_b} mediante la aplicación de unas fuerzas P_a y P_b, en el acero y en el bronce. El diagrama del cuerpo libre correspondiente al bloque, figura 2-14, representa los efectos en éste de las fuerzas iguales y de sentido contrario que las varillas ejercen sobre él.

Del esquema de deformaciones de la figura 2-15 se deduce la siguiente relación geométrica entre las deformaciones:

$$\delta_{T_a} + \delta_{P_a} = \delta_{T_b} + \delta_{P_b}$$

o sea

$$(\alpha L\, \Delta T)_s + \left(\frac{PL}{AE}\right)_s = (\alpha L\, \Delta T)_b + \left(\frac{PL}{AE}\right)_b$$

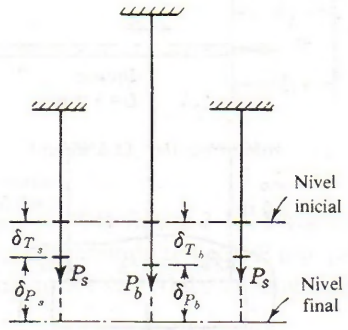


Figura 2-15. Esquema de deformaciones.

en donde, sustituyendo los datos,

$$(11.7 \times 10^{-6})(0.5)(40) + \frac{P_a(0.5)}{(500 \times 10^{-6})(200 \times 10^{9})} = (18.9 \times 10^{-6})(1)(40) + \frac{P_b(1)}{(900 \times 10^{-6})(83 \times 10^{9})}$$

y reduciendo los términos,

$$P_a - 2.68P_b = 104 \times 10^3 \text{ N} \qquad (a)$$

Del diagrama de cuerpo libre de la figura 2-14 se deduce otra relación entre P_a y P_b,

$$[\Sigma Y = 0] \qquad 2P_a + P_b = (5000)(9.81) = 49.05 \times 10^3 \text{ N} \qquad (b)$$

Resolviendo el sistema formado por (a) y (b) resulta:

$$P_a = 37.0 \text{ kN}$$
$$P_b = -25.0 \text{ kN}$$

El signo negativo de P_b indica que esta fuerza actúa en sentido contrario al supuesto, es decir, que la varilla de bronce está comprimida y, por tanto, se debe prevenir su posible pandeo o flexión lateral.

Los esfuerzos son:

$$\left[\sigma = \frac{P}{A}\right]$$

$$\sigma_a = \frac{37.0 \times 10^3}{500 \times 10^{-6}} = 74.0 \text{ MN/m}^2 \quad \text{(tensión)} \qquad \textbf{Resp.}$$

$$\sigma_b = \frac{25.0 \times 10^3}{900 \times 10^{-6}} = 27.8 \text{ MN/m}^2 \quad \text{(compresión)} \qquad \textbf{Resp.}$$

260. Con los mismos datos del problema 259 determinar la elevación de temperatura necesaria para que la carga aplicada sea soportada únicamente por las varillas de acero.

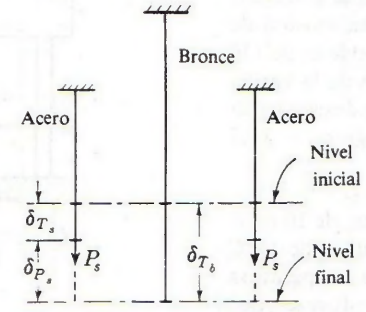


Figura 2-16. La varilla de bronce no ha de soportar carga alguna.

Solución: En lugar de intentar aprovechar parte de los resultados del ejemplo anterior conviene aplicar el procedimiento general con sus tres fases indicadas anteriormente. Imaginemos las varillas separadas del bloque y colgando libremente, tal como se señala en la figura 2-16. La elevación de temperatura determina las deformaciones térmicas d_{T_a} y δ_{T_b}.

Puesto que la varilla de bronce no ha de soportar parte alguna de la carga, la posición final de las varillas de acero ha de ser al mismo nivel al que ha quedado, sin esfuerzo alguno, la de bronce. Por tanto, las varillas de acero deberán experimentar una deformación δ_{P_a} producida por las tensiones P_a, cada una de las cuales debe ser de 24.53 kN, para que entre las dos, y por simetría, soporten los 49.1 kN del bloque.

En estas condiciones, la relación geométrica entre las deformaciones es

$$\delta_{T_b} = \delta_{T_a} + \delta_{P_a}$$

o bien

$$(\alpha L\,\Delta T)_b = (\alpha L\,\Delta T)_a + \left(\frac{PL}{AE}\right)_a$$

de donde

$$(18.9 \times 10^{-6})(1)(\Delta T) = (11.7 \times 10^{-6})(0.5)(\Delta T) + \frac{(24.53 \times 10^3)(0.5)}{(500 \times 10^{-6})(200 \times 10^9)}$$

$$\Delta T = 9.4°\text{C} \qquad \textbf{Resp.}$$

Es evidente que un incremento de temperatura mayor obligará al bronce, que se dilata más que el acero, a empujar al bloque rígido, originando así una compresión en la varilla. Esto confirma el resultado obtenido en la problema 259, con una elevación de temperatura de 40°C.

PROBLEMAS

261. Una varilla de acero de 150 mm^2 de sección está sujeta en sus extremos a dos puntos fijos, estando estirada con una fuerza total de 5000 N a 20°C. Calcular el esfuerzo en la varilla a −20°C. ¿A qué temperatura se anulará el esfuerzo? $\alpha = 11.7\ \mu\text{m/(m}\cdot°\text{C)}$ y $E = 200 \times 10^9$ N/m^2.

Resp. $\sigma = 127$ MN/m^2; $T = 34.2°$C

262. Una varilla de acero anclada entre dos muros rígidos queda sometida a una tensión de 5000 N a 20°C. Si el esfuerzo admisible es de 130 MN/m^2, hallar el diámetro mínimo de la varilla para que no se sobrepase aquél al descender la temperatura hasta $-20°C$. Suponga $\alpha = 11.7$ $\mu m/(m \cdot °C)$ y $E = 200$ GPa.

263. Los rieles de una vía férrea, de 10 m de longitud, se colocan a una temperatura de 15°C con una holgura de 3 mm. ¿A qué temperatura quedarán a tope? Calcular el esfuerzo que adquirirían a esta temperatura si no existiera la holgura señalada. $\alpha = 11.7$ $\mu m/(m \cdot °C)$ y $E = 200$ GPa.

264. Una llanta de acero de 10 mm de espesor y 75 mm de ancho se coloca sobre una rueda motriz de locomotora, de 1.8 m de diámetro, calentándola a 90°C, temperatura a la cual encaja perfectamente sobre la rueda, que está a 20°C. Determinar la presión de contacto entre ambas ruedas al descender la temperatura común a 20°C. Despreciar la deformación de la rueda producida por la presión de contacto. $\alpha = 11.7$ $\mu m/(m \cdot °C)$ y $E = 200 \times 10^9$ N/m^2.

265. Un aro de bronce de 20 mm de espesor cuyo diámetro interior es de 600 mm se coloca perfectamente ajustado sobre otro de acero de 15 mm de espesor, a una temperatura común de 130°C. El ancho, igual para los dos, es de 100 mm. Determinar la presión de contacto entre ambos aros cuando la temperatura descienda hasta 20°C. Despreciar el hecho de que el aro interior pueda abollarse por pandeo. $E_a = 200$ GPa y $\alpha = 11.7$ $\mu m/(m \cdot °C)$. $E_b = 83$ GPa y $\alpha = 19$ $\mu m/(m \cdot °C)$.

Resp. $p = 2.86$ MN/m^2

266. A una temperatura de 20°C se coloca una plancha rígida que tiene una masa de 55 Mg sobre dos varillas de bronce y una de acero, como se indica en la figura P-266. ¿A qué temperatura quedará descargada la varilla de acero? Datos: Acero: $A = 6000$ mm^2, $E = 200 \times 10^9$ N/m^2 y $\alpha = 11.7$ $\mu m/(m \cdot °C)$. Bronce (cada una): $A = 6000$ mm^2, $E = 83 \times 10^9$ N/m^2 y $\alpha = 19.0$ $\mu m/(m \cdot °C)$.

Resp. $T = 129°C$

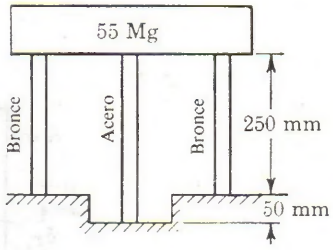


Figura P-266.

267. A una temperatura de 20°C hay un claro $\Delta = 0.2$ mm entre el extremo inferior de la barra de bronce y la losa rígida suspendida de las dos barras de acero, según se muestra en la figura P-267. Despreciando la masa de la losa, determine el esfuerzo en cada barra cuando la temperatura del conjunto se eleva a 100°C. Para la barra de bronce, $A = 600$ mm^2, $E = 83 \times 10^9$ N/m^2 y $\alpha = 18.9$ $\mu m/(m \cdot °C)$. Para cada barra de acero, $A = 400$ mm^2, $E = 200 \times 10^9$ N/m^2 y $\alpha = 11.7$ $\mu m/(m \cdot °C)$.

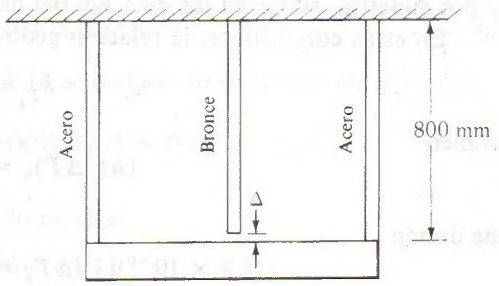


Figura P-267.

268. Un cilindro de aluminio y otro de bronce, perfectamente centrados, se aseguran entre dos placas rígidas que se pueden apretar mediante dos tornillos de acero, como se observa en la figura P-268. A 10°C no existen fuerzas axiales en conjunto del dispositivo. Determinar las tensiones en cada material a 90°C, con los siguientes datos:

Aluminio, $A = 1200$ mm^2, $E = 70 \times 10^9$ N/m^2, y $\alpha = 23$ $\mu m/(m \cdot °C)$.
Bronce, $A = 1800$ mm^2, $E = 83 \times 10^9$ N/m^2, y $\alpha = 19.0$ $\mu m/(m \cdot °C)$.
Cada tornillo, $A = 500$ mm^2, $E = 200 \times 10^9$ N/m^2, y $\alpha = 11.7$ $\mu m/(m \cdot °C)$.

Resp. $\sigma_a = 33.7$ MN/m^2

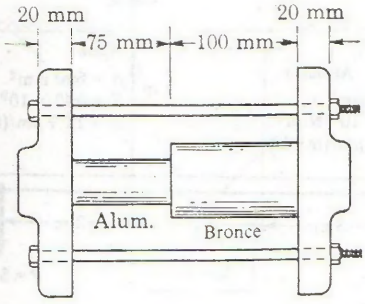


Figura P-268 y P-269.

269. Resuelva el problema anterior suponiendo que hay un claro de 0.05 mm entre el extremo derecho del cilindro de bronce y la placa rígida a 10°C.

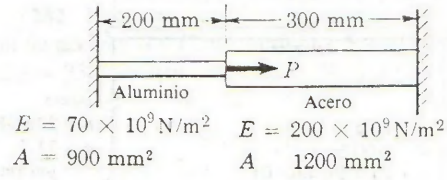
270. Un cilindro de acero está dentro de un manguito de bronce, ambos de la misma longitud, y los dos juntos soportan una fuerza vertical de compresión de 250 kN que se aplica por intermedio de una placa de apoyo horizontal. Determinar: (a) la variación de temperatura con la que el acero queda totalmente descargado, y (b) la que descarga por completo al bronce. Datos: Acero: $A = 7200\ \text{mm}^2$, $E = 200$ GPa, y $\alpha = 11.7\ \mu\text{m/(m} \cdot \text{°C)}$. Bronce: $A = 12 \times 10^3\ \text{mm}^2$, $E = 836\ P_a$, y $E = 83$ GPa, $\alpha = 19.0\ \mu\text{m/(m} \cdot \text{°C)}$.

271. Un manguito de bronce se monta sobre un tornillo de acero y se sujeta mediante una tuerca. Calcule el cambio de temperatura que causará que el esfuerzo en el bronce sea de 20 MPa. Para el tornillo de acero, $A = 450\ \text{mm}^2$, $E = 200$ GPa y $\alpha = 11.7\ \mu\text{m/(m} \cdot \text{°C)}$. Para el manguito de bronce, $A = 900\ \text{mm}^2$, $E = 83$ GPa y $\alpha = 19.0\ \mu\text{m/(m} \cdot \text{°C)}$.

272. En el caso del problema 271 suponga que la tuerca se aprieta para producir un esfuerzo inicial de $15 \times 10^6\ \text{N/m}^2$ en el manguito. Halle el esfuerzo en este último después de un aumento de temperatura de 70°C.

Resp. $38.2\ \text{MN/m}^2$

273. La barra compuesta de la figura P-273 está firmemente sujeta a soportes indeformables.



$E = 70 \times 10^9\ \text{N/m}^2$ $E = 200 \times 10^9\ \text{N/m}^2$
$A = 900\ \text{mm}^2$ $A = 1200\ \text{mm}^2$

Figura P-273 y P-274.

Se aplica una fuerza axial $P = 200$ kN a una temperatura de 20°C. Calcular los esfuerzos en cada material a la temperatura de 60°C. $\alpha = 11.7\ \mu\text{m/(m} \cdot \text{°C)}$ para el acero y $23.0\ \mu\text{m/(m} \cdot \text{°C)}$ para el aluminio.

274. En el problema anterior, ¿a qué temperatura alcanzará el esfuerzo en el aluminio y el acero el mismo valor numérico?

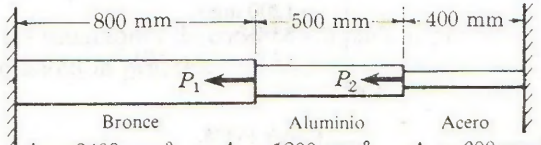
Resp. $\sigma_{Al} = 18.7\ \text{MN/m}^2$; $\sigma_a = 181\ \text{MN/m}^2$

275. Una varilla está formada por los tres segmentos que indica la figura P-275. Si las fuerzas axiales P_1 y P_2 son nulas, determinar los esfuerzos en cada material al descender la temperatura 30°C en los casos siguientes: (a) los soportes no se mueven en absoluto, y (b) los soportes ceden 0.300 mm. $\alpha = 18.9\ \mu\text{m/(m} \cdot \text{°C)}$ para el bronce, $23.0\ \mu\text{m/(m} \cdot \text{°C)}$ para el aluminio y $11.7\ \mu\text{m/(m} \cdot \text{°C)}$ para el acero.

Resp. (a) $\sigma_a = 118$ MPa;
(b) $\sigma_{Al} = 40.0$ MPa

276. Resolver el problema anterior si P_1 y P_2 son de 50 kN y los apoyos ceden 0.30 mm al descender la temperatura 50°C.

Resp. $A_s/A_a = 0.516$



$A = 2400\ \text{mm}^2$ $A = 1200\ \text{mm}^2$ $A = 600\ \text{mm}^2$
E 83 $E = 70$ $E = 200$
$\times 10^9\ \text{N/m}^2$ $\times 10^9\ \text{N/m}^2$ $\times 10^9\ \text{N/m}^2$

Figura P-275, P-276.

277. La barra rígida AB está articulada mediante un perno en O y conectada a dos varillas según se muestra en la figura P-277. Si la barra

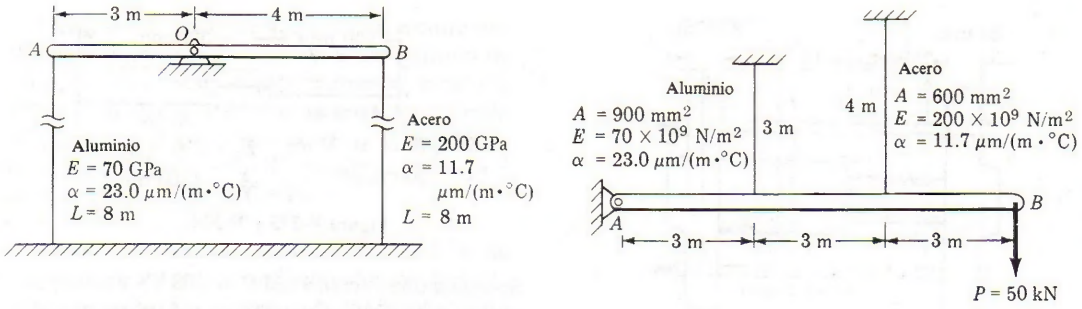


Figura P-277.

AB se mantiene en posición horizontal a determinada temperatura, calcule la relación de áreas de las varillas para que la barra AB se mantenga horizontal a cualquier temperatura. Desprecie la masa de la barra AB

Resp. $A_a/A_{Al} = 0.56$

278. Una barra rígida horizontal de masa despreciable está conectada a dos varillas según se muestra en la figura P-278. Si el sistema está originalmente libre de esfuerzos, determine el cambio de temperatura que causará un esfuerzo de tensión de 60 MPa en la varilla de acero.

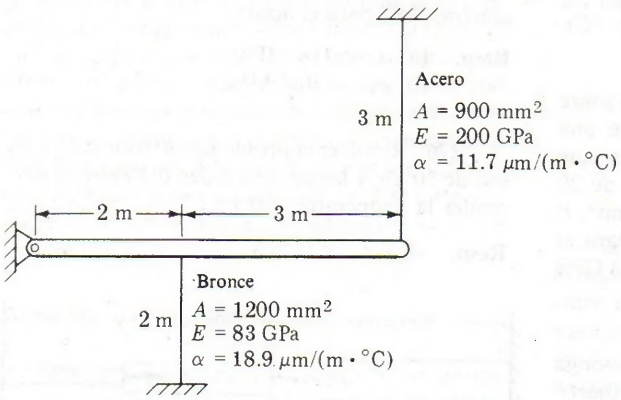


Figura P-278.

279. Para el conjunto mostrado en la figura P-279, determine el esfuerzo en cada una de las dos varillas verticales si la temperatura se eleva 40°C después que se aplica la carga $P = 50$ kN. Desprecie la deformación y la masa de la barra horizontal AB.

Resp. $\sigma_a = 134$ MPa (tensión); $\sigma_{Al} = 11.3$ MPa (compresión)

280. Los extremos inferiores de las tres varillas de acero de la figura P-280 están al mismo nivel antes de aplicar la fuerza de 600 kN. Las tres varillas tienen la misma sección, $A = 2000$ mm^2, $\alpha = 11.7$ μm/(m · °C), y $E = 200 \times 10^9$ N/m^2. Determinar la relación entre la fuerza en la varilla C y el cambio de temperatura ΔT medido en grados Celsius, despreciando la masa de la placa rígida.

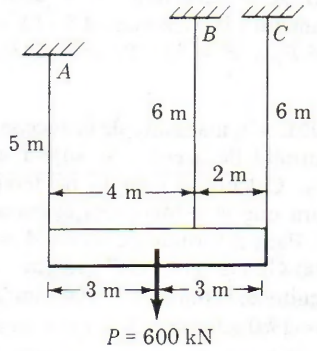


Figura P-280.

281. Como se observa en la figura P-281, cuatro barras de acero soportan una masa de 15 Mg. Cada barra tiene una sección de 600 mm^2. Determinar la fuerza de tensión en cada barra después de un incremento de temperatura de 50°C. $\alpha = 11.7$ μm/(m · °C) y $E = 200 \times 10^9$ N/m^2.

Resp. $P_A = P_D = 21.5$ kN;
$P_B = P_C = 67.3$ kN

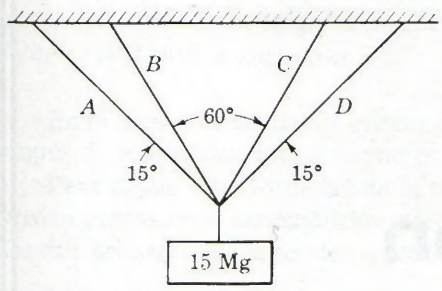


Figura P-281 y P-282.

282. Resolver el problema anterior si A y D son de acero y B y C, de aluminio. Para este metal $\alpha = 23.0\ \mu m/(m \cdot °C)$ y $E = 70 \times 10^9\ N/m^2$.

RESUMEN

Las fuerzas axiales producen una distribución uniforme de esfuerzo cuyo valor es:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1-1}$$

y dan lugar a unas deformaciones totales dadas por:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2-4}$$

Recuérdese que la expresión (2-4) sólo es válida si: 1) el material es homogéneo, 2) la sección, constante, 3) la fuerza, axial y 4) los esfuerzos, inferiores al límite de proporcionalidad.

Las fuerzas axiales producen deformaciones laterales que se determinan por la relación de Poisson. En los casos en que estas deformaciones laterales estén parcial o totalmente impedidas, se aplica la ley de Hooke para esfuerzos según dos o tres ejes perpendiculares.

Las estructuras estáticamente indeterminadas se resuelven aplicando las ecuaciones de equilibrio estático junto con ecuaciones adicionales entre las deformaciones, deducidas de consideraciones geométricas.

Los esfuerzos de origen térmico se calculan determinando las relaciones entre las deformaciones térmicas

$$\delta_T = \alpha L(\Delta T) \tag{2-14}$$

y las deformaciones elásticas que, junto con las ecuaciones de equilibrio estático, permiten resolver los distintos problemas que se presentan en la práctica.

3
torsión

3-1. INTRODUCCIÓN E HIPÓTESIS FUNDAMENTALES

En este capítulo se estudia el problema de la torsión y sus aplicaciones, pero sólo en el caso de árboles de sección circular, o de tubos de pared delgada. La torsión de árboles* de sección arbitraria es un problema complejo del que sólo se exponen las fórmulas de aplicación.

Con la torsión se inicia, por otra parte, el estudio de los problemas en los que el esfuerzo no se distribuye uniformemente dentro de una sección. Aunque la teoría general de este tipo de problemas es complicada, su aplicación es sencilla, y una vez deducidas las fórmulas, no hay más que sustituir en ellas los valores de los datos y nada más.

El procedimiento general que se sigue en todos los casos de distribución no uniforme de esfuerzos se puede resumir en los siguientes puntos:

1. Del examen de las deformaciones elásticas que produce un determinado tipo de carga, y la aplicación de la ley de Hooke, se determinan unas relaciones entre los esfuerzos en los distintos puntos de la sección, de manera que sean compatibles con las deformaciones. Tales relaciones se denominan *ecuaciones de compatibilidad*.

2. Aplicando las condiciones de equilibrio en el diagrama del cuerpo libre correspondiente a una porción del cuerpo, se obtienen otras relaciones entre los esfuerzos. Dichas relaciones, deducidas de la consideración del equilibrio entre las fuerzas exteriores aplicadas y las fuerzas resistentes interiores en una sección de exploración, se llaman *ecuaciones de equilibrio*.

---

* **N. del R.** Se conoce como *árbol* a todo elemento mecánico que tiene la forma de un sólido de revolución y que se utiliza para trasmitir par. El árbol de sección circular suele llamarse "eje" o "flecha" (en inglés, *shaft*).

3. Comprobación de que la solución del sistema de ecuaciones de los puntos 1 y 2 satisface las condiciones de carga en la superficie del cuerpo. Es decir, se han de *verificar las condiciones de frontera* impuestas.

En la teoría de elasticidad se demuestra que si existe *una* solución que satisface estos tres grupos de ecuaciones, esta solución es *única*.

Para deducir las fórmulas de la torsión se debe establecer una serie de hipótesis que pueden demostrarse matemáticamente y algunas de ellas, comprobarse experimentalmente. Las dos primeras corresponden a secciones circulares.

1. Las secciones circulares permanecen circulares después de la torsión.

2. Las secciones planas permanecen planas y no se alabean después de la torsión.

3. La proyección sobre una sección transversal de una línea radial de una sección permanece radial después de la torsión.

4. El árbol está sometido a la acción de pares torsores o torsionantes que actúan en planos perpendiculares a su eje.

5. Los esfuerzos no sobrepasan el límite de proporcionalidad.

3-2. DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS DE TORSIÓN

En la figura 3-1 se muestran dos proyecciones de un árbol circular macizo. Al aplicar un momento torsionante T a los extremos del árbol, una generatriz cualquiera, tal como AB, en

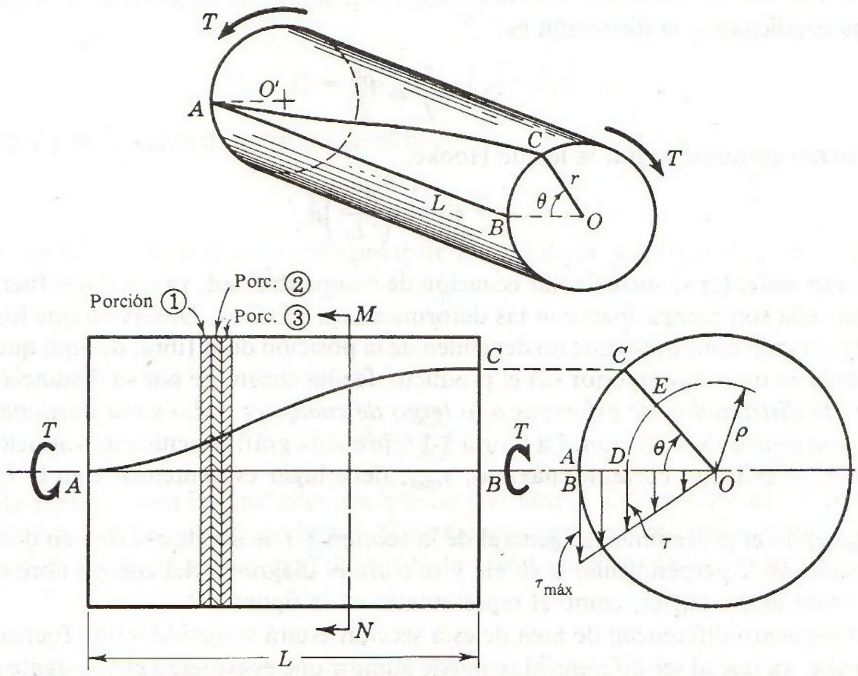


Figura 3-1. Deformación de un árbol circular.

la superficie del cilindro, inicialmente recta y paralela al eje, se tuerce formando una hélice AC, al tiempo que la sección en B gira un cierto ángulo θ respecto de la sección en A. Se puede adquirir una representación intuitiva de cómo se forma esta hélice de la manera siguiente:

Imaginemos que el árbol está formado por innumerables «rebanadas» o porciones elíscoidales muy delgadas, todas ellas perfectamente rígidas y unidas mediante fibras elásticas. La ② sufrirá una rotación, resbalando sobre la ① hasta que la fibras elásticas que las unen se deformen y produzcan, al estirarse, un par resistente que equilibre al par aplicado. En este momento, las "rebanadas" o porciones discoidales ① y ② actuarán como un conjunto único y rígido, trasmitiendo el par torsionante a la ③; esta girará hasta que las fibras elásticas que la unen a ② desarrollen como antes un par resistente igual al par aplicado, y así sucesivamente, propagándose la deformación a lo largo de la longitud L del árbol. La hélice AC es la línea que une los puntos iniciales de referencia de todas las rebanadas infinitamente delgadas, puntos que antes de la deformación estaban sobre AB. Esta descripción intuitiva de la deformación por torsión en un árbol es puramente ideal, pero la hélice que resulta está perfectamente definida. En realidad, todas las rebanadas empiezan a girar al mismo tiempo sobre las anteriores, tan pronto como se aplica el momento torsionante, y el ángulo total de torsión θ de uno a otro extremo aumenta si el momento de torsión se incrementa.

Consideremos ahora una fibra cualquiera a una distancia ρ del eje del árbol. Por la hipótesis 3 de la sección 3-1, el radio de dicha fibra gira también el mismo ángulo θ, produciéndose una deformación tangencial δ_s igual a DE. La longitud de esta deformación es el arco de círculo de radio ρ y ángulo θ y viene dada por:

$$\delta_s = DE = \rho\theta \tag{a}$$

En estas condiciones, la distorsión es:

$$\gamma = \frac{\delta_s}{L} = \frac{\rho\theta}{L} \tag{b}$$

y el esfuerzo cortante, según la ley de Hooke,

$$\tau = G\gamma = \left(\frac{G\theta}{L}\right)\rho \tag{c}$$

La expresión (*c*) se suele llamar ecuación de compatibilidad, ya que los esfuerzos expresados por ella son compatibles con las deformaciones elásticas. Obsérvese que los términos de paréntesis son constantes que no dependen de la posición de la fibra; de aquí que el esfuerzo cortante en un punto interior sea el producto de una constante por su distancia al centro, es decir, *la distribución de esfuerzos a lo largo de cualquier radio varía linealmente con la distancia al centro de la sección*. La figura 3-1 representa gráficamente esta variación a lo largo de OB; el esfuerzo cortante máximo, $\tau_{máx}$, tiene lugar evidentemente en la fibras exteriores.

Siguiendo el procedimiento general de la sección 3-1 se divide el árbol en dos mediante una sección M-N perpendicular a su eje y se traza el diagrama del cuerpo libre correspondiente a una de las partes, como el representado en la figura 3-2.

Un elemento diferencial de área de esta sección estará sometido a una fuerza resistente $dP = \tau\, dA$, ya que al ser diferencial se puede admitir que el esfuerzo es constante dentro del elemento. Como la misión de estas fuerzas resistentes, que representan la acción sobre esta

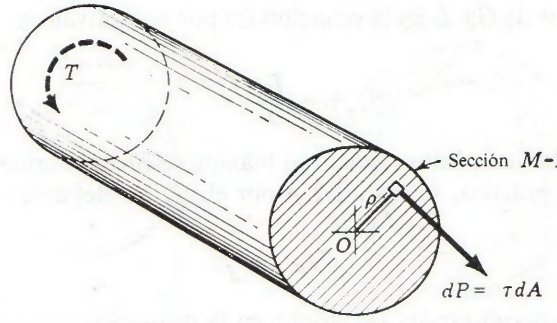


Figura 3-2. Diagrama del cuerpo libre de la figura 3-1.

sección de la parte suprimida del sólido, es oponerse al momento torsionante aplicado T, han de tener la dirección perpendicular al radio para producir el máximo efecto. En una sección circular esto es matemáticamente cierto, pero difícil de demostrar aquí; baste con decir, aunque se considere como axioma, que, como consecuencia del principio de conservación de la energía, las fuerzas resistentes se distribuyen siempre de manera que sean lo más eficaces posibles y que, por tanto, dP ha de ser perpendicular a ρ de forma que produzca la máxima resistencia a la torsión.

Para que se cumplan las condiciones de equilibrio estático, apliquemos la condición $\Sigma M = 0$, es decir, que el par torsor resistente ha de ser igual al momento torsionante aplicado. El par resistente T_r es la suma de los momentos respecto al centro de todas las fuerzas diferenciales dP:

$$T = T_r = \int \rho \, dP = \int \rho(\tau \, dA)$$

Sustituyendo τ por su valor dado en (c) resulta:

$$T = \frac{G\theta}{L} \int \rho^2 \, dA$$

Ahora bien, $\int \rho^2 dA = J$, es el momento polar de inercia de la sección recta, con lo que:

$$T = \frac{G\theta}{L} J$$

que también se suele escribir en la forma:*

$$\theta = \frac{TL}{JG} \tag{3-1}$$

A fin de expresar θ en las unidades apropiadas (radianes), T debe estar en N · m y L en m; J por supuesto está en m^4 y G, en N/m^2. Si deseamos expresar θ en grados, multiplicamos el segundo miembro de la ecuación (3-1) por la fracción unitaria, 180 grad/π rad = 57.3 grad/rad.

* Obsérvese la semejanza de la ecuación (3-1) con la ecuación de la deformación lineal $\delta = PL/AE$, analogía que hace recordar más fácilmente estas expresiones.

Sustituyendo el valor de $G\theta/L$ en la ecuación (*c*) por su equivalente T/J dado por (3-1) se obtiene:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{3-2}$$

que es la fórmula de la torsión. Para calcular el máximo esfuerzo cortante, que es la expresión más utilizada en la práctica, se sustituye ρ por el radio r del árbol, es decir:

$$\tau_{máx} = \frac{Tr}{J} \tag{3-2a}$$

obsérvese que al haber aplicado la ley de Hooke en la deducción de estas fórmulas, los esfuerzos no deben sobrepasar el límite de proporcionalidad*. Además, conviene insistir en que estas expresiones sólo son válidas en el caso de secciones circulares, llenas o huecas†.

En la figura 3-3 se muestran los valores del momento polar de inercia para secciones circulares. Sustituyendo estos valores en la fórmula de la torsión, ésta adquiere las siguientes formas:

Eje macizo: $$\tau_{máx} = \frac{2T}{\pi r^3} = \frac{16T}{\pi d^3} \tag{3-2b}$$

Eje hueco: $$\tau_{máx} = \frac{2TR}{\pi(R^4 - r^4)} = \frac{16TD}{\pi(D^4 - d^4)} \tag{3-2c}$$

En muchas aplicaciones prácticas, los árboles se utilizan para trasmitir potencia. Del estudio de la dinámica se sabe que la potencia $\mathcal{P}$ transmitida por un par constante T que gira a velocidad angular constante ω está dada por

$$\mathcal{P} = T\omega$$

donde ω está medida en radianes por unidad de tiempo. Si el árbol gira a una frecuencia de f revoluciones por unidad de tiempo, $\omega = 2\pi f$, y se tiene

$$\mathcal{P} = T2\pi f$$

Así, el momento torsionante trasmitido puede expresarse como

$$T = \frac{\mathcal{P}}{2\pi f} \tag{3-3}$$

---

* La expresión (3-2a) también se emplea para determinar el esfuerzo de ruptura por cortante. Aunque en el instante de la ruptura de un árbol se habrá excedido el límite de proporcionalidad, el esfuerzo cortante obtenido aplicando está fórmula, que suele llamarse *módulo de ruptura a torsión*, sirve para comparar los esfuerzos últimos o de ruptura de muestras de distintos materiales y diámetros.

†Una fórmula suficientemente aproximada para determinar el esfuerzo cortante máximo en una barra de sección rectangular es

$$\tau = \frac{T}{ab^2}\left(3 + 1.8\frac{b}{a}\right)$$

en donde a es el lado mayor y b, el lado menor del rectángulo.

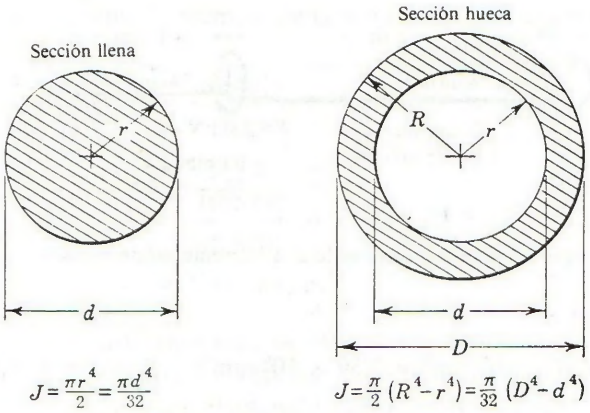


Figura 3-3. Momentos polares de inercia.

Con $\mathcal{P}$ medida en watts (1 W = 1 N · m/s) y f en revoluciones por segundo (r/s), la ecuación anterior determinará el momento torsionante en newton-metros. Puede usarse este valor de T en la ecuación (3-2) para obtener el esfuerzo cortante máximo y en la ecuación (3-1) para determinar el ángulo de giro.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

301. Un árbol macizo de un tren de laminación tiene que trasmitir una potencia de 20 kW a 2 r/s. Determinar su diámetro de manera que el esfuerzo cortante máximo no exceda de 40 MN/m^2 y que el ángulo de torsión, en una longitud de 3 m, sea como máximo de 6°. Emplee un valor de G de 83 GN/m^2.

Solución: Este problema es un ejemplo de diseño de un elemento de máquina en el que se ha de tener en cuenta tanto la resistencia como la rigidez. Se comienza por determinar, según (3-3), el momento torsionante a que está sometido el árbol.

$$\left[T = \frac{\mathcal{P}}{2\pi f} \right] \qquad T = \frac{20 \times 10^3}{2\pi(2)} = 1590 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Para satisfacer la condición de resistencia se aplica (3-2b) que da el esfuerzo cortante máximo,

$$\left[\tau = \frac{16T}{\pi d^3} \right] \qquad 40 \times 10^6 = \frac{16(1590)}{\pi d^3}$$

de donde $d^3 = 202 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 202 \times 10^3 \text{ mm}^3$ y $d = 58.7$ mm

Ahora, de la expresión del ángulo de torsión (3-1), se deduce el diámetro necesario que satisface la condición de rigidez,

$$\theta = \frac{TL}{JG} \times 57.3 \text{ o bien, } J = \frac{TL}{\theta G} \times 57.3$$

de donde

$$\frac{\pi d^4}{32} = \frac{1590(3)(57.3)}{(6)(83 \times 10^9)}$$

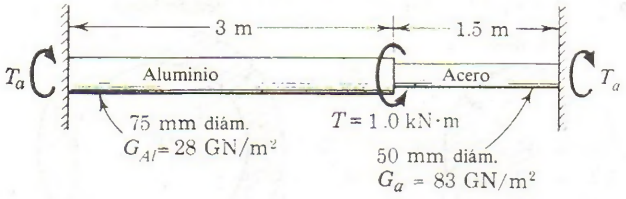


Figura 3-4. Árbol compuesto estáticamente indeterminado.

Por tanto:

$$d^4 = 5.59 \times 10^{-6}\ \text{m}^4 = 5.59 \times 10^6\ \text{mm}^4 \qquad \text{y} \qquad d = 48.6\ \text{mm}$$

El diámetro mayor de 58.7 mm satisface, pues, a las dos condiciones de resistencia y de rigidez.

302. La figura 3-4 muestra un árbol macizo de dos materiales y diámetros distintos, firmemente unidos y perfectamente empotrado en sus extremos. La parte de aluminio tiene 75 mm de diámetro y G_{Al} vale 28×10^9 N/m² y la de acero tiene 50 mm de diámetro y $G_a = 83 \times 10^9$ N/m². El par torsor aplicado es de 1000 N · m, y como se observa en la figura, se aplica en la unión de las dos partes. Calcular el máximo esfuerzo cortante en el acero y en el aluminio.

Solución: Se trata de un problema estáticamente indeterminado en el que se desconoce en qué proporción se reparte el par torsor aplicado entre las dos partes, derecha e izquierda, del árbol. El procedimiento a emplear es exactamente el mismo que el seguido en la sección 2-5 para elementos estáticamente indeterminados en el caso de fuerzas axiales. Aplicando en primer lugar las condiciones de equilibrio estático se tiene:

$$[\Sigma M = 0] \qquad T_a + T_{Al} = T = 1000 \qquad (a)$$

La otra relación entre T_a y T_{Al} se obtiene por las condiciones geométricas de la deformación que, en este caso, se expresa por la igualdad del ángulo de torsión desde la sección en que se aplica el par torsor, a los dos extremos del eje. Es decir $\theta_{ac} = \theta_{al}$. Por consiguiente, según (3-1),

$$\left[\left(\frac{TL}{JG}\right)_a = \left(\frac{TL}{JG}\right)_{Al}\right] \qquad \frac{T_a(1.5)}{\frac{\pi(0.050)^4}{32}(83 \times 10^9)} = \frac{T_{Al}(3)}{\frac{\pi(0.075)^4}{32}(28 \times 10^9)}$$

de donde

$$T_a = 1.17 T_{Al} \qquad (b)$$

Resolviendo el sistema formado por (*a*) y (*b*) resulta:

$$T_{Al} = 461\ \text{N·m} \qquad \text{y} \qquad T_a = 539\ \text{N·m}$$

Teniendo ahora en cuenta la fórmula de la torsión, los esfuerzos respectivos vienen dados por:

$$\left[\tau = \frac{16T}{\pi d^3}\right]$$

$$T_{AI} = \frac{16(461)}{\pi(0.075)^3} = 5.57 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$= 5.57 \text{ MN/m}^2$$

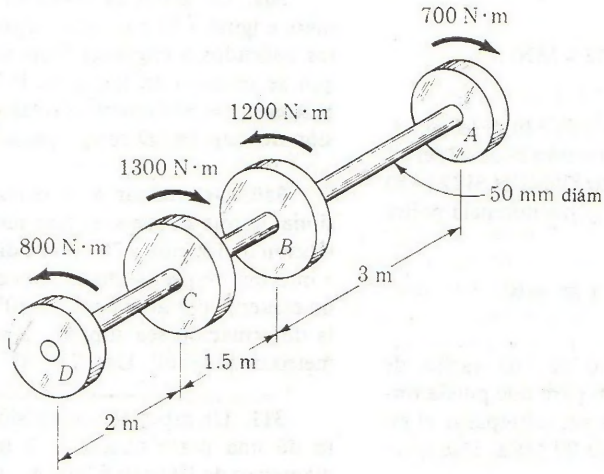
$$\tau_a = \frac{16(539)}{\pi(0.050)^3} = 22.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$= 22.0 \text{ MN/m}^2$$

303. Un árbol de sección constante, de 50 mm de diámetro está sometido a los pares torsores que se indican en la figura 3-5 a través de engranes montados sobre él. Si $G = 83 \times 10^3$ MN/m^2, determinar, en grados, el ángulo total de torsión entre A y D. (Material: acero.)

Solución: El empleo de vectores para indicar el sentido de los pares aplicados, como se ve en la parte inferior de la figura 3-5, facilita la determinación del momento torsionante resultante sobre cada parte del árbol. Para ello, apliquemos las condiciones de equilibrio al diagrama de cuerpo libre entre una sección cualquiera y un extremo del eje, por ejemplo, D. Entonces, con respecto a D, los pares trasmitidos por cada porción y, por tanto, los momentos torsionantes a que están sometidos, son: $T_{AB} = 700$ N · m en sentido del reloj, $T_{BC} = 500$ N · m en sentido contrario al del reloj y $T_{CD} = 800$ N · m en sentido del reloj.

El ángulo de torsión total es la suma algebraica de los ángulos parciales en cada porción.



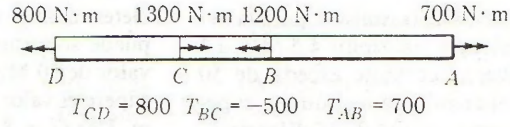


Figura 3-5. Deformaciones angulares por torsión.

Tomando arbitrariamente la deformación en sentido del reloj como positiva, y aplicando la expresión (3-1) con el factor 57.3 para obtener el ángulo en grados, se obtiene:

$$\left[\theta_{A/D} = \Sigma \frac{TL}{JG}\right]$$

$$\theta_{A/D} = \frac{1}{JG}\Sigma TL \times 57.3$$

$$= \frac{57.3}{\frac{\pi(0.050)^4}{32}(83 \times 10^9)}[700(3) - 500(1.5) + 800(2)]$$

Lo cual da

$$\theta_{A/D} = 3.32° \qquad \textbf{Resp.}$$

El signo positivo indica que el ángulo de torsión de A respecto a D es en sentido del reloj.

PROBLEMAS

304. Calcular el mínimo diámetro de un árbol de acero que, sometido a un momento torsionante de 14 kN · m, no debe experimentar una deformación angular superior a 3° en una longitud de 6 m. ¿Cuál es entonces el esfuerzo cortante máximo que aparecerá en él? Use $G = 83$ GN/m^2.

Resp. $d = 118$ mm; $\tau = 43.4$ MN/m^2

305. En un árbol macizo de 5 m de longitud, en el que el ángulo total de torsión es de 4°, el esfuerzo cortante máximo es de 60 MPa. Si $G = 83$ GPa, calcular su diámetro. ¿Qué potencia podrá transmitir a 20 r/s?

Resp. $d = 104$ mm; $\mathcal{P} = 1.67$ MW

306. Hallar la longitud de una varilla de bronce de 2 mm de diámetro para que pueda torcerse dos vueltas completas sin sobrepasar el esfuerzo cortante admisible de 70 MPa. Use $G = 35$ GPa.

307. Un gran árbol de trasmisión para la hélice de un barco tiene que transmitir 4.5 MW a 3 r/s sin que el esfuerzo cortante exceda de 50 MN/m^2 y sin que el ángulo de torsión sea superior a un grado en una longitud de 25 diámetros. Determinar el diámetro más apropiado si $G = 83$ GN/m^2.

308. Demostrar que un árbol hueco de sección, circular, cuyo diámetro interior sea la mitad del exterior, tiene una resistencia a la torsión que es igual a $\frac{15}{16}$ de la que tiene un árbol macizo del mismo diámetro exterior.

309. Un árbol de acero de diámetro constante e igual a 60 mm está cargado mediante pares aplicados a engranes montados sobre él, según se muestra en la figura P-309. Usando un módulo $G = 83$ GN/m^2, calcule el ángulo de torsión del engrane D con respecto al A.

310. Determinar el máximo momento torsionante que puede soportar un árbol hueco de sección de 100 mm y 70 mm de diámetros exterior e interior, respectivamente, sin que se sobrepase un esfuerzo cortante de 60×10^6 N/m^2 y sin que la deformación sea superior a medio grado por metro de longitud. Use $G = 83 \times 10^9$ N/m^2.

311. Un árbol de transmisión de acero consta de una parte hueca de 2 m de longitud y diámetros de 100 mm y 70 mm, y otra parte maciza de 70 mm de diámetro y 1.5 m de longitud. Determinar el máximo momento torsionante que puede soportar sin que el esfuerzo sobrepase el valor de 70 MN/m^2, ni el ángulo total de torsión supere el valor de 2.5° en la longitud total de 3.5 m. Use $G = 83$ GN/m^2.

Resp. $T = 4.01$ kN · m

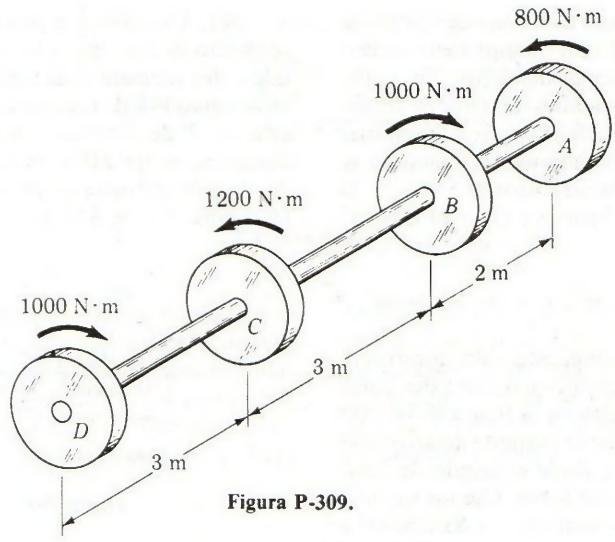


Figura P-309.

312. Una trasmisión flexible consta de un alambre de acero de 5 mm de diámetro encerrado en un tubo guía en el que encaja tan ajustado que se produce un par torsor resistente por fricción de 2 N · m/m. Determinar la máxima longitud que puede tener si el esfuerzo cortante no debe exceder de 140 MPa. ¿Cuál será el ángulo total de torsión? Use $G = 83$ GPa.

Resp. $L = 1.72$ m; $\theta = 33.3°$

313. El árbol de la figura P-313 gira a 3 r/s absorbiendo 30 kW en A y 15 kW en B de los 45 kW aplicados en C. Si $G = 83 \times 10^9$ N/m^2, calcular el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión de la rueda A respecto de la rueda C. (Material acero.)

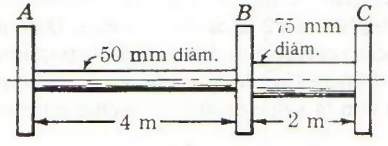


Figura P-313.

Resp. $\tau_{máx} = 64.9$ MN/m^2; $\theta = 8.23°$

314. Un árbol de acero se encuentra cargado según se muestra en la figura P-314. Usando un módulo $G = 83$ GN/m^2, calcule el diámetro requerido del árbol si el esfuerzo cortante está limitado a 60 MN/m^2 y el ángulo de rotación en el extremo libre no debe exceder de 4°.

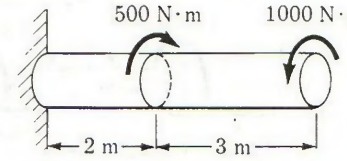


Figura P-314.

315. A un eje de sección constante y 5 m de longitud que gira a 2 r/s se le aplican 70 kW a través de un engrane situado a 2 m del extremo izquierdo, en donde se absorben 20 kW. En el extremo derecho se utilizan 30 kW y a 1.5 m de éste, los otros 20 kW. (a) Dimensionar el árbol si el esfuerzo cortante no ha de exceder de 60 MN/m^2. (b) Si el eje tiene un diámetro de 100 mm, determinar el ángulo total de torsión de un extremo al otro. Use $G = 83$ GN/m^2.

Resp. $d = 69.6$ mm; $\theta = 0.448°$

316. Un eje de acero de 3 m de longitud tiene un diámetro que varía uniformemente desde 60 mm en un extremo hasta 30 mm en el otro. Suponiendo que es válida la ecuación (3-1) en cada elemento diferencial de longitud sin error apreciable, determinar el ángulo total de torsión si trasmite un par torsor de 170 N · m. Use $G = 83 \times 10^3$ MN/m^2.

Resp. $\theta = 1.29°$

317. Un árbol hueco de bronce de 75 mm de diámetro exterior y 50 mm interior tiene dentro un eje de acero de 50 mm de diámetro y de la misma longitud, estando ambos materiales firmemente unidos en los extremos del eje. Determinar el máximo esfuerzo en cada material cuando se somete el conjunto a un par torsor de 3 kN · m. G = 35 GN/m^2 para el bronce y G = 83 GN/m^2 para el acero.

Resp. τ_b = 28.5 MN/m^2; τ_a = 45.1 MN/m^2

318. Un árbol compuesto está construido con tres materiales diferentes y sujeto a dos pares aplicados según se ilustra en la figura P-318. (a) Calcule el máximo esfuerzo cortante desarrollado en cada material. (b) Calcule el ángulo de rotación del extremo libre del árbol. Use los siguientes valores: G_{al} = 28 GN/m^2, G_{ac} = 83 GN/m^2 y G_b = 35 GN/m^2.

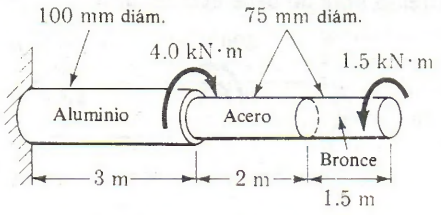


Figura P-318.

319. En el árbol de la figura P-319, firmemente empotrado en sus extremos, la porción AB tiene 75 mm de diámetro y es de bronce, con $\tau \leq$ 60 MN/m^2 y G = 35 GN/m^2. La porción BC es de acero, de 50 mm de diámetro, $\tau \leq$ 80 MN/m^2 y G = 83 GN/m^2. Si a = 2 m y b = 1.5 m, determinar el par torsor máximo T que puede aplicarse en el punto B de unión de las dos partes.

320. En el problema anterior determinar la relación de longitudes b/a que debe existir para que el acero y el bronce trabajen al máximo esfuerzo posible. ¿Qué par torsor T es necesario para ello?

b/a = 1.19; T = 6.93 kN · m

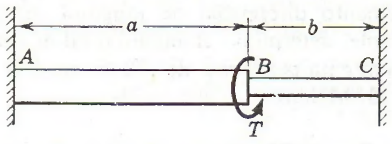


Figura P-319 y P-320.

321. Un árbol compuesto, que consta de un segmento de aluminio y uno de acero, está sometido a dos momentos de torsión como se muestra en la figura P-321. Calcule el máximo valor admisible de T de acuerdo con las siguientes condiciones: $\tau_{ac} \leq$ 100 MPa, $\tau_{al} \leq$ 70 MPa, y el ángulo de rotación del extremo libre, limitado a 12°. Use los valores G_{ac} = 83 GPa y G_{al} = 28 GPa.

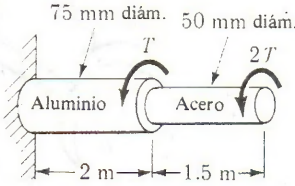


Figura P-321.

322. Un par torsor T se aplica, como indica la figura P-322, a un árbol macizo con extremos empotrados. Demostrar que los momentos torsionantes en los empotramientos son $T_1 = Tb/L$ y $T_2 = Ta/L$ ¿Variarían estos valores si el árbol fuera hueco?

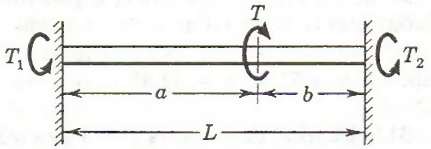


Figura P-322.

323. Un árbol de 100 mm de diámetro y 3 m de longitud, con los extremos empotrados, se somete a un par torsor de 4 kN · m aplicado a 1 m del extremo izquierdo y a otro del mismo sentido de 16 kN · m a 2 m de ese extremo. Determinar el esfuerzo cortante máximo en cada porción del árbol. *Indicación*: Aplicar el método de superposición con la solución del problema anterior.

324. Un árbol se compone de tres porciones AC, CD y DB soldadas entre sí y el conjunto firmemente empotrado en sus extremos y cargado como indica la figura P-324. Para el acero G = 83 GN/m^2; para el aluminio G = 28 GN/m^2; y para el bronce G = 35 GN/m^2. Determinar la tensión cortante máxima en cada material.

Resp. T_B = 472 N · m; τ_{al} = 9.3 MN/m^2

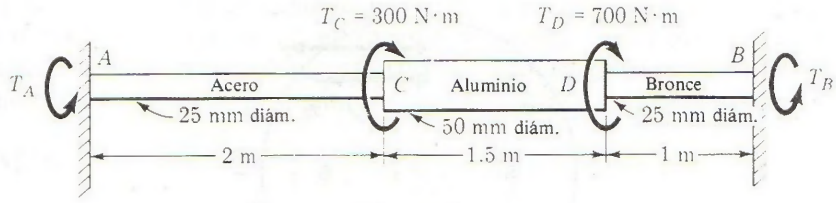


Figura P-324.

325. Los dos árboles de acero mostrados en la figura P-325, cada uno con un extremo empotrado en un apoyo rígido, tienen sendas bridas rígidamente sujetas a sus extremos libres. Los ejes están atornillados uno al otro en sus bridas. Sin embargo, existe una desalineación de 6° en la localización de los barrenos de los tornillos, según se ilustra en la figura. Calcule el máximo esfuerzo cortante en cada árbol una vez que los ejes se hayan atornillado uno al otro. Use un valor de $G = 83$ GN/m^2 y desprecie la deformación de tornillos y bridas.

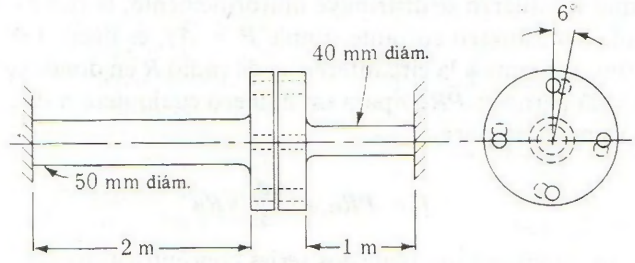


Figura P-325.

3-3. ACOPLAMIENTOS POR MEDIO DE BRIDAS

Una conexión o acoplamiento rígido muy empleado entre dos árboles es el que se representa en la figura 3-6, y que consiste en unas bridas o discos que forman cuerpo con cada árbol, y que se unen entre sí mediante pernos o tornillos. El par torsor se trasmite por la resistencia al esfuerzo cortante de los pernos.

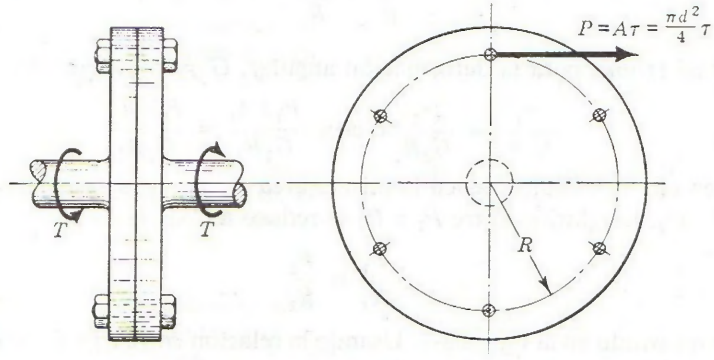


Figura 3-6. Acoplamiento por medio de bridas.

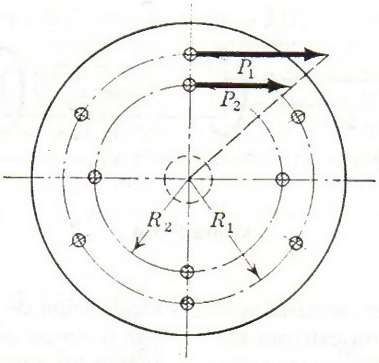


Figura 3-7. Acoplamiento por bridas con dos series concéntricas de pernos.

Suponiendo que el esfuerzo se distribuye uniformemente, la fuerza en cada perno viene dada por la fórmula del esfuerzo cortante simple $P = A\tau$, es decir, $(\pi d^2/4)\tau$, y actúa en el centro de cada perno, tangente a la circunferencia de radio R en donde se sitúan éstos. El par torsor que resiste cada perno es PR, y para un número cualquiera n de pernos, la capacidad del acoplamiento viene dada por

$$T = PRn = \frac{\pi d^2}{4}\tau Rn \tag{3-4}$$

En ocasiones, un acoplamiento tiene dos series concéntricas de pernos, como se observa en la figura 3-7. Llamando P_1 y P_2 a las fuerzas cortantes que soportan cada perno en los círculos exterior e interior, la resistencia del acoplamiento es:

$$T = P_1R_1n_1 + P_2R_2n_2 \tag{3-5}$$

La relación entre P_1 y P_2 puede determinarse del hecho que las bridas, de rigidez relativamente grande, causan deformaciones angulares en los pernos, que son proporcionales a sus distancias al eje del árbol. Así, las deformaciones angulares están relacionadas por

$$\frac{\gamma_1}{R_1} = \frac{\gamma_2}{R_2} \tag{a}$$

Usando la ley de Hooke para la deformación angular, $G = \tau/\gamma$, tenemos

$$\frac{\tau_1}{G_1R_1} = \frac{\tau_2}{G_2R_2} \text{ o bien, } \frac{P_1/A_1}{G_1R_1} = \frac{P_2/A_2}{G_2R_2} \tag{b}$$

Si los pernos en ambos círculos tienen la misma área $A_1 = A_2$, y si además son del mismo material, $G_1 = G_2$, la relación entre P_1 y P_2 se reduce a

$$\frac{P_1}{R_1} = \frac{P_2}{R_2} \tag{3-6}$$

Este es el caso mostrado en la figura 3-7. Usando la relación entre P_1 y P_2, ecuación (3-5), determinar la capacidad torsional del acoplamiento.

Para tres o más círculos concéntricos de pernos se puede aplicar el mismo procedimiento. Como se verá en el Capítulo 12, esta forma de trabajar de los pernos, pasadores o remaches también ocurre en las uniones de placas cuando, cargadas excéntricamente, se produce un momento en el plano de la unión.

PROBLEMAS

326. Un acoplamiento por medio de bridas tiene 8 pernos de 20 mm de diámetro, equidistantemente espaciados en un círculo de 300 mm de diámetro. Determinar el par torsor que puede trasmitir si el esfuerzo cortante admisible en los pernos es de 40 MN/m^2.

Resp. $T = 15.1$ kN · m

327. Un acoplamiento por medio de bridas conecta un árbol de 90 mm de diámetro y otro hueco de diámetros exterior e interior de 100 y 90 mm, respectivamente. Si el esfuerzo cortante admisible es de 60 MN/m^2, determinar el número de pernos de 10 mm que se necesitarían, dispuestos en una circunferencia de 200 mm de diámetro, para que el acoplamiento sea igualmente resistente que el más débil de los árboles.

328. Un acoplamiento por medio de bridas tiene 6 pernos de 10 mm situados en una circunferencia de 300 mm de diámetro y cuatro pernos del mismo diámetro, en otro círculo concéntrico de 200 mm de diámetro, como se indica en la figura 3-7. ¿Qué par torsor puede trasmitir sin que el esfuerzo cortante exceda de 60 MPa en los pernos?

Resp. $T = 5.50$ kN · m

329. Determinar el número de pernos de acero de 10 mm de diámetro que se necesitarían en el círculo exterior del problema anterior para poder trasmitir un par torsor de 8 kN · m.

Resp. 10 pernos

330. Resolver el problema 328 si en el círculo interior los pernos son de 20 mm de diámetro.

331. En un conjunto de remaches sometidos a la acción de un par torsor, demostrar que se puede aplicar la fórmula de la torsión $\tau = T\rho/J$ para determinar el esfuerzo cortante en el centro de un remache, siendo $J = \Sigma A\rho^2$, donde A es el área de la sección recta de un remache situado a una distancia ρ del centroide del conjunto de remaches.

332. Una placa se sujeta a un elemento fijo y rígido mediante cuatro remaches de 20 mm de diámetro, como se indica en la figura P-332. Determinar el máximo y mínimo esfuerzos cortantes que aparecen en los remaches.

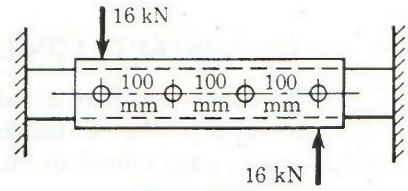


Figura P-332.

333. Seis remaches de 20 mm de diámetro sujetan la placa de la figura P-333 a una base rígida. Determinar el esfuerzo cortante medio en cada remache producido por las fuerzas de 40 kN aplicados como se indica. ¿Qué fuerzas adicionales P podrían aplicarse sin que el esfuerzo cortante sobrepase el valor de 60 MN/m^2 en remache alguno?

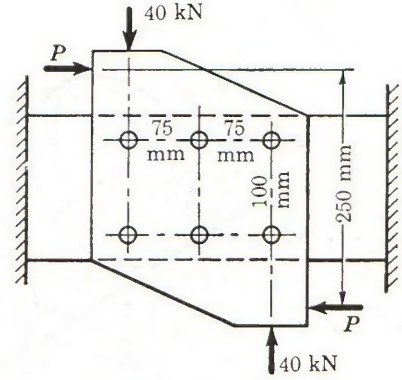


Figura P-333.

Resp. $\tau_{máx} = 45.9$ MN/m^2; $P = 55.4$ kN

334. La placa de la figura P-334 se sujeta a una base rígida mediante 3 remaches de 10 mm. Determinar el valor de las fuerzas P de manera que en ninguno de los remaches se sobrepase el esfuerzo cortante admisible de 70 MPa.

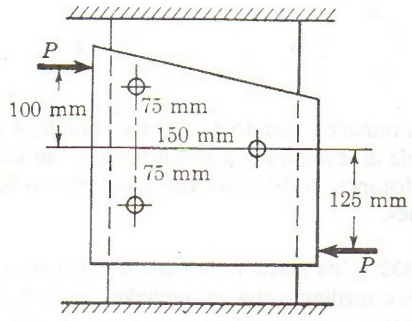


Figura P-334.

Resp. $P = 7.12$ kN

335. Un acoplamiento por medio de bridas tiene seis pernos de acero de 10 mm de diámetro, espaciados uniformemente en una circunferencia de 300 mm de diámetro, y cuatro pernos de aluminio de 20 mm de diámetro en un círculo de 200 mm de diámetro. ¿Qué par torsor puede transmitir sin exceder el valor de 60 MN/m^2 en el acero o de 40 MN/m^2 en el aluminio? Para el acero G_a = 83 GN/m^2 y para el aluminio G_{Al} = 28 GN/m^2.

Resp. $T = 5.94$ kN · m

3-4. ESFUERZO CORTANTE LONGITUDINAL

En el estudio de los esfuerzos debidos a la torsión, se ha considerado hasta ahora el esfuerzo cortante que se produce en las secciones transversales. Sin embargo, también aparece un esfuerzo cortante longitudinal, de dirección perpendicular al anterior, y del mismo módu-

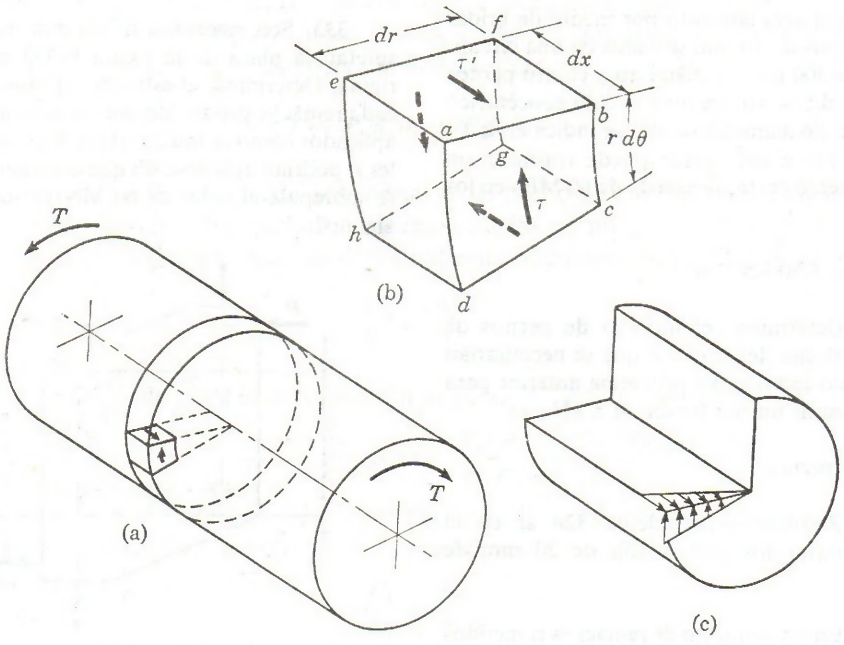


Figura 3-8. Equivalencia de los esfuerzos cortantes longitudinal y transversal en la torsión.

lo. Es un ejemplo del principio general que veremos más adelante, en la sección 5-7, de que todo esfuerzo cortante que actúa sobre una cara de un elemento va acompañado siempre de otro de igual valor absoluto en otra cara perpendicular a la primera.

Para demostrar la existencia de este esfuerzo longitudinal, consideremos un elemento aislado por dos secciones transversales, dos planos axiales longitudinales y dos superficies cilíndricas de distinto radio, como se observa en la figura 3-8a. Si en el diagrama de cuerpo libre de este elemento, muy ampliado en la figura 3-8b, se toman momentos de las fuerzas aplicadas respecto al eje gh, se deduce que sólo es posible el equilibrio si además del esfuerzo cortante τ ya estudiado actúa otro longitudinal τ'. Multiplicando los esfuerzos por las áreas de las caras sobre las que actúan para tomar momentos de las fuerzas, resulta:

$$[\Sigma M_{gh} = 0] \qquad (\tau\, dr\, r\, d\theta)\, dx - (\tau'\, dr\, dx) r\, d\theta = 0$$

y dividiendo entre el factor común $r\, d\theta\, dr\, dx$,

$$\tau' = \tau$$

En la figura 3-8c se observa, en perspectiva, un corte de un árbol de sección circular, con la presentación, de los esfuerzos cortantes transversales y longitudinales.

3-5. TORSIÓN DE TUBOS DE PARED DELGADA; FLUJO DE CORTANTE

Aunque la torsión de ejes de sección distinta a la circular requiere métodos de cálculo más avanzados, en el caso de tubos de pared delgada es fácil obtener una solución sencilla y muy aproximada a la solución exacta. En la figura 3-9a se observa uno de estos tubos, de forma arbitraria y espesor de pared variable t, siempre pequeño comparado con las dimensiones de la sección. La figura 3-9b muestra, ampliado, un elemento cualquiera de este tubo a modo de cuerpo libre y con una longitud ΔL. El esfuerzo cortante transversal τ_1 que existe en el punto de espesor t_1 produce otro longitudinal igual, como hemos visto en la sección anterior, y lo mismo ocurre con τ_2 en la parte de espesor t_2.

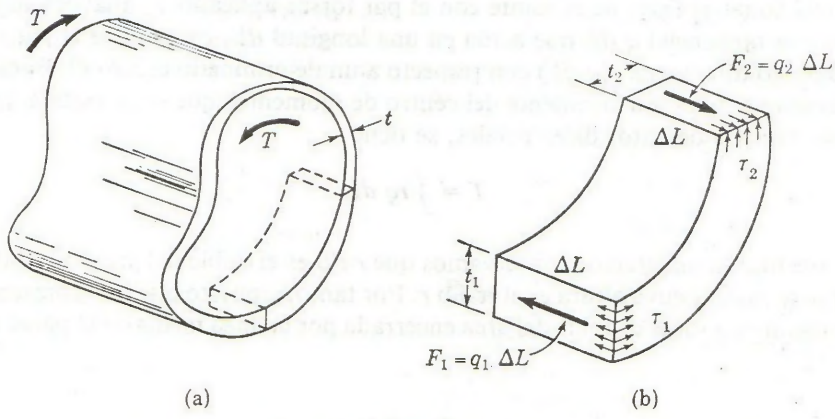


Figura 3-9. Flujo de cortante en un tubo de pared delgada.

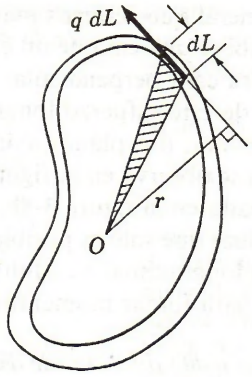


Figura 3-10.

Las resultantes de estos esfuerzos cortantes longitudinales son

$$F_1 = q_1 \Delta L \qquad \text{y} \qquad F_2 = q_2 \Delta L \tag{a}$$

en donde el símbolo q representa $\int_{-t/2}^{t/2} \tau \, dt$. El término q se suele llamar *flujo de cortante,* y es un concepto muy interesante y conveniente cuando no se conoce, o no interesa mucho, la distribución exacta del esfuerzo en un espesor dado. Considerando el equilibrio longitudinal del elemento se tiene,

$$q_1 \Delta L = q_2 \Delta L \text{ o bien, } q_1 = q_2 \tag{b}$$

La igualdad de los valores del flujo de cortante en dos lugares arbitrariamente escogidos prueba que debe ser constante en todo el perímetro del tubo. De hecho, el nombre de flujo de cortante se debe a la analogía matemática entre este flujo y el flujo evidentemente constante de un fluido incompresible que circulara a través de un conducto cerrado cuyos contornos fueran las paredes interior y exterior del tubo.

Para relacionar el flujo de cortante con el par torsor aplicado T, analicemos la figura 3-10. La fuerza tangencial $q\,dL$ que actúa en una longitud dL, contribuye al par resistente con un momento diferencial $r(q\,dL)$ con respecto a un determinado centro O. Puesto que el momento torsionante es independiente del centro de momentos que se considere, igualando T a la suma de los momentos diferenciales, se tiene

$$T = \int rq \, dL \tag{c}$$

En vez de efectuar la integración, observamos que $r\,dL$ es el doble del área del triángulo rayado cuya base es dL y cuya altura es el radio r. Por tanto, y puesto que q es constante, el valor de la integral es q veces el doble del área encerrada por la línea media de la pared del tubo, es decir,

$$\boldsymbol{T = 2Aq} \tag{3-7}$$

Por último el esfuerzo cortante medio, en cualquier punto de espesor t, viene dado por:

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2At} \tag{3-8}$$

PROBLEMA ILUSTRATIVO

336. Un tubo de pared delgada tiene la forma semicircular de la figura 3-11. Prescindiendo de la concentración de esfuerzos que se produce en las esquinas, calcular el momento torsionante que producirá un esfuerzo cortante de 40 MN/m^2.

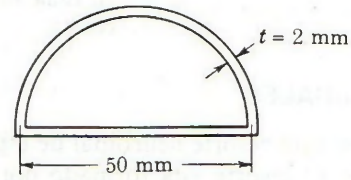


Figura 3-11.

Solución: Aplicando (3-8) y teniendo en cuenta que A es el área encerrada por la línea media del tubo resulta:

$$[T = 2At\tau] \qquad T = 2\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)t\tau$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{2}(0.025)^2\right](0.002)(40 \times 10^6)$$

$$= 157 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

337. Se aplica un momento torsionante de 600 N · m a un tubo de sección rectangular, como el de la figura P-337. Determinar el espesor t de sus paredes de manera que el esfuerzo cortante no exceda de 60 MPa. Calcular el esfuerzo en los lados cortos. Despreciar la concentración de esfuerzos en las esquinas.

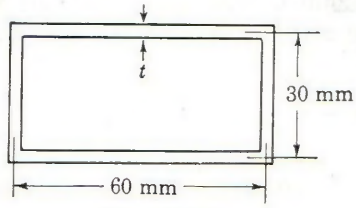


Figura P-337.

338. Un tubo de 3 mm de espesor tiene una forma elíptica, como se indica en la figura P-338. Hallar el momento torsionante que producirá en él un esfuerzo cortante de 60 MN/m^2.

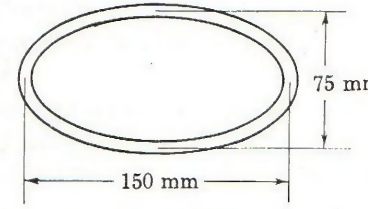


Figura P-338.

Resp. $T = 3.18$ kN · m

339. Un tubo de 3 mm de espesor tiene la forma y dimensiones que se indican en la figura P-339. Calcular el esfuerzo cortante si se le aplica un momento torsionante de 700 N · m, y el valor de a es 75 mm.

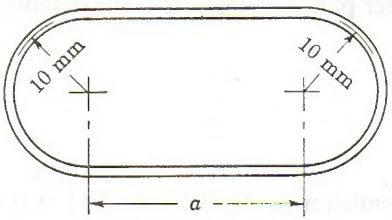


Figura P-339 y P-340.

340. Determinar la dimensión a del problema anterior de manera que pueda soportar un momento torsionante de 600 N · m con un esfuerzo cortante admisible de 70 MN/m^2.

Resp. $a = 55.7$ mm

341. Deducir la fórmula de la torsión $\tau = T\rho/J$ para una sección circular, partiendo de que ésta puede considerarse formada por una serie de tubos de paredes delgadas encajados unos dentro de otros, y suponiendo que el esfuerzo cortante en cada fibra es proporcional a su distancia al centro.

3-6. RESORTES HELICOIDALES

La figura 3-12 representa un resorte helicoidal de espiras cerradas, estirado bajo la acción de una fuerza axial P. El resorte está formado por un alambre o varilla redonda de diámetro d enrollada en forma de hélice de radio medio R. La pendiente de esta hélice es pequeña, de manera que se puede considerar con bastante aproximación que cada espira está situada en un plano perpendicular al eje del resorte.

Para determinar los esfuerzos producidos por P seguiremos el procedimiento general de cortar el resorte por una sección de exploración m-n, y determinar las fuerzas resistentes que se necesitan para el equilibrio de una de las porciones separada por esta sección. Después se analiza la distribución de esfuerzos que originan estas fuerzas resistentes.

La figura 3-13a representa el diagrama de cuerpo libre de la porción superior del resorte. Para el equilibrio en dirección axial, la fuerza resistente P_r, que representa la acción sobre es-

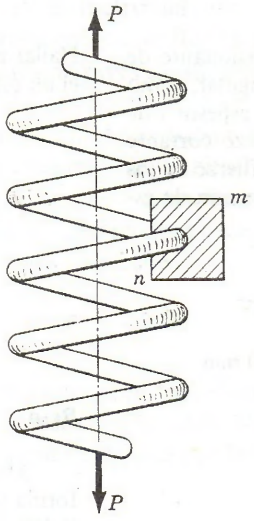
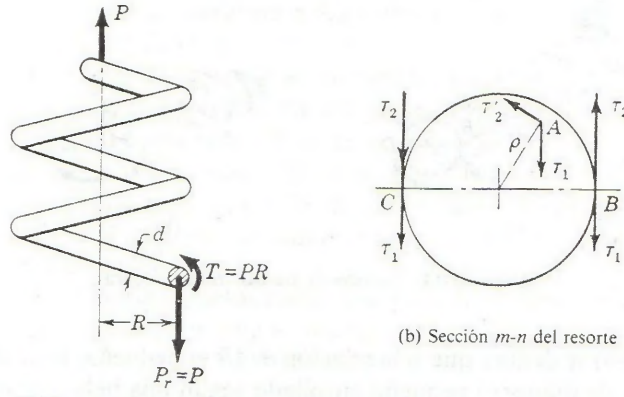


Figura 3-12. Resorte helicoidal.



(a) Diagrama de cuerpo libre

(b) Sección *m-n* del resorte

Figura 3-13. Análisis de un resorte helicoidal.

ta sección de la porción suprimida, ha de ser igual a P. El equilibrio horizontal también se cumple, ya que ninguna de las dos, ni P ni P_r, tienen componentes en esta dirección. Para el equilibrio de momentos, como P y P_r, opuestas y paralelas, producen un par PR, en la sección debe existir otro par resistente PR igual y opuesto al anterior, originado por un esfuerzo cortante de torsión, distribuido en la sección de corte. Se representa por $T = PR$.

La figura 3-13b representa la distribución de esfuerzos que producen estas fuerzas resistentes en la sección de corte. Observemos dos tipos de esfuerzo cortante: (1) un esfuerzo cortante τ_1 uniformemente distribuido, producido por la fuerza resistente P_r que pasa por su centro de gravedad, y (2) un esfuerzo cortante variable producido por el par torsor resistente $T = PR$. Este último varía tanto en magnitud, con la distancia al centro, como en dirección, ya que es perpendicular al radio en cada punto. El esfuerzo resultante en cada punto es el vector suma de los vectores τ_1 y τ_2. En el punto B, por ejemplo, los esfuerzos cortantes son de signos distintos (sentidos contrarios) y el esfuerzo resultante es la diferencia entre sus valores absolutos, pero en las fibras más cercanas al eje del resorte, como C, los dos esfuerzos tienen la misma dirección y sentido por lo que se suman, y la suma da el máximo valor del esfuerzo cortante en la sección. ¿Existirá algún punto en el diámetro BC en el que el esfuerzo cortante sea nulo? Si es así, ¿cómo se podría situar?

En resumen, el esfuerzo cortante máximo tiene lugar en el punto de la sección más próximo al eje del resorte y viene dado por la suma del esfuerzo cortante directo, $\tau_1 = P/A$ y el máximo valor del esfuerzo cortante producido por la torsión, $\tau_2 = Tr/J$, es decir:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16(PR)}{\pi d^3}$$

que puede escribirse en la forma

$$\tau = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4R}\right) \tag{3-9}$$

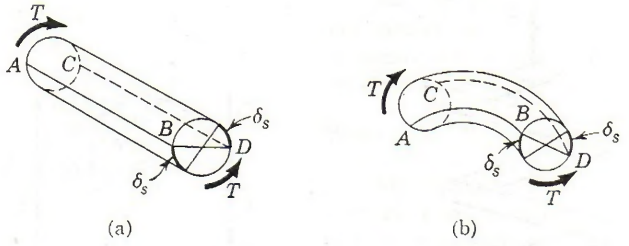


Figura 3-14. Torsión de barras rectas y curvas.

Observando (3-9) se deduce que si la relación $d/4R$ es pequeña, lo cual ocurre si el resorte es de un alambre de diámetro pequeño enrollado según una hélice de radio grande, el esfuerzo máximo se debe principalmente a la torsión del alambre y, en realidad, se puede despreciar el efecto del esfuerzo cortante directo. Si se trata, en cambio, de resortes pesados, como los que se emplean en los ferrocarriles, hechos con varillas de gran diámetro d con relación al radio medio de las espiras R, el efecto del esfuerzo cortante directo P/A puede llegar a ser importante, del orden de un 14% o más, y no se puede despreciar.

Debemos hacer notar que en el estudio realizado se ha prescindido de otro efecto que hace aumentar el esfuerzo cortante máximo. Esto se debe a que la fórmula de la torsión aplicada se dedujo para barras rectas, y en el resorte helicoidal la barra que se somete a torsión es curva. Este efecto tiene importancia únicamente en resortes pesados, en los que la curvatura de la barra es grande. En la barra recta de la figura 3-14a, la torsión produce la misma deformación δ_s en las fibras AB y CD y, por tanto, la distorsión $\gamma = \delta_s/L$ es la misma en B que en D puesto que los elementos AB y CD tienen la misma longitud inicial. En cambio, en la barra curva de la figura 3-14b la situación es distinta, ya que aunque las fibras AB y CD tienen la misma deformación δ_s, como la longitud inicial de AB es menor que la de CD, la distorsión en B es mayor que en D, por lo que el esfuerzo cortante por torsión en las fibras internas AB es mayor que en las externas CD. La importancia de este efecto depende de la magnitud de la diferencia de longitud inicial entre AB y CD. Evidentemente esta diferencia depende del grado de curvatura del alambre o barra, es decir, de la relación d/R. El investigador A. M. Wahl ha desarrollado la siguiente fórmula que tiene en cuenta este efecto adicional*:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0.615}{m}\right) \tag{3-10}$$

en donde $m = 2R/d = D/d$ es la relación del diámetro medio de las espiras al diámetro del alambre. Para resortes ligeros, en los que la relación m es muy grande, el valor del primer sumando del paréntesis es próximo a la unidad, y para comparar esta expresión con (3-9) se puede escribir esta última en la siguiente forma:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{0.5}{m}\right) \tag{3-9a}$$

* Véase A. M. Wahl, «Stresses in Heavy Closely Coiled Helical Springs», *Trans. A.S.M.E.*, Vol. 51, No. APM-51-17.

Para resortes pesados en los que la curvatura del alambre es grande y m es más pequeño, la expresión (3-10) corrige el error de (3-9).

La diferencia de los factores 0.5 y 0.615 en las expresiones (3-9a) y (3-10) tiene también su razón de ser, ya que el esfuerzo cortante directo no se distribuye uniformemente en una sección del alambre, sino que, como veremos en la sección 5-7, el esfuerzo cortante en una sección circular varía desde un máximo de 1.33 de su valor medio en el centro hasta cero en los extremos del diámetro vertical, y vale 1.23 de dicho valor medio en los extremos del diámetro horizontal, supuesta la fuerza cortante vertical. El factor 0.615 de la expresión (3-10) resulta de multiplicar 0.5 por 1.23.

Por último, obsérvese también que los resortes se fabrican en general de aceros y bronces especiales en los que el esfuerzo cortante admisible alcanza valores del orden de 200 a 800 MPa.

Distensión de un resorte

Prácticamente toda la elongación de un resorte según el eje se debe a la torsión del alambre. Si en la figura 3-15 se supone por un momento que todo el resorte, excepto la pequeña longitud dL, es rígido, el extremo A girará hacia D un pequeño ángulo $d\theta$. Como este ángulo es muy pequeño, el arco $AD = AB \cdot d\theta$ puede considerarse como una recta perpendicular a AB, de donde, por la semejanza de los triángulos ADE y BAC se tiene,

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BC}{AB}$$

o sea

$$\frac{d\delta}{AB \cdot d\theta} = \frac{R}{AB}$$

de donde

$$d\delta = R\, d\theta$$

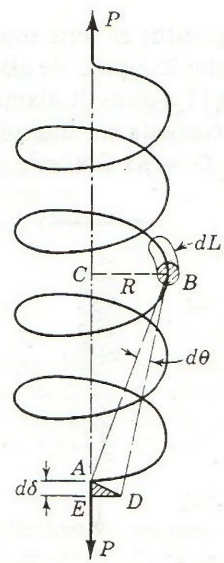


Figura 3-15. Deformación de un resorte helicoidal.

Aplicando la expresión (3-1) se puede sustituir $d\theta$ por su valor en función del momento torsionante,

$$d\delta = R\frac{(PR)\,dL}{JG} \qquad (b)$$

e, integrando a lo largo de toda la longitud del alambre, se obtiene la distensión o elongación total:

$$\delta = \frac{PR^2L}{JG} \qquad (c)$$

Sustituyendo L por $2\pi Rn$, que es la longitud de n espiras de radio R, y J por $\pi d^4/32$, resulta:

$$\delta = \frac{64PR^3n}{Gd^4} \qquad (3\text{-}11)$$

Esta expresión de la distensión del resorte desprecia el efecto de la fuerza cortante directa, como se había indicado anteriormente. Este efecto adicional viene dado por:

$$\delta' = \frac{PL}{AG} = \frac{P(2\pi Rn)}{\frac{\pi d^2}{4}G} = \frac{8PRn}{Gd^2} \qquad (3\text{-}12)$$

y es casi siempre despreciable frente al valor de δ dado por (3-11), por lo que no se suele tener en cuenta. La fórmula (3-11) también se utiliza para determinar la deformación axial de un resorte helicoidal sometido a compresión siempre que las espiras no estén tan poco espaciadas que lleguen a juntarse al aplicar la carga.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

342. Dos resortes de acero dispuestos en serie soportan una carga P, como se indica en la figura 3-16. El resorte superior tiene 20 espiras de alambre de 20 mm, y un diámetro medio de 150 mm. El resorte inferior tiene 15 espiras de alambre de 10 mm y un radio medio de 130 mm. Calcular el máximo esfuerzo cortante en cada resorte si la deformación total, alargamiento en este caso, es de 80 mm y $G = 83$ GN/m^2.

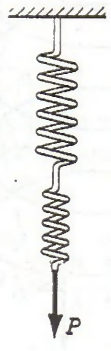


Figura 3-16.

Solución: La deformación total es la suma de las deformaciones de ambos resortes, ya que están sometidos a la tracción P. Teniendo en cuenta (3-11) se obtiene para P el valor

$$\left[\delta = \sum \frac{64PR^3n}{Gd^4}\right] \qquad 0.080 = \frac{64P}{83 \times 10^9}\left[\frac{(0.075)^3(20)}{(0.020)^4} + \frac{(0.065)^3(15)}{(0.010)^4}\right]$$

$$P = 233 \text{ N}$$

Conocida P se pueden determinar los esfuerzos. Para el resorte superior, $m = 2R/d = 2(0.075)/0.020 = 7.5$ y $4m = 30$, por lo que aplicando la fórmula de Wahl (3-10) resulta:

$$\tau_{máx} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0.615}{m}\right)$$

$$\tau_{máx} = \frac{16(223)(0.075)}{\pi(0.020)^3}\left(\frac{30-1}{30-4} + \frac{0.615}{7.5}\right)$$

$$= 12.7 \text{ MN/m}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

Análogamente, para el resorte inferior en el que $m = 2(0.065)/0.010 = 13$ y $4m = 52$, se tiene

$$\tau_{máx} = \frac{16(223)(0.065)}{\pi(0.010)^3}\left(\frac{52-1}{52-4} + \frac{0.615}{13}\right)$$

$$= 81.9 \text{ MN/m}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

Si se hubiera aplicado la expresión (3-9) para obtener los valores de los esfuerzos cortantes, los resultados hubieran sido 11.4 y 76.7 MN/m^2 en el resorte superior e inferior, respectivamente. Se deduce que en este caso la fórmula aproximada da unos errores relativos de 10.2 y 6.35% por abajo de los valores más exactos de la fórmula de Wahl.

PROBLEMAS

343. Determinar el esfuerzo cortante máximo y el alargamiento en un resorte helicoidal de 20 espiras de alambre de 20 mm con un radio medio de 80 mm, cuando el resorte soporta una carga de 2 kN. Aplicar la expresión (3-10) con $G = 83$ GN/m^2.

Resp. $\tau_{máx} = 121$ MN/m^2; $\delta = 98.7$ mm

344. Calcular el máximo alargamiento del resorte del problema anterior si está hecho de bronce fosforado para el que $G = 42$ GN/m^2 y el esfuerzo máximo puede ser de 140 MN/m^2. Aplicar (3-10).

345. Se construye un resorte helicoidal enrollando una varilla de 20 mm de diámetro sobre un cilindro de 150 mm de diámetro. Determinar el número de espiras necesarias para permitir un alargamiento de 100 mm sin que el esfuerzo cortante exceda de 140 MPa. Aplicar (3-9) con $G = 83$ GPa.

Resp. $n = 17.9$ espiras

346. Determinar el esfuerzo cortante máximo en un resorte de bronce fosforado de diámetro medio de 200 mm y formado por 24 vueltas de varilla de 20 mm de diámetro cuando se estira una longitud de 100 mm. Aplicar (3-10) con $G = 42$ GN/m^2.

347. Un embrague está accionado por seis resortes helicoidales dispuestos simétricamente. Cada resorte tiene doce espiras de alambre de acero de 10 mm de diámetro y un diámetro exte-

rior de 50 mm. Determinar la fuerza que hay que ejercer contra la placa del embrague para comprimir los resortes una longitud de 40 mm. ¿Cuál será el esfuerzo cortante máximo en ellos? Aplicar (3-9) con $G = 83$ GN/m^2.

348. Dos resortes de acero colocados en serie, como indica la figura P-348, soportan una carga P. El resorte superior tiene 12 espiras de varilla de 25 mm de diámetro con un radio medio de 100 mm. El inferior tiene 10 espiras de varilla de 20 mm de diámetro con radio medio de 75 mm. Si el esfuerzo cortante no debe exceder en ninguno de ellos de 200 MN/m^2, determinar P y el alargamiento total del conjunto. Aplicar (3-10) con $G = 83$ GN/m^2. Calcular la constante del resorte equivalente dividiendo la carga entre el alargamiento.

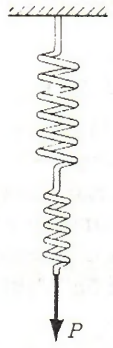


Figura P-348.

349. Una carga P está soportada por dos resortes helicoidales colocados concéntricamente uno dentro de otro, como se observa en la figura P-349. El interior tiene 30 espiras de alambre de 20 mm de diámetro sobre un radio medio de 150 mm y el exterior, 20 espiras de alambre de 30 mm con un radio medio de 200 mm. Determinar la carga máxima P que pueden soportar de manera que no se sobrepase el esfuerzo cortante admisible de 140 MPa en cada resorte. Aplicar (3-9) con $G = 83$ GPa. Inicialmente los dos resortes tienen sus extremos superiores al mismo nivel.

Resp. $P = 9.05$ kN

350. Si el resorte interior del problema anterior es de bronce fosforado con $G = 42$ GN/m^2, calcular el esfuerzo cortante máximo en cada resorte con $P = 5$ kN. Aplicar (3-10).

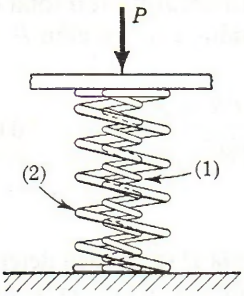


Figura P-349 y P-350.

351. Una placa rígida se apoya en el resorte central, figura P-351, que es 20 mm más largo que los dos resortes laterales, simétricamente colocados. Cada uno de estos laterales tiene 18 espiras de alambre de 10 mm sobre un diámetro medio de 100 mm. El resorte central tiene 24 espiras de alambre de 20 mm y diámetro medio de 150 mm. Si se aplica una carga $P = 5$ kN en la placa, determinar el esfuerzo cortante máximo en cada resorte. Aplicar (3-9) con $G = 83$ GN/m^2.

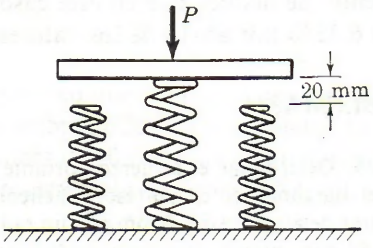


Figura P-351 y P-352.

Resp. Resorte central: $\tau_{máx} = 170$ MN/m^2

352. Resolver el problema 351 si los resortes laterales son de bronce fosforado para el que $G = 42$ GN/m^2. ¿Se puede predecir el efecto, cualitativo, de este cambio en los esfuerzos?

353. Una barra rígida articulada en un extremo pende de dos resortes idénticos, como se observa en la figura P-353. Cada uno de ellos tiene 20 espiras de alambre de 10 mm con diámetro medio de 150 mm. Determinar el es-

fuerzo cortante máximo en los resortes aplicando (3-9). Desprecie la masa de la barra rígida.

Resp. $\tau_{máx} = 46.5\ MN/m^2$

354. Si cada resorte del problema anterior tiene 16 espiras de alambre de 10 mm sobre 160 mm de diámetro medio, determinar la carga máxima P para que el esfuerzo no exceda de 140 MN/m^2 en ningún resorte. Use la ecuación (3-9).

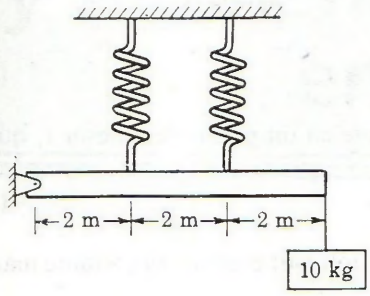


Figura P-353 y P-354.

355. Como se indica en la figura P-355, un bloque rígido de 50 kg pende de tres resortes cuyos extremos inferiores, inicialmente, están al mismo nivel. Cada resorte de acero tiene 24 espiras de alambre de 10 mm de diámetro sobre un diámetro medio de 100 mm y $G = 83\ GN/m^2$. El resorte de bronce tiene 48 espiras de alambre de 20 mm y diámetro medio de 150 mm, con $G = 42\ GN/m^2$. Determinar el esfuerzo cortante máximo en cada resorte aplicando (3-9).

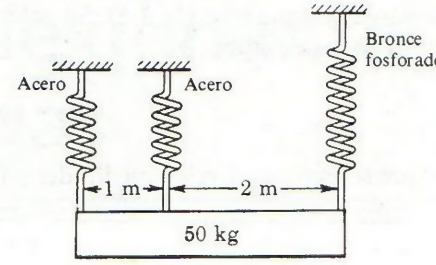


Figura P-355.

Resp. Para el bronce, $\tau_{máx} = 9.93\ MN/m^2$

RESUMEN

El estudio de la torsión hecho en este capítulo se limita a secciones circulares, llenas o huecas. El esfuerzo cortante es directamente proporcional a la distancia al centro de la sección y viene dado por:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{3–2}$$

El esfuerzo cortante máximo en un árbol macizo de diámetro d vale:

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} \tag{3–2b}$$

En árboles huecos de diámetro exterior D e interior d, se tiene:

$$\tau = \frac{16TD}{\pi(D^4 - d^4)} \tag{3–2c}$$

La deformación angular en una longitud L, expresada en radianes, viene dada por:

$$\theta = \frac{TL}{JG} \tag{3–1}$$

que se convierte en grados sexagesimales multiplicando por $180/\pi = 57.3$. La expresión (3-1) se utiliza no sólo para determinar ángulos de torsión, sino también para resolver problemas de torsión estáticamente indeterminados.

La relación entre el par, T, y la potencia trasmitida, $\mathcal{P}$, por un árbol que gira a una frecuencia f es

$$T = \frac{\mathcal{P}}{2\pi f} \tag{3-3}$$

El estudio de los acoplamientos por bridas (sección 3-3) es prácticamente la aplicación de la fórmula de la torsión a un número finito de elementos de área sometidos a cortante.

La existencia de un esfuerzo cortante longitudinal, como consecuencia del transversal, sirve para demostrar que el flujo de cortante q es constante a lo largo del contorno de un tubo de pared delgada (sección 3-5). Su valor, en función del área A encerrada por la línea media de la pared del tubo, es:

$$q = \frac{T}{2A} \tag{3-7}$$

de la que se obtiene el valor medio del esfuerzo cortante en un punto de espesor t, que es:

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2At} \tag{3-8}$$

En los resortes helicoidales de espiras cerradas (sección 3-6) el esfuerzo cortante máximo viene dado, con mucha aproximación, por:

$$\tau = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4R}\right) \tag{3-9}$$

y más exactamente por:

$$\tau = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(\frac{4m - 1}{4m - 4} + \frac{0.615}{m}\right) \tag{3-10}$$

en donde $m = 2R/d$.

En la deformación axial (distensión) de un resorte se suele despreciar el efecto de la fuerza cortante directa, atendiéndose solamente a la torsión. Esta deformación axial viene dada por:

$$\delta = \frac{64PR^3n}{Gd^4} \tag{3-11}$$

4

fuerza cortante y momento flexionante en vigas

4-1. INTRODUCCIÓN

El problema fundamental de la resistencia de materiales es la determinación de las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones producidas por las fuerzas que se aplican a un elemento o a una estructura. En el estudio realizado de las fuerzas axiales, y de la torsión, no se ha tenido dificultad alguna en la aplicación de las relaciones entre esfuerzos y deformaciones, ya que en la mayoría de los casos las fuerzas y sus efectos, los esfuerzos internos, o bien eran constantes en el conjunto de la estructura o su distribución entre las partes componentes se conocía perfectamente.

Sin embargo, el estudio de la flexión es más complejo debido a que los efectos de las fuerzas aplicadas son variables de una a otra sección de la viga. Estos efectos son de dos tipos claramente diferenciados, la *fuerza cortante* y el *momento flexionante*, al que a menudo se llama simplemente *momento*, y que se define en la sección siguiente. En el Capítulo 5 se verá como estos dos efectos producen dos tipos distintos de esfuerzos en las secciones transversales de las vigas: (1) un esfuerzo normal, directamente proporcional al momento flexionante, y (2) un esfuerzo cortante que depende de la fuerza cortante. En este capítulo, y como paso previo a la determinación de los esfuerzos, se estudia la distribución y el cálculo de la fuerza cortante y del momento flexionante en vigas sometidas a distintas combinaciones de cargas en diferentes condiciones de sujeción o apoyo y, concretamente, la determinación de sus valores máximos. En el Capítulo 6 se tratará de la deformación de las vigas.

En la figura 4-1 se muestran varios tipos de vigas con distintas condiciones de sujeción. Una viga simplemente apoyada en sus extremos, o viga simple, tiene una articulación en un extremo y un apoyo móvil sobre rodillos en el otro. Una viga en voladizo, o ménsula, se sujeta en un solo extremo, en un empotramiento que impide el giro en dicho extremo. Una viga

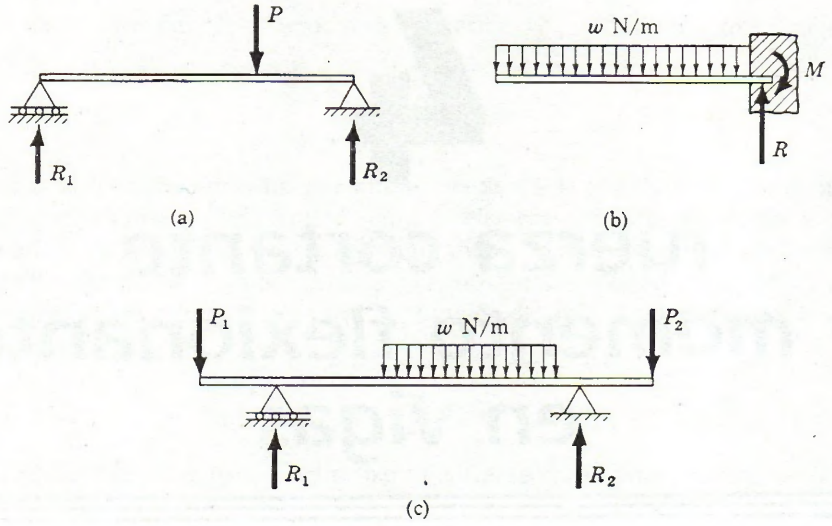


Figura 4-1. Vigas estáticamente determinadas. (a) Viga simplemente apoyada. (b) Viga en voladizo o ménsula. (c) Viga simplemente apoyada con dos voladizos.

apoyada con voladizos está apoyada mediante una articulación y un apoyo de rodillos, pero uno o los dos extremos sobresalen de los soportes. Todas estas vigas son estáticamente determinadas, ya que sus reacciones pueden determinarse directamente mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático.

En la figura 4-2 se muestran otras vigas con otras condiciones de sujeción, como son la viga empotrada-apoyada, la viga doblemente empotrada y la viga continua. Todas ellas tienen como mínimo una reacción más de las estrictamente necesarias para su sustentación, es decir, para impedir su movimiento como sólido rígido y son, por tanto, estáticamente in-

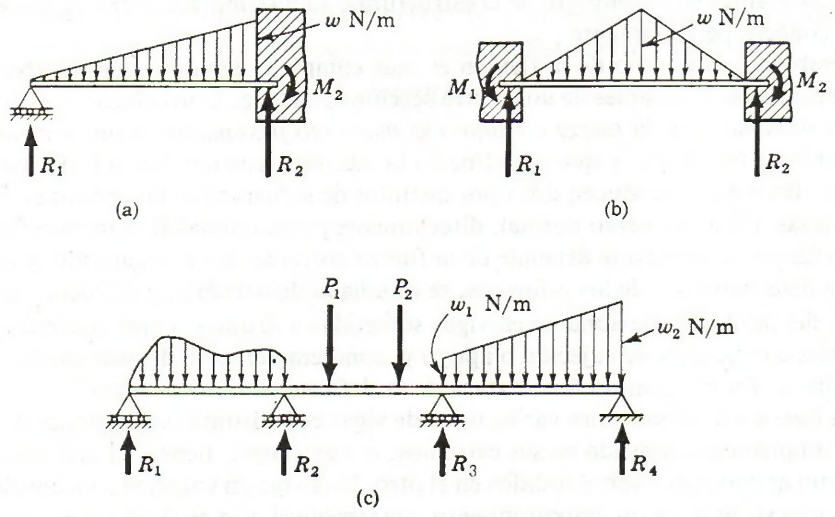


Figura 4-2. Vigas estáticamente indeterminadas. (a) Viga empotrada-apoyada o ménsula con apoyo. (b) Viga doblemente empotrada. (c) Viga continua.

determinadas o hiperestáticas. La existencia de un exceso de reacciones hace que las ecuaciones del equilibrio estático no sean suficientes para determinarlas, y se requiere el empleo de ecuaciones adicionales. Estas ecuaciones se obtienen considerando las deformaciones elásticas de la viga. Su solución se estudia en los Capítulos 7 y 8.

Una *carga concentrada* o *puntual* es la que actúa sobre una longitud tan pequeña de la viga que puede suponerse que lo hace sobre un punto, como se observa en la figura 4-1a. Por el contrario, una *carga* distribuida es la que actúa sobre una longitud finita de la viga. Puede ser uniformemente distribuida en toda su longitud, como en la figura 4-1b, o sobre una parte de ella, como en la figura 4-1c. Las cargas distribuidas también pueden ser variables, uniformemente o no. En una carga uniformemente variable su intensidad crece o decrece en una proporción constante, como en las figuras 4-2a y 4-2b. Un ejemplo de cargas de esta clase es la presión del agua contra las paredes de una presa, o el empuje de la arena. La carga trapecial de la porción derecha de la viga de la figura 4-2c es una combinación de carga uniforme y de carga uniformemente variable. La carga puede variar también de una forma arbitraria, como en el vano o tramo izquierdo de la figura 4 2c. Este tipo de carga puede producirse, por ejemplo, en el apilado de sacos.

4-2. FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLEXIONANTE

En la figura 4-3a se representa una viga simplemente apoyada, en equilibrio bajo la acción de una fuerza concentrada P y de sus reacciones R_1 y R_2. Por el momento, se desprecia el peso propio de la viga y solamente se tiene en cuenta el efecto de la carga P. Supongamos que se corta la viga por una sección a-a a una distancia x de R_1, quedando la viga dividida en dos partes. En el diagrama de cuerpo libre de la porción izquierda, figura 4-3b, se observa que la fuerza exterior aplicada es R_1. Para mantener el equilibrio, en la sección de corte a-a deben aparecer unas fuerzas resistentes, necesarias para satisfacer las condiciones de la estática, fuerzas que representan la acción de la parte derecha suprimida sobre la porción izquierda considerada. En este caso, y como la fuerza exterior aplicada es vertical, se satisface directamente la condición $\Sigma X = 0$, siendo el eje X horizontal.

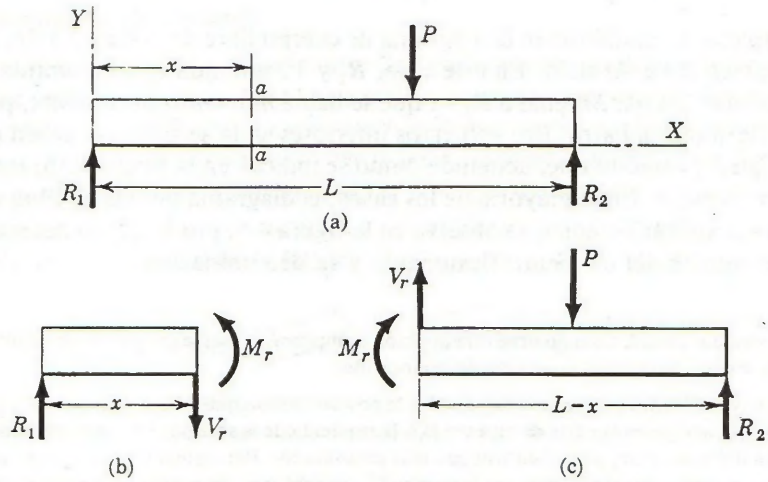


Figura 4-3. Equilibrio de las partes de una viga a la izquierda y a la derecha de una sección a-a.

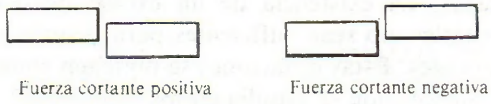


Figura 4-4. Movimientos relativos que corresponden al signo de la fuerza cortante.

Para satisfacer la condición $\Sigma Y = 0$, las fuerzas interiores en la sección *a-a* deben originar una fuerza resistente que se oponga a R_1. Esta fuerza es V_r de la figura 4-3b, a la que se puede llamar fuerza resistente cortante. En el caso que se considera, V_r es numéricamente igual a R_1, pero si hubiese otras fuerzas aplicadas entre R_1 y la sección, como en las figuras 4-5 y 4-6, la resultante no equilibrada de todas ellas (que es igual y opuesta a la fuerza resistente cortante), se obtendría como suma de sus componentes verticales. Esta resultante no equilibrada de las fuerzas exteriores es la que se define como fuerza cortante en una sección y se representa por V, siendo su valor la suma de las componentes verticales* de las fuerzas exteriores que actúan a uno u otro lado de la sección. Sin embargo, por las razones expuestas en la nota al pie de la página 92, es más sencillo sumar las fuerzas que actúan en la porción de viga a la *izquierda* de la sección. Esta definición y determinación del valor de la fuerza cortante, o fuerza de corte vertical o simplemente, *cortante* conduce a la expresión analítica

$$V = (\Sigma Y)_{izq} \tag{4-1}$$

en donde el subíndice *izq* pone de manifiesto que en la suma de las componentes verticales sólo se consideran las fuerzas o cargas que actúan en la porción de la viga a la izquierda de la sección en estudio.†

La fuerza resistente cortante V_r, producida en cualquier sección por los esfuerzos interiores, es siempre igual y opuesta a la fuerza cortante V. Al calcular V, las fuerzas que actúan hacia arriba se consideran positivas. De acuerdo con estos signos convencionales, en la figura 4-4 se observa el efecto de una fuerza cortante positiva que tiende a hacer resbalar hacia arriba la porción izquierda de la viga respecto de la porción derecha, y viceversa cuando es negativa.

Para completar el equilibrio en el diagrama de cuerpo libre de la figura 4-3b, la suma de momentos también debe ser nula. En este caso, R_1 y V_r son iguales y de sentido contrario, por lo que producen un par M igual a $R_1 \cdot x$ que se llama *momento flexionante*, porque tiende a curvar o flexionar la barra. Los esfuerzos interiores en la sección *a-a* deben originar un par resistente igual y opuesto que, actuando como se indica‡ en la figura 4-3b, restablezca el equilibrio de momentos. En la mayoría de los casos, el diagrama de cuerpo libre tiene varias fuerzas exteriores aplicadas, como se observa en la figura 4-5, por lo que es necesaria una definición más completa del momento flexionante y su determinación.

---

* Se supone la viga horizontal. Cuando tiene otra posición cualquiera, la fuerza cortante se determina mediante la suma de las componentes paralelas a la sección de exploración.

† **N. del T.** Conviene insistir en que la suma se extiende no a las fuerzas que están físicamente a la izquierda de la sección, sino a las que actúan en la parte de viga unida a la izquierda de la sección. En vigas sencillas no es imprescindible hacer esta diferenciación, pero sí en sistemas más complicados. Por ejemplo, en la viga de la figura P-440, para evaluar la fuerza cortante o el momento en la sección C', se debe tener en cuenta la carga que actúa en la parte ABC unida a C' por la izquierda, aunque físicamente la carga en A esté situada a la derecha de la sección C'.

‡ En la Sec. 4-3 se demuestra que el momento flexionante y, por tanto, el momento resistente, es siempre un par.

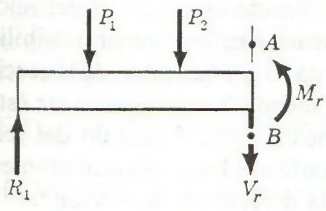


Figura 4-5.

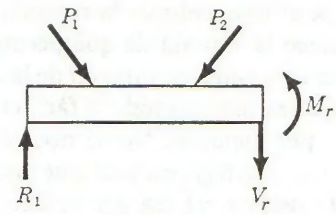


Figura 4-6.

Definición de momento flexionante

El momento flexionante es la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan en la porción de viga a la izquierda o a la derecha de una sección, respecto al eje perpendicular al plano de las fuerzas y que pasa por el centro de gravedad centroide de la sección considerada. Analíticamente viene dado por:

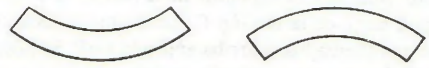
$$M = (\Sigma M)_{izq} = (\Sigma M)_{der} \tag{4-2}$$

en donde el subíndice *izq* pone de manifiesto que el momento se evalúa con las fuerzas de la izquierda y el subíndice *der* que se refiere a la fuerzas de la derecha*.

El porqué de elegir como eje con respecto al cual se toman los momentos, el que pasa por el centro de gravedad de la sección se aclara más adelante en la sección 5-2. Por el momento, obsérvese que si las fuerzas exteriores son perpendiculares a la viga, como en la figura 4-5, es indiferente que el eje respecto del cual se calculan los momentos sea el que pase por A o el que pase por B o por cualquier otro punto de la sección. Sin embargo, si las fuerzas aplicadas están inclinadas respecto a la viga, como en la figura 4-6, el brazo de palanca de las mismas no queda determinado más que si se fija la posición del eje respecto del cual se van a tomar los momentos, en una determinada sección. Estas fuerzas inclinadas producen, como se verá en la sección 9-2, efectos combinados axiales y de flexión.

Signo del momento flexionante

El criterio más extendido es que el momento flexionante es positivo si la flexión que produce en la viga presenta la concavidad hacia arriba, como se observa en la figura 4-7. Un criterio equivalente es que *las fuerzas que actúan hacia arriba respecto de cualquier sección producen momentos flexionantes positivos y las fuerzas que actúan hacia abajo dan lugar a momentos flexionantes negativos.* Considerando la porción izquierda de la viga, figura 4-3b, esta conveniencia equivale a que los momentos en el sentido del reloj sean positivos, como el producido por R_1, pero considerando la porción derecha, como en la figura 4-3c, la convención



Flexión positiva Flexión negativa

Figura 4-7. Curvaturas correspondientes al signo del momento flexionante.

* **N. de T.** Se vuelve a insistir en lo dicho al hablar de la fuerza cortante. Para la determinación del momento flexionante se tendrán en cuenta todas las fuerzas que actúan en la parte de viga unida a la izquierda de la sección, y así, en la misma figura P-440, la carga en A interviene en el cálculo del momento en C'

indica que el momento de la reacción R_2 es positivo, en sentido contrario al del reloj. Este criterio tiene la ventaja de que permite calcular el momento flexionante sin posibilidad de confusión de signos, en función de las fuerzas a la izquierda, o a la derecha, de la sección, según donde sea más cómodo o fácil el cálculo, por haber menos fuerzas, o por ser éstas más sencillas, por ejemplo. No se necesita pensar si el momento tiene el sentido del reloj o el contrario, y sólo hay recordar que las fuerzas positivas, hacia arriba, producen momento flexionante positivo, ya sea que actúen a la izquierda o a la derecha de la sección*.

Las definiciones de fuerza cortante y momento flexionante se pueden resumir en las expresiones analíticas:

$$V = (\Sigma Y)_{izq} \tag{4-1}$$

$$M = (\Sigma M)_{izq} = (\Sigma M)_{der} \tag{4-2}$$

en donde los signos son positivos cuando las fuerzas tienen sentido hacia arriba y negativos en caso contrario. En adelante se emplea exclusivamente esta convención de signos† y posteriormente se ampliará a otras magnitudes con las que se emplean adjetivos tales como encima, hacia arriba, etc. Recordemos que los subíndices *izq* y *der* se refieren a la porción de viga a la izquierda o a la derecha de la sección de exploración.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

401. Escribir las ecuaciones de momentos flexionante y fuerza cortante de la viga cargada que se muestra en la figura 4-10a, y trazar los diagramas correspondientes.

Solución: Calculemos, en primer lugar, las reacciones. De la condición $\Sigma M_C = 0$ se obtiene $R_1 = 63$ kN, y de $\Sigma M_A = 0$ resulta $R_2 = 67$ kN. Estos valores se comprueban hallando ΣY que debe ser cero. Las secciones de la viga en las que varían las condiciones de carga se llaman puntos de cambio o puntos de discontinuidad (en las cargas), y se nombran con las letras *A, B, C* y *D*.

---

* **N. de T.** En el caso de vigas sencillas, sí; pero si se trata de estructuras algo más complicadas, como la de la figura P-440, las fuerzas hacia arriba producirán momento positivo si, *actuando en la parte de viga a la izquierda de la sección, también están físicamente situadas a la izquierda de la sección* o todo a la derecha si se calcula por este otro lado. Así, la carga aplicada en *A* daría en la sección *C'* un momento positivo, porque el sentido del par que produce en *C'* es el mismo que el de una fuerza hacia arriba aplicada en *B*. Se puede interpretar como si la distancia de una fuerza que actúa en la porción de viga a la izquierda, de una sección, y está además físicamente a la izquierda, fuera positiva, y en cambio la distancia a la sección de una fuerza que actúa en la porción de viga a la izquierda, pero que está físicamente a la derecha, fuera negativa, lo que produce el cambio de signo del momento.

† Para evitar cualquier error con esta regla, es necesario calcular la fuerza cortante en función de las fuerzas que actúan en la porción de viga a la izquierda de la sección, ya que, si se utilizan las fuerzas a la derecha, es preciso considerar como positivas las que actúan hacia abajo para estar de acuerdo con el convenio de signos que muestra la figura 4-4.

En una sección cualquiera *a-a* entre *A* y *B* las fuerzas aplicadas a considerar son las que aparecen en la figura 4-8. Teniendo en cuenta las expresiones de la fuerza cortante y del momento flexionante se tiene:

$$[V = (\Sigma Y)_{izq}] \qquad V_{AB} = (63 - 20x)\ \text{kN} \tag{a}$$

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_{AB} = 63x - (20x)\frac{x}{2} = (63x - 10x^2)\ \text{kN}\cdot\text{m} \tag{b}$$

Estas expresiones son válidas solamente desde $x = 0$ hasta $x = 5$ m, es decir, entre los puntos *A* y *B*. Para obtener las expresiones de *V* y *M* entre los puntos *B* y *C* supongamos una sección cualquiera *b-b* entre ambos puntos. Su posición está definida por la abscisa *x* a partir del mismo origen *A* considerado anteriormente, por lo que *x* varía entre $x = 5$ m y $x = 10$ m. Los efectos de las fuerzas exteriores en esta sección se determinan aplicando las mismas expresiones pero a la figura 4-9. Se tiene:

$$[V = (\Sigma Y)_{izq}] \qquad V_{BC} = 63 - 100 = -37\ \text{kN} \tag{c}$$

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_{BC} = 63x - 100(x - 2.5) = (-37x + 250)\ \text{kN}\cdot\text{m} \tag{d}$$

Las leyes de fuerza cortante y momento flexionante en el intervalo *CD* resultan de la misma forma, considerando una sección cualquiera *c-c* entre ambos puntos. Las fuerzas a la izquierda son las indicadas en la figura 4-11, con lo que resulta:

$$[V = (\Sigma Y)_{izq}] \qquad V_{CD} = 63 - 100 + 67 = +30\ \text{kN} \tag{e}$$

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_{CD} = 63x - 100(x - 2.5) + 67(x - 10) = (30x - 420)\ \text{kN}\cdot\text{m} \tag{f}$$

También se puede deducir esta última distribución de momentos en el intervalo *CD* considerando las fuerzas que actúan a la derecha de la sección *c-c*, como se observa en la figura 4-12, de la que se obtiene, con el criterio dado de signos,

$$[M = (\Sigma M)_{der}] \qquad M_{CD} = -30(14 - x) = (30x - 420)\ \text{kN}\cdot\text{m} \tag{f'}$$

Resumiendo, en el cálculo de *V* se consideran las fuerzas exteriores aplicadas a la *izquierda* de la sección, mientras que *M* puede calcularse tomando momentos, con respecto a la sección considerada, de las fuerzas exteriores aplicadas a la izquierda *o* a la derecha. Se ha tenido sumo cuidado en asignar signo más a *V* y *M* producidos por fuerzas que actúan hacia arriba, y signo menos en caso contrario.

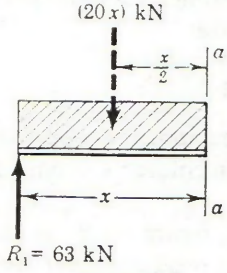


Figura 4-8.

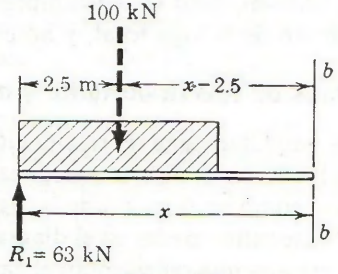


Figura 4-9.

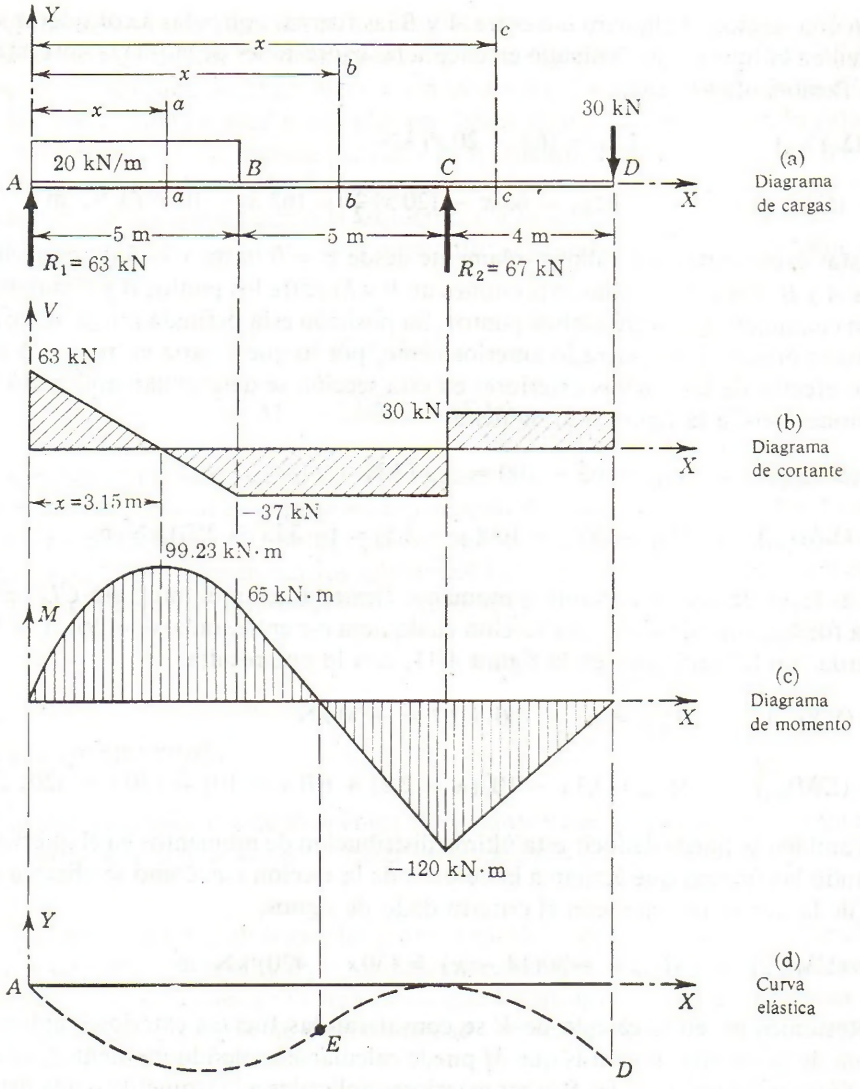


Figura 4-10.

Obsérvese finalmente que las figuras 4-8, 4-9, 4-11 y 4-12 se han utilizado solamente para la explicación, pero se acostumbra uno rápidamente a distinguir tales diagramas directamente dentro de la viga total, y no es preciso trazarlos aparte.

Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante

Son simplemente la representación gráfica de las distribuciones correspondientes, dibujadas en los sistemas de ejes coordenados *V-x* y *M-x*, y suelen colocarse debajo del diagrama de cargas, como en (*b*) y (*c*) de la figura 4-10.

Las discontinuidades en el diagrama de fuerza cortante, figura 4-10b, se unen mediante líneas verticales que representan el cambio brusco de aquélla producido por las fuerzas con-

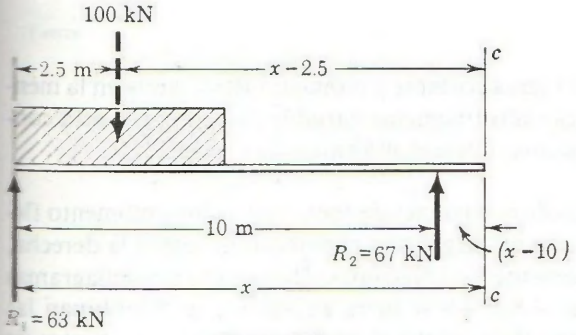


Figura 4-11.

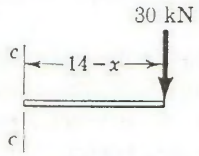


Figura 4-12.

centradas. En las sección 4-4 se verá cómo esta unión es correcta. Una última observación es que los máximos y mínimos del diagrama de momentos corresponden siempre a secciones de fuerza cortante nula, y aunque esto también se analizará en la sección 4-4, se hace notar aquí que los valores de x que hacen máximo M_{AB} se pueden obtener igualando a cero la derivada de M_{AB} con respecto a x. Esta derivada da, como se puede comprobar en cada tramo, la distribución correspondiente de fuerza cortante y, por tanto, el máximo momento corresponde a la sección de fuerza cortante nula.

La fuerza cortante y el momento flexionante, en los puntos de discontinuidad, se determinan sustituyendo los correspondientes valores de x en las ecuaciones (a) a (f) aunque, en general, es más sencillo determinar estos valores directamente aplicando las definiciones de V y M a estas secciones. Por ejemplo, la sección entre A y B de fuerza cortante nula es aquella en la que el peso de x metros de carga aplicada a razón de 20 kN/m contrarreste la fuerza cortante positiva de 63 kN que existe en A. Por tanto,

$$63 = 20x \text{ o bien, } x = 3.15 \text{ m}$$

El momento flexionante en esta sección se calcula tomando momentos de las fuerzas a la izquierda. Estas son la reacción $R_1 = 63$ kN hacia arriba y la carga de 63 kN hacia abajo que ha sido necesaria para anular V. Por la definición de momento flexionante,

$$[M = (\Sigma M)_{\text{izq}}]$$

$$\text{en } x = 3.15, \qquad M = (63)(3.15) - 63\left(\frac{3.15}{2}\right) = 99.23 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Un último punto de gran interés es el que se expone a través de la figura 4-10d, que muestra la forma que adquiere la viga bajo la acción de las cargas aplicadas, suponiendo que fuera muy flexible. Entre A y E es cóncava hacia arriba y entre E y D es cóncava hacia abajo. Puesto que cualquier magnitud a la que se asocie el adjetivo «hacia arriba» se considera, por conveniencia, con signo positivo, no debe extrañar que el diagrama de momentos tenga signo más entre A y E, mientras que entre E y D, en donde la viga vuelve su concavidad hacia abajo, tenga signo menos. Trazando, pues, la forma aproximada de la deformación de la viga, sirve de confrontación con los signos obtenidos para el momento flexionante.

En el punto E en que la viga cambia de forma, de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, se tiene un *punto de inflexión* y corresponde a la sección de momento flexionante nulo. Su posición se determina igualando a cero la expresión (d),

$$[M_{BC} = 0] \qquad -37x + 250 = 0; \quad x = 6.76 \text{ m}$$

PROBLEMA ILUSTRATIVO

402. Determinar las distribuciones de fuerza cortante y momento flexionante en la ménsula de la figura 4-13 que soporta una carga uniformemente variable (triangular) y otra concentrada, como se indica. Trazar los diagramas correspondientes de V y M.

Solución: En las ménsulas, el cálculo de las distribuciones de fuerza cortante y momento flexionante se simplifica dibujando el diagrama de cargas con el empotramiento a la derecha, ya que entonces no es preciso hallar previamente las reacciones. Dibujando unos diagramas similares a los que representan las figuras 4-8 y 4-9 si fuera necesario, se determinan las expresiones de la fuerza cortante y momento flexionante en cada tramo entre dos puntos de discontinuidad, aplicando las fórmulas (4-1) y (4-2). Para AB, en donde x varía de 0 a 6 m, se tiene (figura 4-14):

$$[V = (\Sigma Y)_{izq}] \qquad V_{AB} = -\frac{x^2}{2} \text{ kN}$$

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_{AB} = -\frac{x^2}{2}\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{x^3}{6} \text{ kN·m}$$

Pasado B, la resultante de la carga triangular, igual a su área, es constante y tiene un valor de $\frac{1}{2}(6)(6) = 18$ kN que actúa en el centro de gravedad del diagrama triangular de carga, a 4 m de A. Por tanto, para BC, en donde x varía de 6 a 8 se tiene (figura 4-15):

$$[V = (\Sigma Y)_{izq}] \qquad V_{BC} = -18 \text{ kN}$$

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_{BC} = -18(x - 4) = (-18x + 72) \text{ kN·m}$$

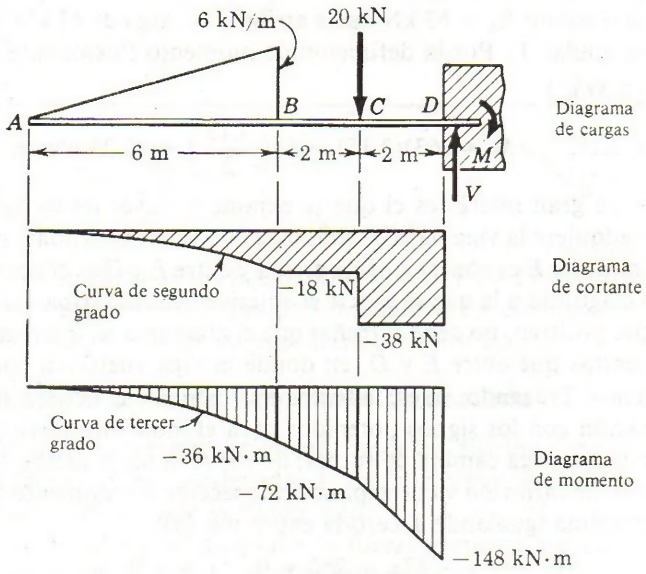


Figura 4-13.

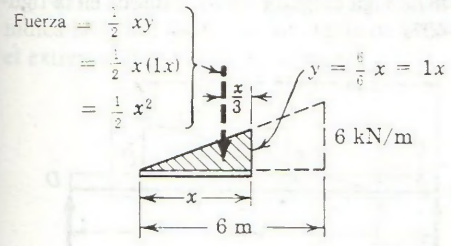


Figura 4-14.

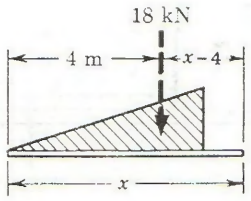


Figura 4-15.

Para una sección entre C y D (figura 4-16) en la que x varía entre 8 y 10, resulta:

$$[V = (\Sigma Y)_{izq}] \qquad V_{CD} = -18 - 20 = -38 \text{ kN}$$
$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_{CD} = -18(x - 4) - 20(x - 8)$$
$$= (-38x + 232) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

En la figura 4-13 se muestran los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, es decir, la representación gráfica de estas distribuciones. En el empotramiento D, los diagramas vuelven a cero debido a que las reacciones en él, fuerza y momento, anulan la fuerza cortante y el momento flexionante. Obsérvese cómo los valores máximos de V y M tienen lugar en el empotramiento, cosa que ocurre siempre excepto en el caso de que algunas fuerzas aplicadas actúen hacia arriba y otras hacia abajo. Tampoco es necesaria la expresión de M_{CD} para determinar el momento en D, sino que puede hallarse directamente aplicando (4-2), es decir,

$$M = (\Sigma M)_{izq} = -18(6) - 20(2) = -148 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

PROBLEMAS

Escribir las distribuciones de momentos flexionantes y fuerza cortante en las vigas de los problemas siguientes. Trazar también sus diagramas, marcando los valores en todos los puntos de discontinuidad, y en los de fuerza cortante nula. Despreciar el peso propio de las vigas.

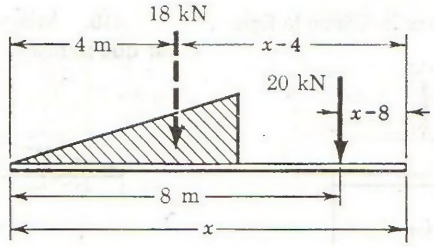


Figura 4-16.

403. Viga cargada como se indica en la figura P-403.

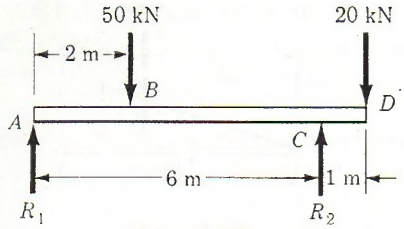


Figura P-403.

Resp. $V_{CD} = 20$ kN; $M_{CD} = 20(x - 140)$ kN · m

404. Viga cargada como se indica en la figura P-404.

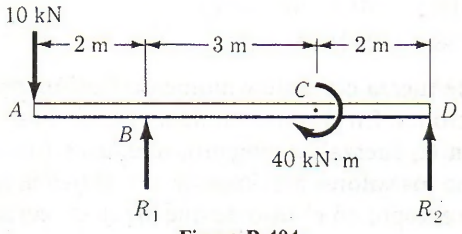


Figura P-404.

Resp. $M_{CD} = (-4x + 28)$ kN · m

405. Viga cargada como se indica en la figura P-405.

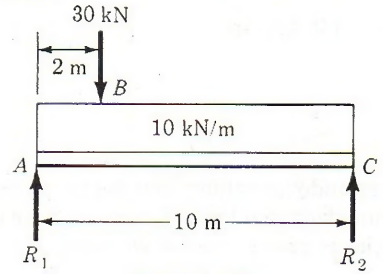


Figura P-405

Resp. $M_{BC} = (-5x^2 + 44x + 60)$ kN · m

406. Viga cargada como se indica en la figura P-406.

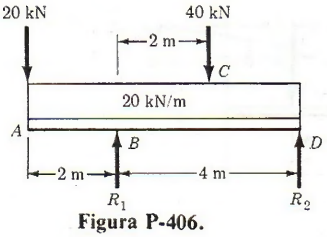


Figura P-406.

407. Viga cargada como se indica en la figura P-407.

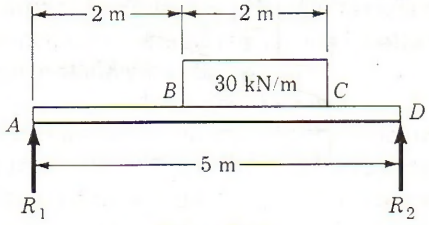


Figura P-407

Resp. $M_{máx} = 57.6$ kN · m

408. Viga cargada como se indica en la figura P-408.

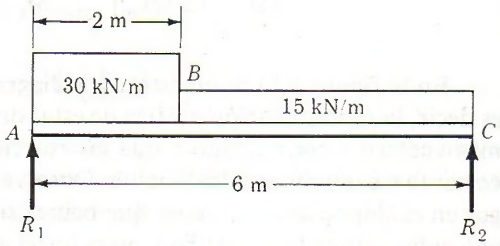


Figura P-408.

Resp. $M_{máx} = 83.33$ kN · m

409. Ménsula cargada como se indica en la figura P-409.

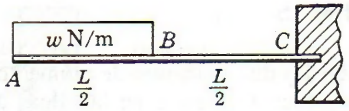


Figura P-409.

410. Ménsula cargada con la carga triangular que indica la figura P-410.

Figura P-410.

411. Ménsula con la carga triangular que indica la figura P-411, la cual varía de w N/m en el extremo libre a cero en la pared.

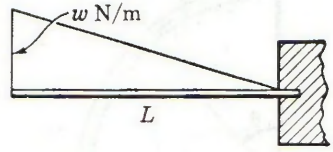


Figura P-411.

Resp. $M = (wx^3/6L) - (wx^2/2)$

412. Viga con la carga indicada en la figura P-412.

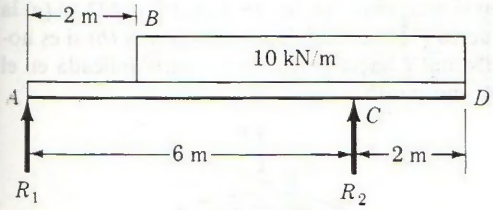


Figura P-412.

Resp. $M_{máx} = 25$ kN · m

413. Viga con la carga indicada en la figura P-413.

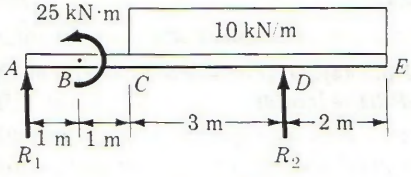


Figura P-413.

414. Ménsula con la carga indicada en la figura P-414.

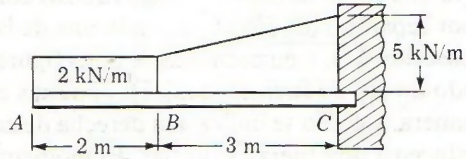


Figura P-414.

415. Ménsula con la carga indicada en la figura P-415.

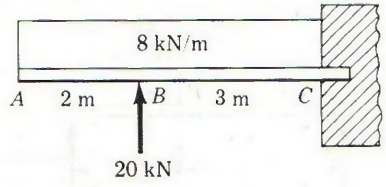


Figura P-415.

Resp. $M_{BC} = (-4x^2 + 20x - 40)$ kN · m

416. Viga con la carga triangular que indica la figura P-416.

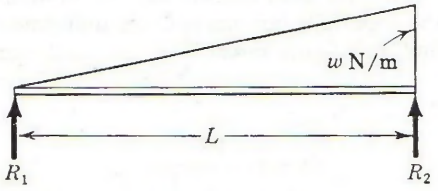


Figura P-416.

Resp. $M_{máx} = wL^2/9\sqrt{3}$

417. Viga con la carga triangular que indica la figura P-417.

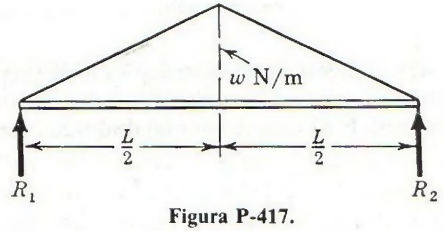


Figura P-417.

Resp. $M_{máx} = wL^2/12$

418. Voladizo o ménsula cargada como indica la figura P-418.

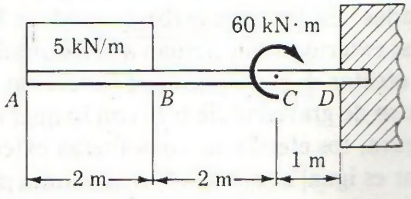


Figura P-418.

419. Viga cargada como indica en la figura P-419.

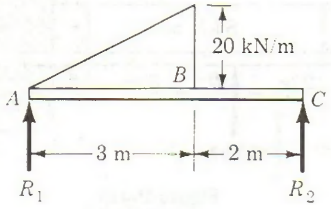


Figura P-419.

Resp. $M_{máx} = 27.89$ kN · m

420. Una carga distribuida, con un total de 60 kN, soportada por una reacción uniforme como indica la figura P-420.

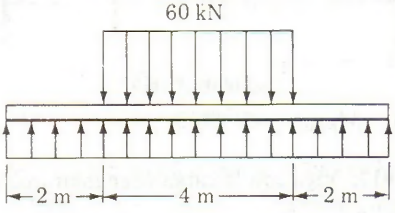


Figura P-420.

421. Determinar las distribuciones de fuerza cortante y momento flexionante en la barra curva de la figura P-421, en el caso: (*a*) de que la fuerza *P* sea vertical como está indicado, y (*b*) en el caso de que sea horizontal y dirigida hacia la izquierda.

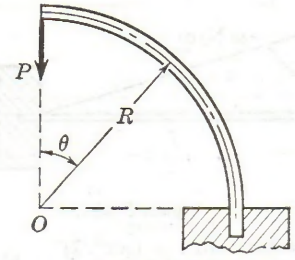


Figura P-421.

Resp. (a) $V = -P \cos \theta$; $M = -PR \text{ sen } \theta$

422. Determinar las distribuciones de V y M en el arco semicircular de la figura P-422, si (*a*) la fuerza *P* es vertical como se indica, y (*b*) si es horizontal y hacia la izquierda, pero aplicada en el mismo punto.

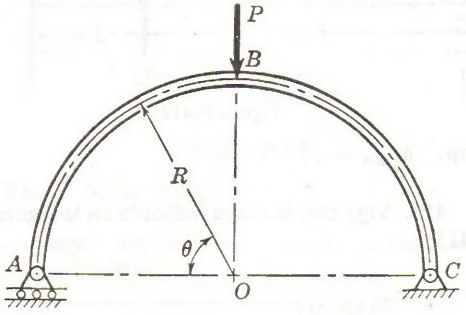


Figura P-422.

Resp. (a) $M_{AB} = -PR(1 - \cos \theta)$; $M_{BC} = \frac{1}{2}PR(1 + \cos \theta)$

4-3. INTERPRETACIÓN DE LA FUERZA CORTANTE Y DEL MOMENTO FLEXIONANTE

En la figura 4-17a se tiene una viga que soporta una carga uniforme y unas fuerzas concentradas. En las figuras (b), (c) y (d) se indican por separado los efectos de cada una de las fuerzas exteriores que actúan a la izquierda de una sección *b-b*, y en cada una de estas figuras estos efectos se han aplicado a la sección, añadiendo un par de fuerzas iguales y opuestas en el centro de gravedad de *b-b*, con lo que, de esta manera, y como se indica a la derecha de cada figura, los efectos de cada fuerza exterior se reducen a una fuerza y un par. El momento del par es igual al momento flexionante producido por las fuerzas exteriores de manera que, como se observa en la figura 4-17e, el efecto de las fuerzas exteriores aplicadas a un lado de

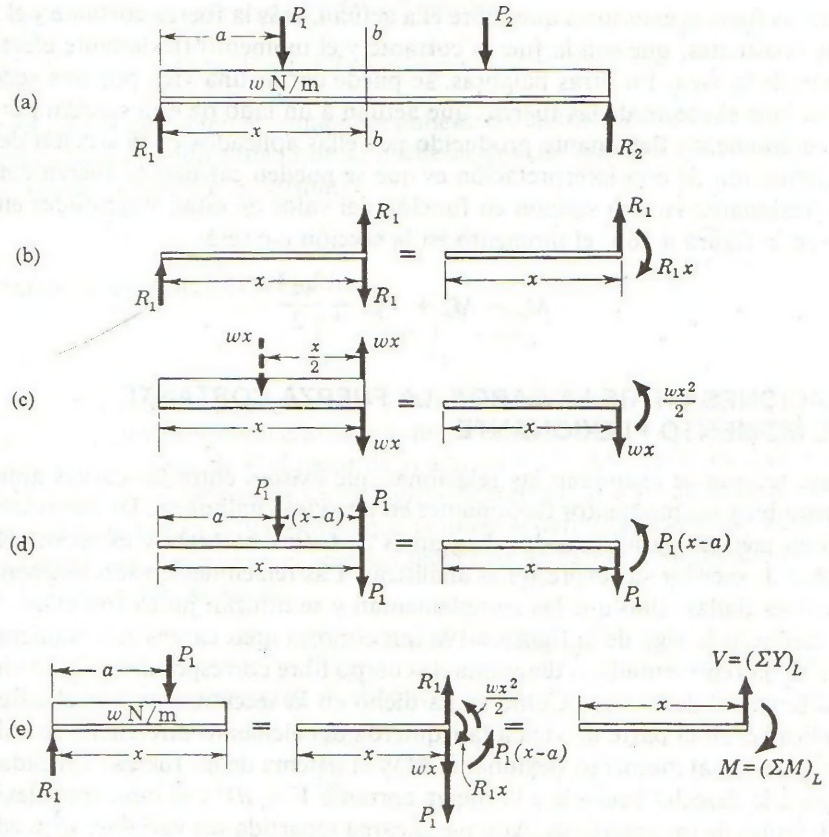


Figura 4-17. La fuerza cortante y el momento flexionante son las resultantes de las fuerzas que actúan a un lado de la sección, aplicadas a esta sección.

la sección de exploración se reduce a un sistema de fuerzas cuya resultante es la fuerza cortante y a un sistema de pares cuya resultante es el momento flexionante.

Por tanto, el efecto total del sistema de fuerzas a un lado de la sección se reduce al de una fuerza única y un par que son, respectivamente, la fuerza cortante y el momento flexionante en dicha sección. Ahora bien, como se observa, en la figura 4-18, cada una de las dos porciones en que queda dividida la viga por la sección *b-b* se mantiene en equilibrio bajo

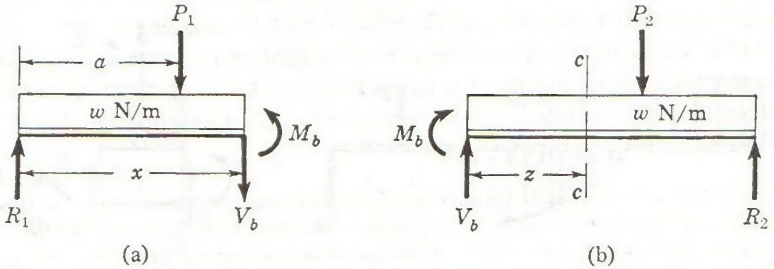


Figura 4-18. Diagrama de cuerpo libre de las dos partes de la viga de la figura 4-17, en función de la fuerza cortante y el momento flexionante.

la acción de las fuerzas exteriores que sobre ella actúan, más la fuerza cortante y el momento flexionante resistentes, que son la fuerza cortante y el momento flexionante efectivos de la otra porción de la viga. En otras palabras, se puede cortar una viga por una sección cualquiera y sustituir el efecto de las fuerzas que actúan a un lado de esta sección por la fuerza cortante y el momento flexionante producido por ellas aplicados en la sección de corte.

Una aplicación de esta interpretación es que se pueden calcular la fuerza cortante y el momento flexionante en una sección en función del valor de estas magnitudes en otra sección. Así, en la figura 4-18b, el momento en la sección *c-c* será

$$M_c = M_b + V_b z - \frac{wz^2}{2}$$

4-4. RELACIONES ENTRE LA CARGA, LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLEXIONANTE

En esta sección se examinan las relaciones que existen entre las cargas aplicadas, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes en una viga cualquiera. Dichas relaciones proporcionan un método para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante sin necesidad de escribir sus expresiones analíticas. Las relaciones no son independientes de las definiciones dadas, sino que las complementan y se utilizan junto con ellas.

Consideremos la viga de la figura 4-19a que soporta unas cargas cualesquiera. En la figura 4-19b se ha representado el diagrama de cuerpo libre correspondiente a un elemento de longitud diferencial de la viga. Como se ha dicho en la sección anterior, el sistema de las fuerzas aplicadas en la parte de viga a la izquierda del elemento diferencial se reduce a una fuerza cortante V y al momento flexionante M, y el sistema de las fuerzas aplicadas a la porción de viga a la derecha equivale a la fuerza cortante $V + dV$ y al momento flexionante $M + dM$, diferentes de los anteriores. Aunque la carga repartida sea variable, se puede suponer constante y de intensidad w en la pequeña longitud dx y, por tanto, en el elemento diferencial actúa también la fuerza $w\,dx$ hacia arriba, que completa el diagrama de cuerpo libre.

Aplicando las condiciones del equilibrio estático al elemento de la figura 4-19b, la suma de las fuerzas verticales da:

$$[\Sigma Y = 0] \qquad V + w\,dx - (V + dV) = 0$$

lo cual se reduce a

$$dV = w\,dx \qquad (a)$$

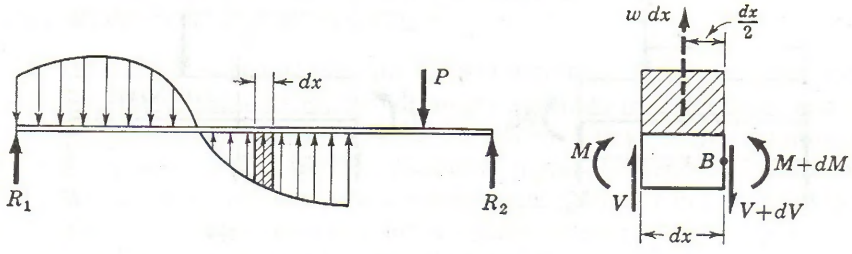


Figura 4-19.

Tomando momentos con respecto al punto B resulta,

$$[\Sigma M_B = 0] \qquad M + V\,dx + (w\,dx)\frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

y teniendo en cuenta que el tercer sumando contiene el cuadrado de una diferencial, es decir, es un diferencial de segundo orden que se puede despreciar frente a los de primer orden, la ecuación se puede escribir en la forma:

$$dM = V\,dx \tag{b}$$

Integrando la expresión (a) se obtiene,

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{x_1}^{x_2} w\,dx$$

en donde los límites de integración son V_1 en el punto x_1 y V_2 en el punto x_2. El primer miembro es, pues, fácilmente integrable, ya que se reduce a $V_2 - V_1$ y representa el incremento, positivo o negativo, de V al pasar de x_1 a x_2, es decir, ΔV. En el segundo miembro, el producto $w\,dx$ representa el área de un elemento diferencial de área del diagrama de cargas, como el rayado en la figura 4-19a, por lo que la integral definida, que mide la suma de estos términos diferenciales, representa el área del diagrama de cargas comprendida entre x_1 y x_2. Por tanto, la integración de (a) da:

$$V_2 - V_1 = \Delta V = (\text{área})_{\text{de cargas}} \tag{4-3}$$

Análogamente, integrando (b) se obtiene:

$$\int_{M_1}^{M_2} dM = \int_{x_1}^{x_2} V\,dx$$

o bien

$$M_2 - M_1 = \Delta M = (\text{área})_{\text{de cortante}} \tag{4-4}$$

puesto que el producto $V\,dx$ del segundo miembro representa el área de un elemento diferencial de área del diagrama de fuerza cortante y, por tanto, la integral representa el área de este diagrama comprendida entre las ordenadas en los puntos x_1 y x_2. La expresión (4-4) indica que la variación del momento flexionante entre dos secciones cualesquiera es igual al área del diagrama de fuerza cortante en ese mismo intervalo.*

Las fuerzas cortantes positivas se representan gráficamente por encima del eje X, es decir, hacia arriba, por lo que un área positiva es la situada por encima del eje X e indica incrementos positivos del momento flexionante. En cambio, en el diagrama de cargas, las fuerzas se suelen representar actuando, aunque hacia abajo, en la parte superior de la viga, ya que es su posición natural, por lo que el área de tales cargas, aunque se dibuje por encima del eje X, al estar dirigidas hacia abajo, es negativa y representa una disminución de la fuerza cortante.

Las expresiones (4-3) y (4-4) proporcionan un método interesante para calcular la variación de V y M y, por tanto, su valor numérico en cualquier sección, como se verá en los

* **N. de T.** Excepto en el caso teórico de aplicación puntual de un par M en un punto de viga, ya que entonces el momento flexionante, al pasar por el punto de aplicación del par, varía bruscamente en este valor de M y, sin embargo, el área de fuerzas cortantes entre dos secciones infinitamente próximas a la izquierda y a la derecha de la sección es un área elemental que tiende a cero. Esta excepción se salva sustituyendo el par por dos fuerzas verticales, $+P$ y $-P$, separadas una pequeña distancia d tal que $P \times d = M$.

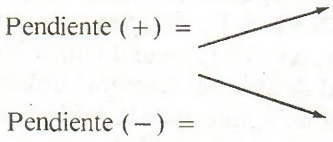
próximos ejercicios. De igual importancia que éstas son las expresiones (*a*) y (*b*) que, escritas en la forma

$$w = \frac{dV}{dx} = \text{pendiente del diagrama de cortante} \tag{4-5}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \text{pendiente del diagrama de momento} \tag{4-6}$$

permiten conocer la forma de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Como aplicación de los principios expuestos, consideremos una viga simplemente apoyada con una carga variable, como se indica en la figura 4-20a. Puesto que las pendientes positivas suben hacia la derecha y las negativas bajan, es decir,



Según (4-5) el diagrama de fuerza cortante de la figura 4-20b debe tener una pendiente que baja constantemente hacia la derecha, ya que w es siempre negativa. La inclinación varía directamente con la ordenada correspondiente del diagrama de cargas, siendo máxima en el punto en que la carga es máxima, y horizontal, de pendiente nula, en los extremos donde la intensidad de la carga es cero.

De la misma manera, por la expresión (4-6) se puede determinar la pendiente y la forma del diagrama de momentos flexionantes, como se observa en la figura 4-20c, mediante las correspondientes ordenadas del diagrama de fuerza cortante. Como en este caso V es inicialmente positiva y continuamente decreciente, el diagrama de momentos será inicialmente cre-

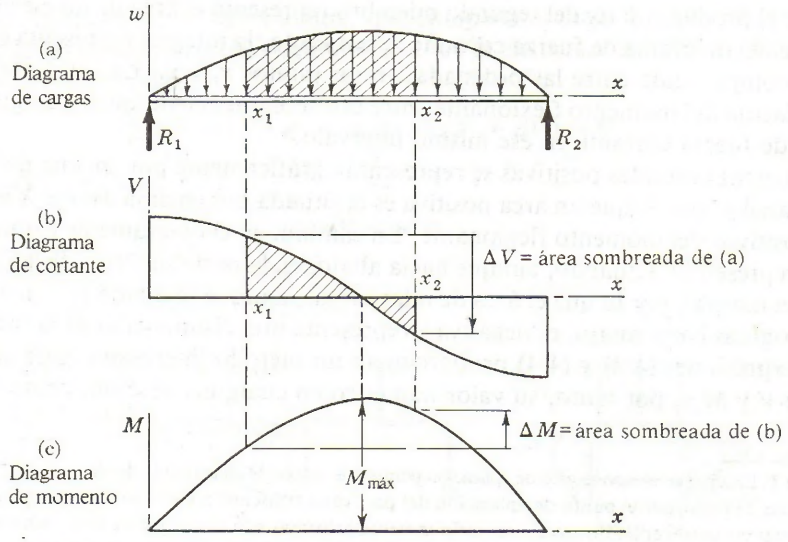


Figura 4-20. Relaciones entre los diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.

ciente, de pendiente positiva, pero la inclinación irá disminuyendo hasta anularse cuando la fuerza cortante sea cero. Al cambiar de signo la fuerza cortante e ir aumentando en valor absoluto, la pendiente del diagrama de momentos empieza a ser negativa, bajando hacia la derecha, y cada vez con una inclinación mayor. Esta forma de la curva de momentos hace que tenga un máximo en el punto de fuerza cortante nula.

Los incrementos de fuerza cortante (ΔV) y de momento flexionante (ΔM) definidos por (4-3) y (4-4) se indican en las figuras 4-20b y 4-20c. El área sombreada negativa del diagrama de cargas determina que ΔV sea negativo y, por tanto, que V disminuya al pasar de x_1 a x_2. En el diagrama de cortante el área total entre x_1 y x_2 es positiva, suma algebraica de las áreas positivas y negativas, por lo que ΔM es positivo y el momento flexionante aumenta al pasar de x_1 a x_2.

El conjunto de los principios que se acaban de exponer en esta sección y en la sección 4-2 sugiere el siguiente procedimiento para el trazado de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante:

1. Calcular las reacciones.
2. Calcular los valores de la fuerza cortante en los puntos de discontinuidad, mediante $V = (\Sigma Y)_{izq}$, o bien, $\Delta V = (\text{Área})_{cargas}$.
3. Trazar el diagrama de fuerza cortante teniendo en cuenta que ha de pasar por los puntos que se han determinado, y que la pendiente viene expresada por (4-5), es decir, igual a la ordenada del diagrama de cargas.
4. Determinar los puntos de fuerza cortante nula.
5. Calcular los valores del momento flexionante en los puntos de discontinuidad o cambio de cargas y en el puntos de fuerza cortante nula, empleando para ello $M = (\Sigma M)_{izq} = (\Sigma M)_{der}$, o bien, $\Delta M = (\text{Área})_{cortante}$, según la conveniencia en cada caso.
6. Trazar el diagrama de momentos flexionantes, que pasa por los puntos determinados en el inciso 5, y teniendo en cuenta que su pendiente en cada punto está determinada por (4-6), es decir, igual a la ordenada del diagrama de fuerza cortante en ese mismo punto.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

423. Empleando el método semigráfico descrito en esta sección, trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga de la figura 4-21, calculando sus valores en todos los puntos de discontinuidad, y sus valores máximos, tanto de V como de M.

Solución: En primer lugar se determinan las reacciones tomando momentos con respecto a los puntos D y B. Se obtienen $R_1 = 20$ kN y $R_2 = 12$ kN.

Luego se determinan los valores de V en los puntos de discontinuidad. En A, $V = 0$. A la izquierda de B, $V = (\Sigma Y)_{izq} = -6$ kN, producida por la resultante negativa de la carga distribuida de 2 kN/m aplicada sobre 3 m. El mismo resultado da la expresión (4-3), ya que la variación de la fuerza cortante entre A y B es igual al área del diagrama de cargas en este intervalo, es decir, $\Delta V = -2 \times 3 = -6$ kN. Por tanto, la ordenada del diagrama de fuerza cortante a la izquierda de B es la de A (nula) más el incremento de -6 kN, lo que da en efecto -6 kN. La fuerza concentrada R_1 aplicada en B da lugar a que la fuerza cortante aumente bruscamente en 20 kN, lo que da un valor de 14 kN a la derecha de B, habiendo pasado instantáneamente por el valor cero.

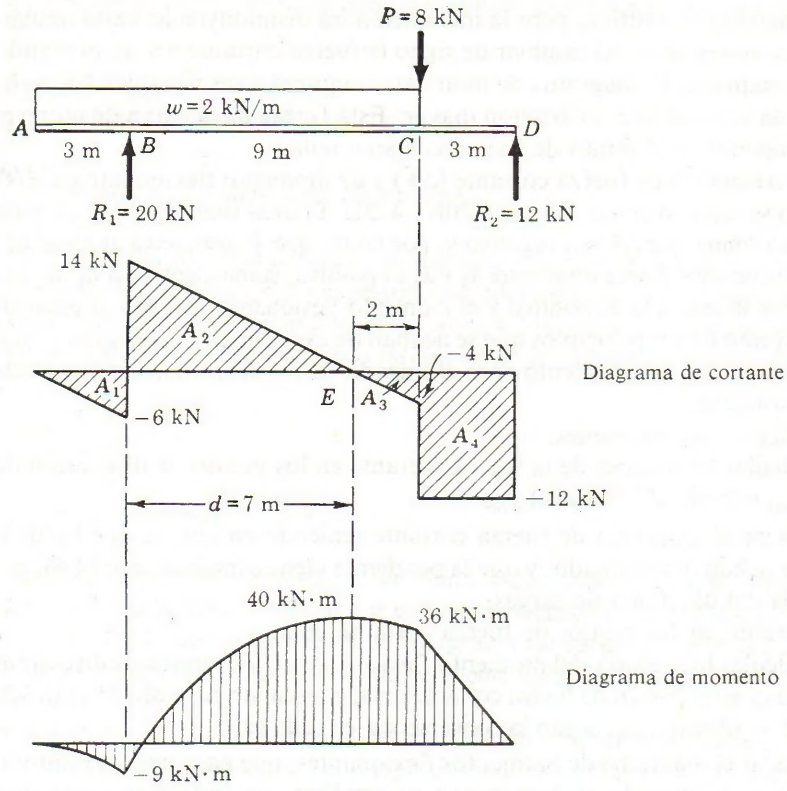


Figura 4-21. Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.

Entre B y C, el área del diagrama de cargas es $-2 \times 9 = -18$, que es la variación de V entre B y C. La fuerza cortante a la izquierda de C es $V_C = V_B + \Delta V = 14 - 18 = -4$ kN. En C, la fuerza concentrada hacia abajo de 8 kN hace variar a V de -4 kN a la izquierda de C a -12 kN a la derecha de C. Entre C y D no hay fuerza aplicada alguna, luego V permanece constante. En D, la reacción R_2 de 12 kN hacia arriba reduce a cero la fuerza cortante.

Para unir los puntos determinados hay que tener en cuenta la expresión (4-5) que dice que la pendiente es igual a la ordenada correspondiente del diagrama de cargas. Entre A y B la intensidad de carga es constante y negativa, por lo que la pendiente del diagrama de V será también hacia abajo (negativa) y constante. Entre B y C ocurre exactamente igual, y como las pendientes son las mismas, el diagrama da dos rectas paralelas. Por último, entre C y D la carga es nula, por lo que la pendiente correspondiente en el diagrama de V es nula, y se tiene una recta horizontal.

Se puede sacar la conclusión de que el diagrama de fuerzas cortantes estará formado por líneas rectas horizontales en los intervalos de carga nula y líneas rectas inclinadas en los que tengan una carga uniforme.

La fuerza cortante se anula en B, para $x = 3$ m, y también en E, cuya abscisa se determina teniendo en cuenta que, a la derecha de B, $V = 14$ kN, y como se reduce a razón de 2 kN/m, el intervalo de BE será: $BE = d = 14/2 = 7$ m.

Para calcular los momentos flexionantes se determinan en primer lugar las áreas del diagrama de fuerza cortante, señaladas con A_1, A_2, A_3 y A_4.

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(3)(-6) = -9 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2}(7)(14) = +49 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$A_3 = \tfrac{1}{2}(2)(-4) = -4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$A_4 = 3(-12) = -36 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

De acuerdo con la expresión (4-4), la variación del momento flexionante entre dos secciones cualesquiera es igual al área correspondiente del diagrama de fuerza cortante. Puesto que en A, $M = 0$ (no existen fuerzas a la izquierda de A, que puedan producir momento), en B el momento vendrá dado por A_1, es decir, $M_B = -9$ kN · m.

De la misma manera, en E se tiene:

$$M_E = M_B + \Delta M = A_1 + A_2 = -9 + 49 = +40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

El momento flexionante en C también puede calcularse como suma de $A_1 + A_2 + A_3$ cuyo resultado es $M_C = 36$ kN · m. Ahora bien, como en la determinación de cada área de cortantes, en casos más complicados, pueden cometerse pequeños errores, al sumar varias de estas áreas pueden acumularse dichos errores resultando un error de cierta importancia. Por tanto, al acercarse a la derecha es preferible emplear las áreas de cortante de la derecha, o aplicar $M = (\Sigma M)_{\text{der}}$. Así pues, en el caso que nos ocupa, en función de las fuerzas a la derecha de C, $M_C = 12 \times 3 = 36$ kN · m. Y si se considera A_4 para calcularlo, se observa que

$$M_D = M_C + \Delta M = M_C + A_4$$

de donde

$$0 = M_C - 36 \quad \text{y} \quad M_C = 36 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Siempre que la variación del momento flexionante entre los extremos de la viga sea nula, como en este caso, el área total encerrada por el diagrama de fuerza cortante también es nula*, es decir, tiene que haber tanta área positiva como negativa. Esto proporciona un medio fácil de comprobación de la exactitud de los valores intermedios del momento flexionante cuando se calculan mediante las áreas del diagrama de fuerza cortante.

Una vez señaladas las ordenadas del diagrama de momentos en los puntos calculados, su forma se determina mediante la expresión (4-6), es decir, que su pendiente es igual a la ordenada correspondiente del diagrama de fuerza cortante. Así, pues, como la fuerza cortante entre A y B varía linealmente entre cero y -6 kN, la pendiente del diagrama de momentos varía desde la horizontal en A, con un incremento negativo constante, hasta B, dando lugar a una curva de segundo grado cóncava hacia abajo, como se ve en la figura. En otras palabras, las tangentes a la curva de momentos van teniendo una pendiente cada vez más inclinada hacia abajo, esto es, más negativa.

El cambio brusco de fuerza cortante en B, de -6 a 14 kN, da lugar a que la pendiente de la curva de momentos cambie también bruscamente, de estar inclinada hacia abajo, a serlo

* **N. de T.** Excepto en el mismo caso de la nota de la pág. 103, que se salva por el mismo procedimiento allí indicado.

hacia arriba, es decir, a positiva, y desde B hacia E, la pendiente va disminuyendo, haciéndose cada vez menos inclinada y llegando a anularse cuando la fuerza cortante se hace cero en E. Desde E a C, como ésta sigue disminuyendo, la pendiente de momentos también lo hace, es decir, que se transforma en inclinada hacia abajo, y cada vez más inclinada.

En C cambia bruscamente la fuerza cortante de -4 a -12 kN, manteniendo este último valor hasta D. La pendiente del diagrama de momentos presenta las mismas variaciones, disminuyendo bruscamente y manteniéndose luego constante hasta D, obteniéndose una línea recta descendente.

Se deduce de estas consideraciones que un cambio brusco en el valor de la fuerza cortante produce un cambio brusco en la pendiente del diagrama de momentos, como en C, y que si la fuerza cortante cambia bruscamente de signo, como en B, el diagrama de momentos presenta un máximo o un mínimo relativo. Si el diagrama de fuerza cortante es constante, debido a la acción de fuerzas concentradas únicamente, como en la región CD, el diagrama de momentos está formado por segmentos rectilíneos, mientras que si la fuerza cortante varía uniformemente, a causa de cargas uniformes, el diagrama de momentos es un arco parabólico de eje vertical de simetría en la sección de fuerza cortante nula, como en E.

424. Sin escribir las expresiones de fuerza cortante y momento flexionante, trazar sus diagramas para la viga de la figura 4-22 y calcular sus valores en todos los puntos de discontinuidad. Calcular también sus valores máximos.

Solución: Calculemos las reacciones. Sustituyendo la reacción uniformemente distribuida entre C y D por su resultante R_2 y tomando momentos con respecto a A, se obtiene $R_2 = 42$ kN, y tomando momentos respecto del punto de aplicación de R_2 resulta $R_1 = 24$ kN. Dividiendo R_2 entre la longitud de 4 m sobre la que se supone uniformemente distribuida, la intensidad de esta reacción es de 10.5 kN/m.

El diagrama de fuerza cortante se inicia con un salto brusco de cero a 24 kN debido a la reacción R_1. Aplicando $\Delta V = (\text{Área})_{\text{cargas}}$, entre A y B, la variación de V es igual al área triangular del diagrama de carga $\frac{1}{2} \times 9 \times (-12) = -54$ kN; por lo que en B, $V = -30$ kN. La forma del diagrama entre A y B viene determinada por la expresión (4-5) que indica que la pendiente varía desde cero en A, incrementándose negativamente conforme aumenta la intensidad de la carga (negativa), hasta 12 kN en B.

Entre B y C la intensidad de carga es cero, por lo que la pendiente del diagrama de V es nula, es decir, horizontal.

De C a D la carga es constante y positiva (hacia arriba), con un valor de 10.5 kN/m, que produce un incremento positivo de la fuerza cortante, en este tramo, de 42 kN, con una pendiente positiva constante en el diagrama. El valor de V en el punto D es, pues, de -30 kN $+$ 42 kN $= 12$ kN. Desde D a E no hay carga alguna, por lo que V se mantiene constante. Por último, la fuerza concentrada $P = 12$ kN, negativa por ir hacia abajo, reduce a cero la fuerza cortante en E.

Antes de obtener los puntos de fuerza cortante nula, F y G, se examina el efecto de la distribución de R_2 sobre un segmento de la viga. Si se acercaran los puntos C y D la misma distancia hacia R_2 no cambiaría la magnitud ni la posición de esta reacción. Lo único sería que R_2 se distribuiría sobre una longitud más pequeña y la intensidad de w aumentaría, produciendo el correspondiente aumento en el valor de la pendiente del diagrama de fuerza cortante entre C y D, ya que V tendría que pasar de -30 a $+12$ kN en un intervalo menor. En el

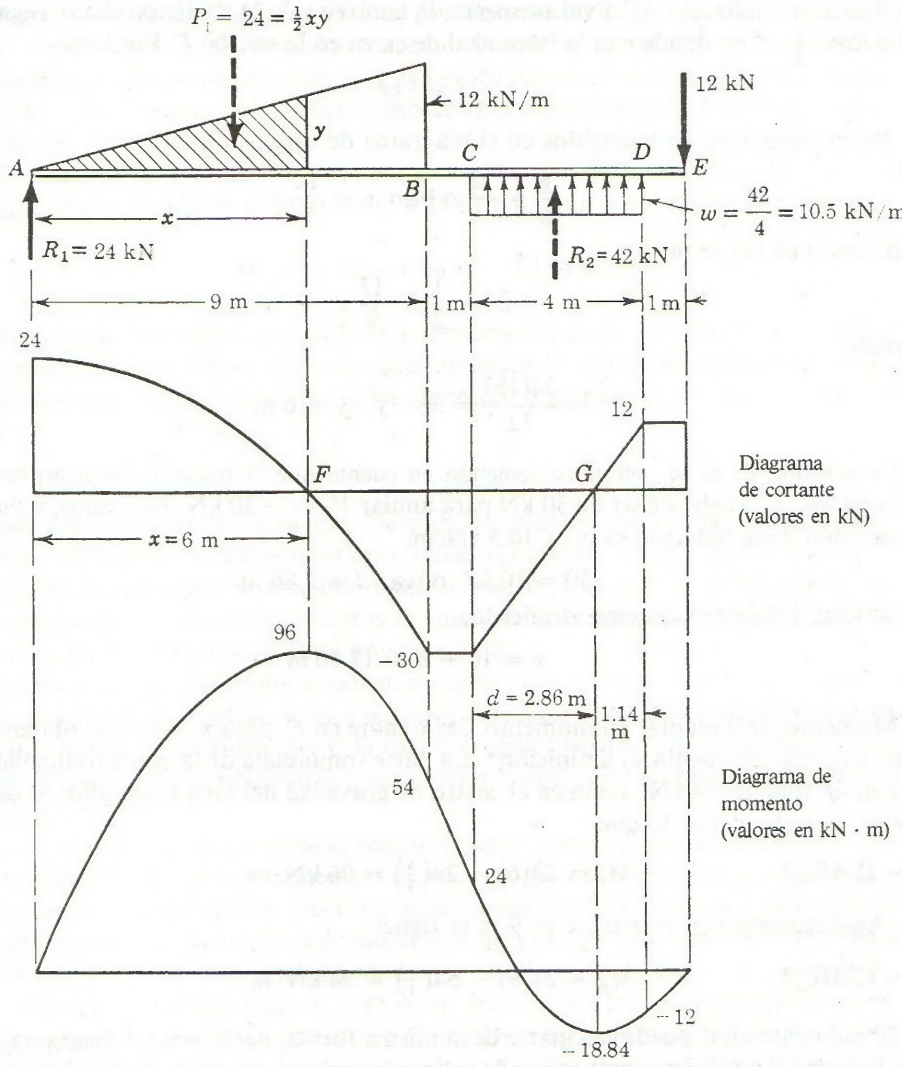


Figura 4-22. Diagramas de carga, fuerza cortante y momento flexionante.

caso límite de que la reacción se distribuya sobre una longitud infinitésima, es decir, se transforme en una carga concentrada, la intensidad de la carga sería infinita y la pendiente del diagrama asimismo infinita hacia arriba, es decir, aparecería una recta vertical, como es el caso de la reacción R_1. Por el mismo motivo, para la fuerza concentrada hacia abajo en E, la intensidad de carga es infinitamente negativa, y la pendiente correspondiente del diagrama de fuerza cortante es infinita hacia abajo y, por tanto, otra recta vertical. *Estas consideraciones explican por qué una fuerza concentrada produce un cambio brusco en la fuerza cortante, representado por un segmento rectilíneo vertical.*

Determinemos ahora la posición de las secciones de fuerza cortante nula. La fuerza cortante de 24 kN en A se reduce a cero en F por la fuerza P_1 del diagrama de carga (parte sombrea-

da) aplicada en el intervalo AF. Evidentemente, P_1 también vale 24 kN (hacia abajo, negativo) y es igual al área $\frac{1}{2}xy$, en donde y es la intensidad de carga en la sección F. Por tanto,

$$24 = \tfrac{1}{2}xy \qquad (a)$$

De la semejanza de triángulos en el diagrama de carga,

$$\frac{y}{x} = \frac{12}{9} \text{ o bien, } y = \frac{12}{9}x \qquad (b)$$

Sustituyendo en (a) se tiene:

$$24 = \frac{1}{2}x \cdot \frac{12}{9}x$$

de donde

$$x^2 = \frac{24(18)}{12} = 36 \quad \text{y} \quad x = 6 \text{ m}$$

La posición de G se determina teniendo en cuenta que la reacción hacia arriba aplicada en el intervalo CG debe de ser de 30 kN para anular $V_C = -30$ kN. Por tanto, y puesto que la intensidad de la reacción es $w = 10.5$ kN/m.

$$30 = 10.5d \text{ o sea, } d = 2.86 \text{ m}$$

y su abscisa x desde el extremo izquierdo,

$$x = 10 + d = 12.86 \text{ m}$$

Momento flexionante. El momento flexionante en F, para $x = 6$ m se obtiene directamente teniendo en cuenta su definición*. La parte sombreada de la carga triangular entre A y F, con un total de 24 kN, actúa en el centro de gravedad del área triangular, es decir, a un tercio de 6 m de F, por lo que

$$[M = (\Sigma M)_{\text{izq}}] \qquad M_F = 24(6) - 24\left(\tfrac{6}{3}\right) = 96 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Análogamente en B, para $x = 9$ m se tiene:

$$[M = (\Sigma M)_{\text{izq}}] \qquad M_B = 24(9) - 54\left(\tfrac{9}{3}\right) = 54 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

El momento en C puede calcularse de la misma forma, pero como el diagrama de fuerza cortante entre B y C es una recta se puede aplicar la expresión (4-4), es decir, el incremento de momento flexionante es igual al área de fuerza cortante. Este método se suele emplear cuando es fácil de hallar el área del diagrama de fuerza cortante, esto es, cuando dicho diagrama está formado por rectas horizontales o inclinadas. En el caso que nos ocupa, entre B y C el área de fuerza cortante es un rectángulo y, por tanto, $\Delta M = -30 \times 1 = -30$ kN · m, por lo que el momento en C es

$$[M_C = M_B + \Delta M] \qquad M_C = 54 - 30 = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

* Es preferible no emplear (4-4) si el diagrama de fuerza cortante es una curva, ya que entonces no es tan fácil el cálculo del área encerrada por dicho diagrama, en particular, en el intervalo F-B. El cálculo de tales áreas se examina en el Cap. 6, Fig. 6-13. En este caso cuando el diagrama de fuerza cortante es curvo, como en AB, calcúlese el momento flexionante aplicando $(\Sigma M)_{\text{izq}}$ o $(\Sigma M)_{\text{der}}$, en vez de emplear el área de fuerza cortante.

El momento en D se puede obtener muy sencillamente de $M_D = (\Sigma M)_{der} = -12 \times 1 = -12$ kN · m, en donde el signo negativo aparece porque la fuerza tiene sentido hacia abajo. Vemos también, como comprobación, que el área de fuerza cortante entre D y E es igual a $12 \times 1 = 12$ kN · m y, puesto que el incremento de M es positivo de D a E, para que M se anule en E ha de ser $M_D = -12$ kN · m.

Análogamente, el área de cortantes entre G y D es $\frac{1}{2} \times 12 \times 1.14 = 6.84$ kN · m y, por tanto, como ΔM es positivo al pasar de G a D el momento en G debe ser

$$M_G = -12 - 6.84 = -18.84 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Indicando la forma que debe adquirir la viga flexionante, como en la figura 4-10d del problema 401, se vería que ha de ser cóncava hacia abajo en G y D, lo que constituye una última comprobación del signo negativo que se ha obtenido en estas secciones para el momento flexionante.

Forma del diagrama de momento. Después de señalar en el sistema de ejes M-x los puntos correspondientes a los diversos valores hallados para M, veamos qué forma ha de tener la línea que ha de enlazarlos. Según (4-6), y puesto que de A hasta F las ordenadas del diagrama de V son positivas y decrecientes, la curva de momentos tendrá pendiente positiva, subiendo hacia la derecha, y decreciendo hasta anularse en F.

Entre F y B la fuerza cortante negativa, es creciente en valor absoluto, y por tanto, la pendiente de la curva de momentos se hace negativa, bajando hacia la derecha, hasta alcanzar la máxima inclinación en B. Entre B y C la fuerza cortante permanece constante, por lo que la pendiente de momentos también lo es y su representación es un segmento rectilíneo entre los valores de M_B y M_C.

Entre C y G la fuerza cortante es negativa, pero creciente, hasta anularse en G, por lo que la pendiente de la curva de momentos es negativa y se reduce gradualmente hasta cero en G. Análogamente, el incremento positivo de la fuerza cortante entre G y D da un aumento positivo de la pendiente de la curva de momentos hasta D, y como a partir de aquí hasta E la fuerza cortante es constante, también lo será la pendiente de la curva de momentos.

La curva de momentos entre C y D es un arco de parábola, simétrica respecto al eje vertical que pasa por su vértice, situado en G, ya que a igual distancia y a uno y otro lado de éste la fuerza cortante es igual y de signo contrario y, por tanto, las pendientes de la curva de M son opuestas.

Sin embargo, la curva de momentos entre A y B no es simétrica con respecto a F, ya que las ordenadas de la fuerza cortante no tienen valores iguales y opuestos a igual distancia y a ambos lados de F: la curva de momentos, en este caso, es una parábola cúbica.

PROBLEMAS

Sin escribir las expresiones de momento flexionante y fuerza cortante, trazar los diagramas correspondientes a las vigas de los problemas siguientes. Dar los valores numéricos en todos los puntos de discontinuidad y en los de fuerza cortante nula. (Pueden señalarse también los problemas 403 a 420 para que sean resueltos por el método semigráfico descrito en esta sección.)

425. Viga cargada como indica la figura P-425.

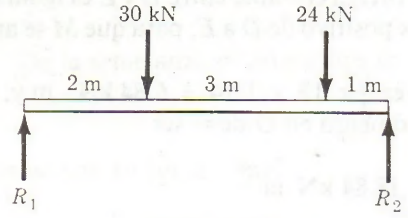


Figura P-425.

426. Viga en voladizo, sobre la que actúan dos fuerzas y un par como indica la figura P-426.

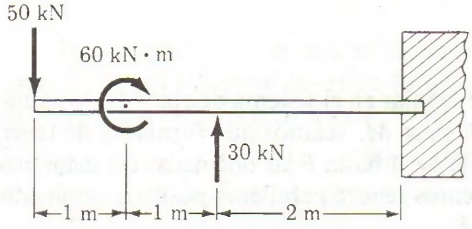


Figura P-426.

427. Viga cargada como indica la figura P-427.

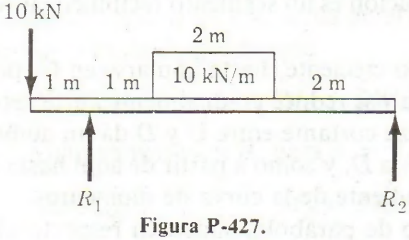


Figura P-427.

Resp. $M_{máx} = 13.8$ kN · m

428. Viga cargada como se muestra en la figura P-428.

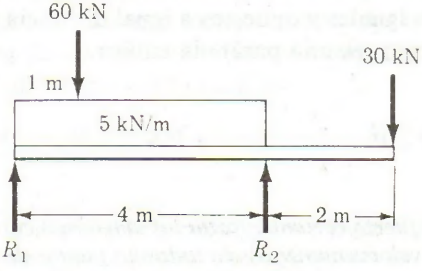


Figura P-428.

Resp. $M_{máx} = -60$ kN · m

429. Viga cargada como se indica en la figura P-429.

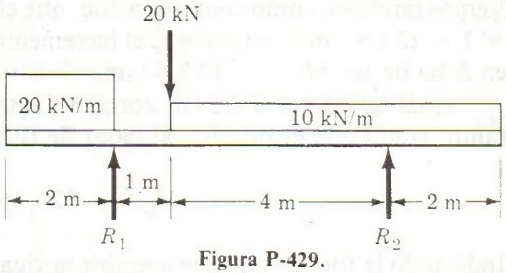


Figura P-429.

430. En la viga mostrada en la figura P-430, determine P para que el momento sobre cada apoyo sea igual al momento a la mitad del claro.

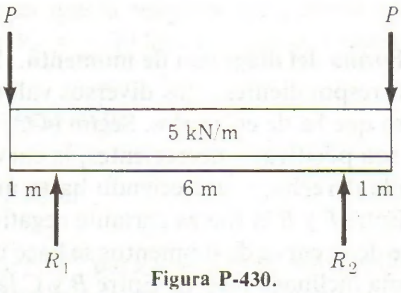


Figura P-430.

Resp. $P = 8.75$ kN

431. Viga cargada y apoyada como indica la figura P-431.

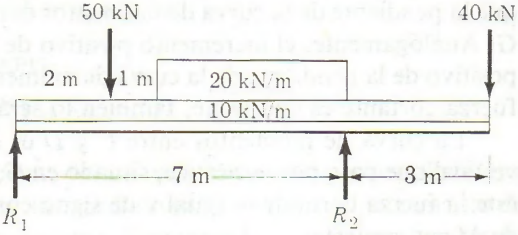


Figura P-431.

432. Una carga distribuida está sostenida por dos cargas distribuidas como se muestra en la figura P-432.

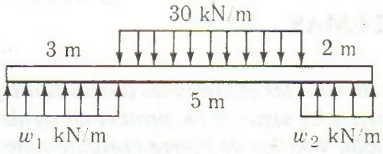


Figura P-432.

433. Viga con voladizo cargada por una fuerza y un par, como se muestra en la figura P-433.

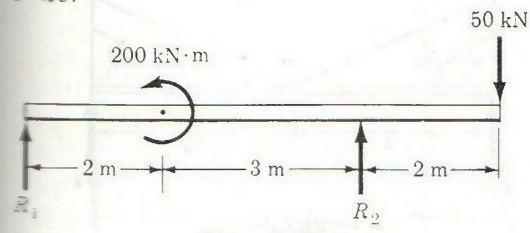


Figura P-433.

Resp. $M_{máx} = -160$ kN · m

434. Viga cargada como se muestra en la figura P-434.

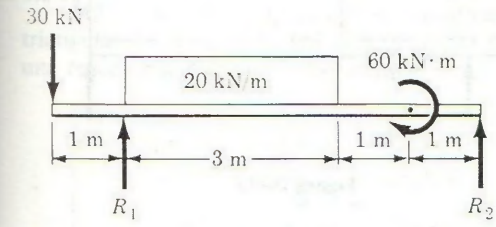


Figura P-434.

Resp. $M_{máx} = -36$ kN · m

435. Viga cargada como se muestra en la figura P-435.

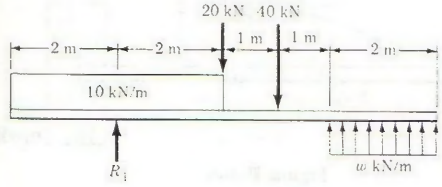


Figura P-435.

436. Viga en voladizo cargada como se indica en la figura P-436.

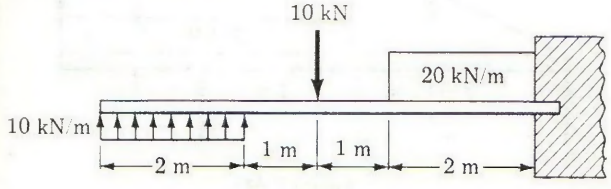


Figura P-436.

Resp. $M_{máx} = 55$ kN · m

437. Viga en voladizo cargada como se muestra en la figura P-437.

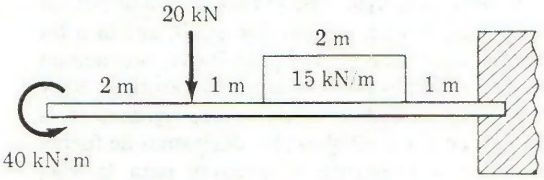


Figura P-437.

438. Una viga en voladizo apuntalada y cargada como se muestra en la figura P-438 consiste de dos segmentos unidos por un perno liso en el que el momento flexionante es nulo.

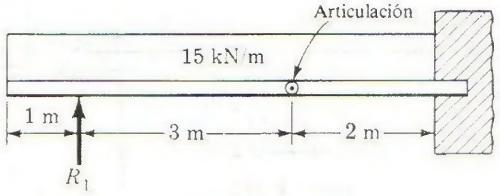


Figura P-438.

439. Una viga apoyada en tres puntos como se muestra en la figura P-439 consiste en dos segmentos unidos en un perno liso en el que el momento flexionante es nulo.

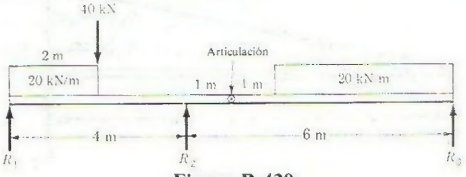
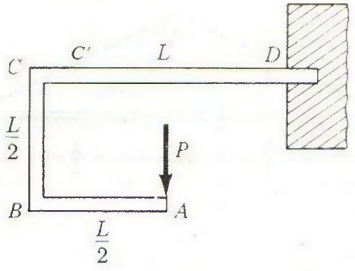


Figura P-439.

Resp. $M_{máx} = 57.6$ kN · m

440. Un marco *ABCD*, con esquinas rígidas en *B* y *C*, sostiene la carga concentrada *P* como se muestra en la figura P-440. (Dibuje los diagra-



mas de fuerza cortante y momento flexionante para cada una de las tres partes del marco.)

441. Una viga *ABCD* está sostenida por un perno en *A* y un apoyo libre en *D*, sujeta a las cargas mostradas en la figura P-441, que actúan en los extremos de los miembros verticales *BE* y *CF*. Estos miembros están unidos rígidamente a la viga en *B* y *C*. (Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga *ABCD* solamente.)

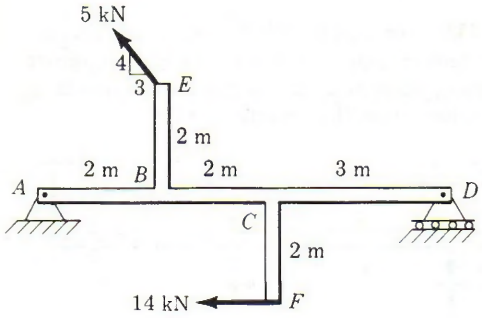


Figura P-441.

Resp. $M_{máx} = -22$ kN · m

442. Viga cargada uniformemente, como indica la figura P-442.

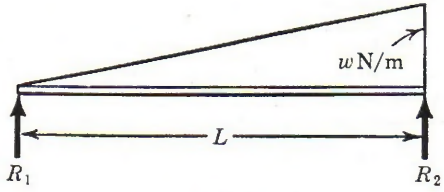
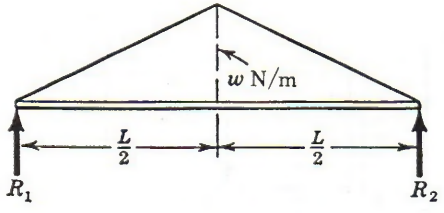


Figura P-442.

Resp. $M_{máx} = wL^2/9\sqrt{3}$ en $x = L/\sqrt{3}$

443. Viga sometida a la acción de la carga triangular, como indica la figura P-443.



Resp. $M_{máx} = wL^2/12$

444. Viga cargada como indica la figura P-444.

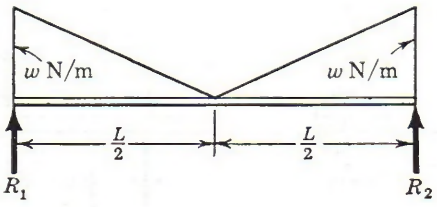


Figura P-444.

445. Viga cargada como indica la figura P-445.

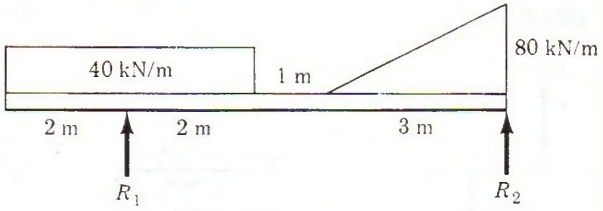


Figura P-445.

Resp. $M_{máx} = -80$ kN · m

446. Viga en voladizo cargada como se muestra en la figura P-446.

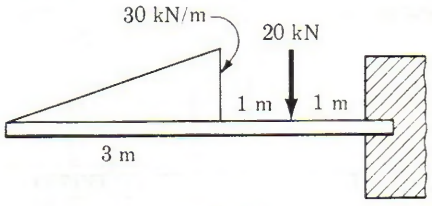


Figura P-446.

447. Viga cargada como se muestra en la figura P-447.

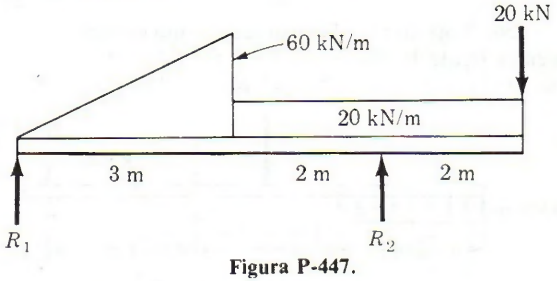


Figura P-447.

Resp. $M_{máx} = -80$ kN · m

448. Viga cargada como se indica en la figura P-448.

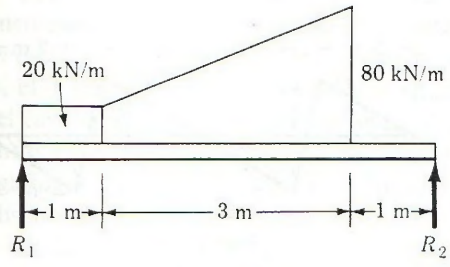


Figura P-448.

Resp. $M_{máx} = 137.5$ kN · m

449. Una viga sobre la que actúa la carga triangular de la figura P-449 está sostenida por una reacción distribuida uniformemente.

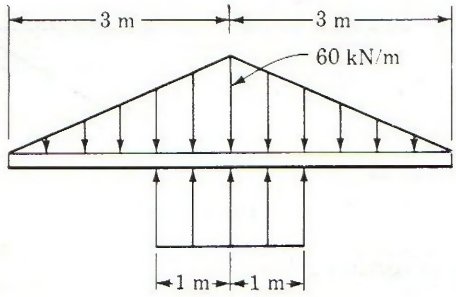


Figura P-449.

Resp. $M_{máx} = -45$ kN · m

450. Viga cargada y apoyada como se muestra en la figura P-450.

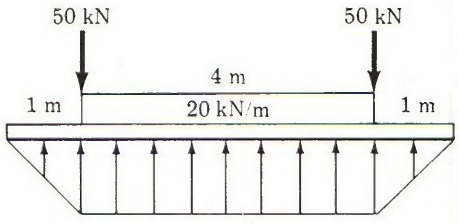


Figura P-450.

451. Viga cargada como se muestra en la figura P-451.

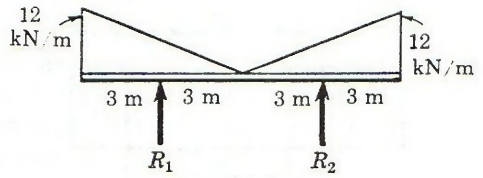


Figura P-451.

Resp. $M_{máx} = -45$ kN · m

452. Viga cargada como se muestra en la figura P-452.

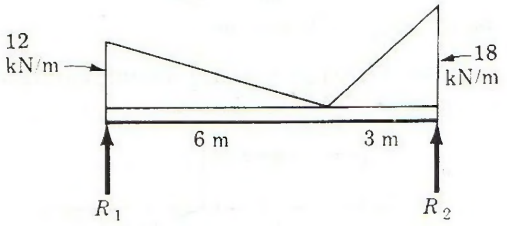


Figura P-452.

Resp. $M_{máx} = 49.5$ kN · m

453. Una carga variable uniformemente está sostenida por dos reacciones uniformemente distribuidas, como se muestra en la figura P-453.

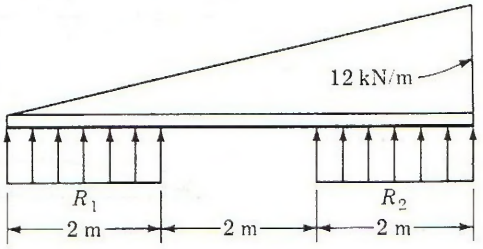


Figura P-453.

En los problemas siguientes, trazar los diagramas de cargas y de momentos flexionantes correspondientes al diagrama de fuerza cortante que se da y cuyos valores están expresados en kN. Especificar los valores numéricos en todos los puntos de discontinuidad y en los de fuerza cortante nula.

454. Diagrama de fuerza cortante como en la figura P-454.

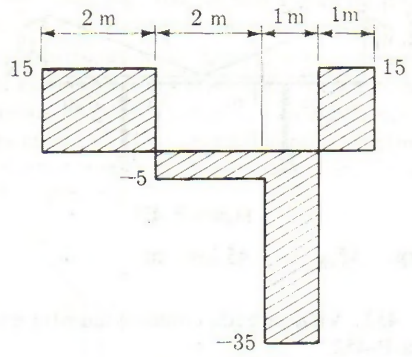


Figura P-454.

Resp. $M_{máx} = 30$ kN · m

455. Diagrama de fuerza cortante mostrado en la figura P-455.

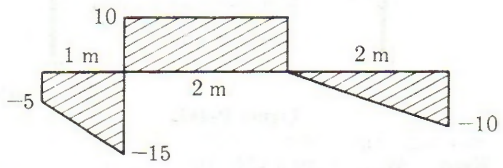


Figura P-455.

456. Diagrama de fuerza cortante como en la figura P-456.

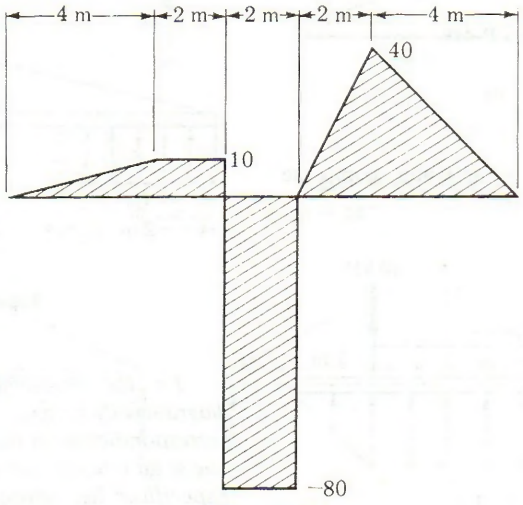


Figura P-456.

Resp. $M_{máx} = -120$ kN · m

457. Diagrama de fuerza cortante mostrado en la figura P-457.

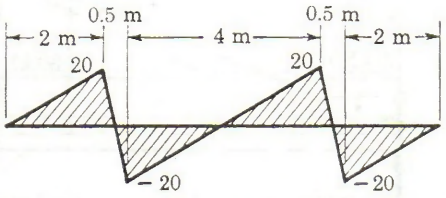


Figura P-457.

Resp. $M_{máx} = 22.5$ kN · m

458. Diagrama de fuerza cortante como el de la figura P-458.

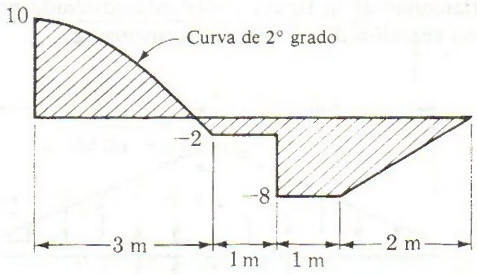


Figura P-458.

4-5. CARGAS MÓVILES

Cuando un camión, un vagón de ferrocarril u otros vehículos ruedan sobre una viga, constituyen un sistema de cargas concentradas, separadas por distancias fijas, que se llama *tren de cargas*. Como se ha visto, en vigas sobre las que solamente existen fuerzas concentradas, el máximo momento flexionante tiene lugar en el punto de aplicación de una fuerza, y en el caso de un tren de cargas móviles, el problema consiste en la determinación de los momentos en cada carga, cuando cada una está en una posición tal que el máximo momento tenga lugar bajo ella. El mayor de tales momentos máximos es el que se ha de considerar en el diseño de la viga.

En la figura 4-23, P_1, P_2, P_3 y P_4 representan un tren de cargas a distancias fijas a, b y c entre ellas. El conjunto se desplaza como un todo a lo largo de la viga simplemente apoyada de claro L. Llamando R a la resultante de las fuerzas que actúan en el vano y e a su distancia a P_2, el valor de la reacción R_1 de la izquierda es

$$R_1 = R\,(L - e - x)$$

y el momento flexionante bajo P_2 es,

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_2 = \frac{R}{L}(L - e - x)(x) - P_1 a$$

Para determinar el valor de x que hace máximo a M_2, se deriva con respecto a x y se iguala a cero,

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{R}{L}(L - e - 2x) = 0$$

de donde

$$x = \frac{L}{2} - \frac{e}{2} \tag{4-7}$$

Este valor de x es independiente del número de cargas a la izquierda de P_2, puesto que las derivadas de los términos de la forma $P_1 a$ con respecto a x son cero.

A la vista de la expresión (4-7) se puede establecer la siguiente regla: *El momento flexionante bajo una carga determinada es máximo cuando el punto medio entre la carga y la resultante de las cargas existentes en el vano, coincide con el punto medio del claro.* Localizada la posición de cada carga para que el momento bajo ella sea máximo, es posible calcular el valor de tales momentos máximos bajo cada carga.

La fuerza cortante máxima tiene lugar siempre en un apoyo, y es igual a la máxima reacción. Esta, para un tren de cargas móviles, aparece ya sea en el apoyo izquierdo, cuando la carga extrema izquierda del tren de cargas está sobre él, o bien en el apoyo derecho, cuando

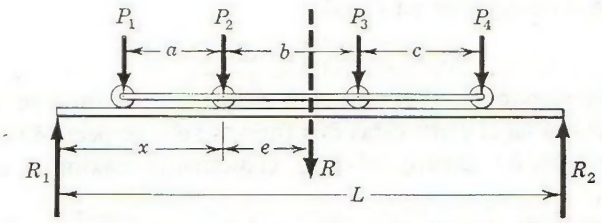


Figura 4-23. Cargas móviles.

la carga extrema derecha del tren está sobre éste. En otras palabras, la máxima reacción es aquella a la que la resultante del tren de cargas está más próxima.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

459. Un camión con trailer o semirremolque, con las cargas por eje que se indican en la figura 4-24a, rueda sobre una viga simplemente apoyada de claro $L = 12$ m. Determinar el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante.

Solución: La resultante de las tres cargas es $R = 90$ kN y está situada como indica la figura 4-24a. De acuerdo con la regla dada en (4-7) cuando el punto medio de la viga esté exactamente entre A y R tiene lugar el momento máximo en A (fig. 4-24b). Tomando momentos con respecto a R_2 se obtiene R_1,

$$[\Sigma M_{R_2} = 0] \qquad 12R_1 = 90(3.5) \qquad R_1 = 26.25 \text{ kN}$$

por lo que el momento flexionante en A es

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_A = 26.25(3.5) = 91.9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Consideremos ahora la figura 4-24c en la que el tren de cargas está colocado de manera que el punto medio entre B y R está en el centro de la viga. Tomando momentos con respecto a R_2 se halla el nuevo valor de R_1, para esta nueva posición de las cargas, que es

$$[\Sigma M_{R_2} = 0] \qquad 12R_1 = 90(4.5) \qquad R_1 = 33.75 \text{ kN}$$

por lo que el momento flexionante en B es

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_B = 33.75(4.5) - 15(2) = 122 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Si ahora se coloca el tren de cargas de manera que el punto medio entre C y R coincida con el centro del vano, para poder tener el máximo momento en C resulta que la carga A se sale de la viga, por lo que ya no sirve la hipótesis de que las tres cargas están en el claro. Esto indica la posibilidad de un momento máximo bajo C con las únicas cargas B y C aplicadas en la viga, pero entonces se han de tener en cuenta solamente estas dos cargas en el problema. Su resultante es ahora $R' = 75$ kN a 2 m de C. La posición de las cargas que produce el máximo momento en C se indica en la figura 4-24d, en la que el punto medio entre C y R' coincide con el centro del vano. Tomando momentos con respecto a R_1 resulta, para R_2,

$$[\Sigma M_{R_1} = 0] \qquad 12R_2 = 75(5) \qquad R_2 = 31.25 \text{ kN}$$

por lo que el momento flexionante en C vale

$$[M = (\Sigma M)_{der}] \qquad M_C = 31.25(5) = 156 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Se propone como ejercicio la demostración de que los máximos momentos bajo A y B cuando solamente actúan en el claro estas dos fuerzas son, respectivamente, 96.3 kN · m y 105 kN · m y que si sólo está C dentro del claro, el momento máximo tiene lugar con C en el centro y vale 150 kN · m.

Comparando todos los valores obtenidos se deduce que el más peligroso de todos los máximos es 156 kN · m, y tiene lugar bajo C cuando sólo B y C están sobre la viga.

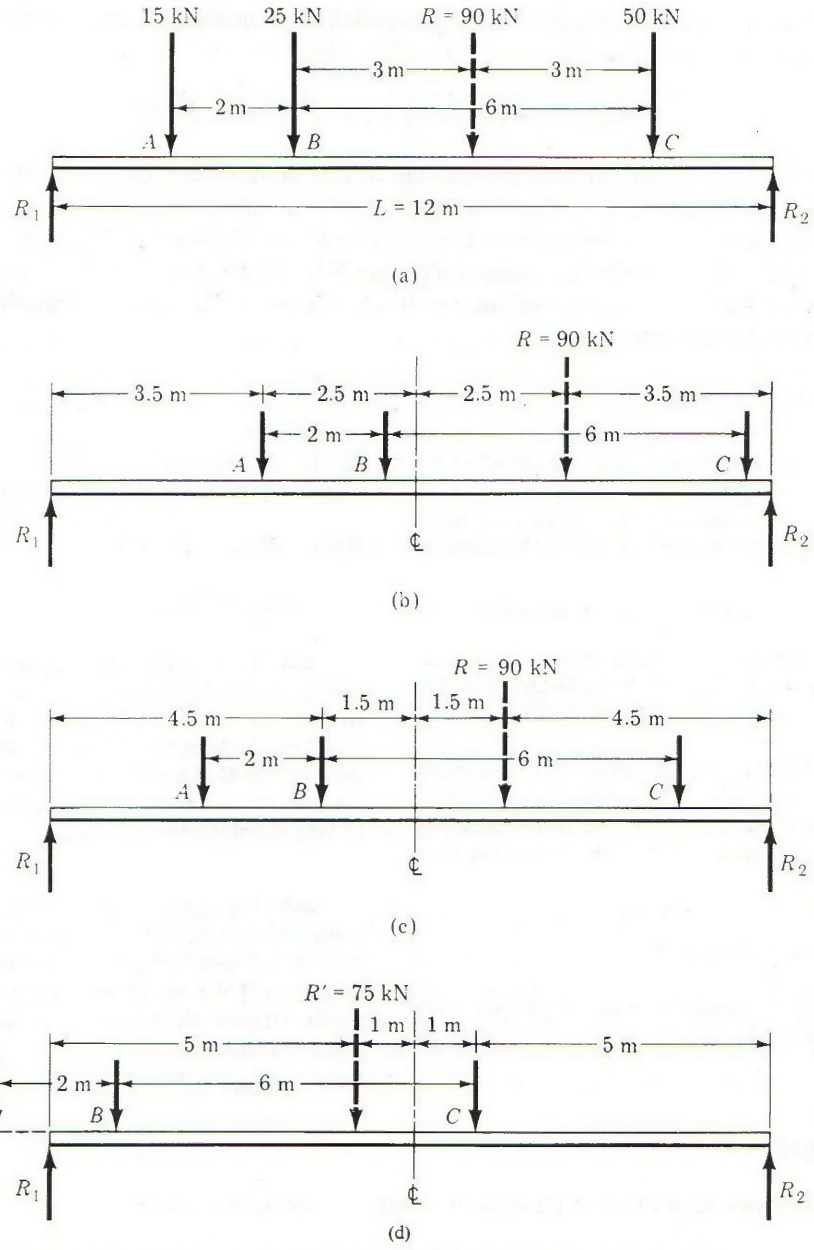


Figura 4-24. Cargas móviles. (a) Cargas iniciales. (b) Posición de las cargas que produce momento máximo en A. (c) Posición de las cargas que produce momento máximo en B. (d) Posición de las cargas que produce momento máximo en C con sólo B y C sobre el vano.

Fuerza cortante máxima. Si las tres cargas están en el vano, la resultante R puede quedar a 3 m de R_2 cuando C está sobre este apoyo y a 5 m de R_1 cuando A actúa sobre ella. Evidentemente la máxima reacción y, por tanto, la máxima fuerza cortante, ocurrirá en R_2

puesto que la resultante R puede quedar más próxima. Tomando momentos con respecto a R_1 se encuentra para R_2 el valor

$$[\Sigma M_{R_1} = 0] \qquad 12R_2 = 90(12 - 3)\ R_2 = V_{máx} = 67.5 \text{ kN}$$

También se ha de investigar la posibilidad de que la máxima fuerza cortante tenga lugar cuando sólo las cargas B y C actúan dentro del vano. La máxima reacción en este caso sucede en R_1 cuando B esté sobre este apoyo y la resultante $R' = 75$ kN esté a 4 m de R_1. Su valor es $R_1 = \frac{75}{12}(12 - 4) = 50$ kN. La condición de que sólo A y B estén en el vano no es preciso siquiera comprobarla, ya que su resultante es 40 kN, menor que la reacción máxima $R_2 = 67.5$ kN hallada anteriormente.

PROBLEMAS

460. Un camión con cargas de 40 kN y 60 kN por eje, con una distancia entre ellos de 5 m, rueda sobre una viga de 10 m. Calcular el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante.

Resp. $M_{máx} = 160$ kN ·; $V_{máx} = 80$ kN

461. Repetir el problema anterior si las cargas por eje son de 30 y 50 kN, su distancia de 4 m y la longitud de la viga de 8 m.

462. Un tractor con cargas sobre sus ejes, de 4 y 8 kN, tiene una distancia entre ejes de 3 m. Determinar el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante al cruzar un vano de 6 m.

Resp. $M_{máx} = 12.5$ kN · m;
$V_{máx} = 10$ kN

463. Tres ruedas cargadas con 30 kN cada una y distantes 2 m se desplazan sobre un vano de 12 m. Determinar el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante.

Resp. $M_{máx} = 210$ kN · m;
$V_{máx} = 75$ kN

464. Tres cargas, que actúan sobre sendas ruedas, se desplazan solidariamente sobre un claro de 16 m. Las cargas son $A = 10$ kN; $B = 20$ kN, 2 m a la derecha de A; y $C = 40$ kN, 4 m a la derecha de B. Determine el máximo momento flexionante y el máximo esfuerzo cortante sobre la viga simplemente apoyada.

465. Un camión con remolque que rueda sobre una viga de 12 m tiene cargas por eje de 10, 20 y 30 kN separadas, respectivamente, por distancias de 3 y 5 m. Determinar el máximo momento flexionante y la máxima fuerza cortante sobre el claro.

Resp. $M_{máx} = 104$ kN · m; $V_{máx} = 45$ kN

RESUMEN

Las definiciones de momento flexionante y fuerza cortante se expresan por:

$$V = (\Sigma Y)_{izq} \qquad (4\text{–}1)$$

y

$$M = (\Sigma M)_{izq} = (\Sigma M)_{der} \qquad (4\text{–}2)$$

en donde las fuerzas con sentido hacia arriba producen efectos positivos. La fuerza cortante V se calcula solamente en función de las fuerzas a la izquierda de la sección considerada. Sin

embargo, el momento flexionante puede calcularse en función de las fuerzas a la izquierda o de aquellas a la derecha, como resulte más sencillo.

Las relaciones entre cargas, fuerza cortante y momento flexionante vienen dadas por:

$$w = \frac{dV}{dx} \tag{4-5}$$

y

$$V = \frac{dM}{dx} \tag{4-6}$$

En la sección 4-4 estas relaciones proporcionan un método semigráfico para calcular la fuerza cortante y el momento flexionante, que complementa a las ecuaciones (4-1) y (4-2). De ellas se deduce:

$$V_2 - V_1 = \Delta V = (\text{área})_{\text{cargas}} \tag{4-3}$$

y

$$M_2 - M_1 = \Delta M = (\text{área})_{\text{cortante}} \tag{4-4}$$

que conducen a otro procedimiento para calcular el momento flexionante y la fuerza cortante y que, expresada en la forma,

$$\text{Intensidad de carga} = \text{pendiente del diagrama de } V$$

y

$$\text{intensidad de cortante} = \text{pendiente del diagrama de momento}$$

facilitan el trazado de la forma apropiada de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Cuando un tren de cargas se mueve sobre una viga, el momento flexionante es máximo bajo una carga. Para determinar la posición de las cargas para la que el momento es máximo bajo una de ellas, el tren de cargas tiene que estar situado de manera que el punto medio entre la carga dada y la resultante de todas las que actúan en el claro, coincida con el punto medio de la viga. Con las cargas en esta posición se determinan las reacciones, y aplicando la expresión (4-2) se calcula el momento flexionante bajo la carga determinada.

5
esfuerzos en vigas

5-1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudian y deducen las relaciones entre el momento flexionante y los esfuerzos normales por flexión que se producen, y entre la fuerza cortante vertical y los esfuerzos cortantes. Para obtener estas relaciones se hacen las hipótesis siguientes:

1. La secciones planas de la viga, inicialmente planas, permanecen planas.
2. El material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke.
3. El módulo elástico es igual a tensión que a compresión.
4. La viga es inicialmente recta y de sección constante.
5. El plano en el que actúan las fuerzas contiene a uno de los ejes principales de la sección recta de la viga y las cargas actúan perpendicularmente al eje longitudinal de aquélla.

En las secciones que siguen se examinan las aplicaciones y limitaciones de estas hipótesis y se ponen de manifiesto los motivos de haberlas tenido en cuenta.

5-2. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DE LA FLEXIÓN

Los esfuerzos normales producidos por el momento flexionante se llaman *esfuerzos por flexión* y las relaciones entre estos esfuerzos y el momento flexionante se expresan mediante la *fórmula de la flexión*. Para su deducción se sigue el mismo procedimiento que se desarrolló para deducir la fórmula de la torsión (Sec. 3-2), es decir, las deformaciones elásticas junto con la ley de Hooke determinan la forma de la distribución de esfuerzos, y mediante las condiciones de equilibrio se establece la relación entre los esfuerzos y las cargas.

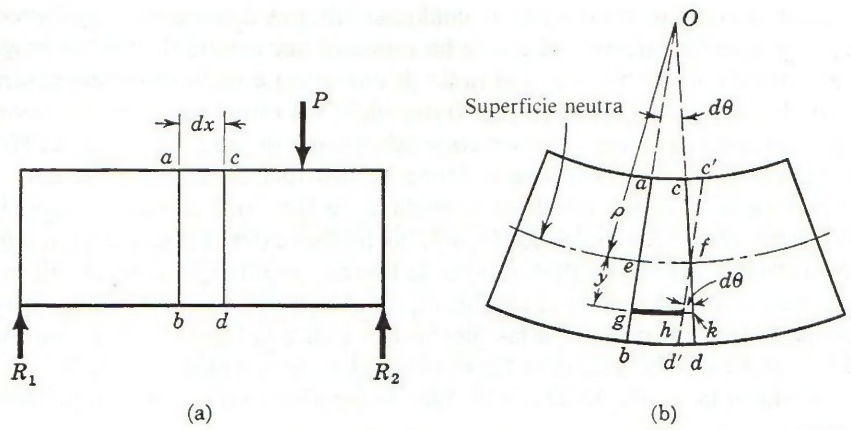


Figura 5-1. Deformaciones.

La figura 5-1a muestra dos secciones adyacentes *ab* y *cd* separadas una distancia *dx*. Debido a la flexión producida por la carga *P*, las secciones *ab* y *cd* giran una con respecto a la otra un pequeño ángulo $d\theta$, como se ve en la figura 5-1b, pero permanecen planas y sin distorsión de acuerdo con la hipótesis 1 de la sección anterior.

La fibra *ac* de la parte superior se acorta y la fibra *bd* se alarga. En algún punto entre ellas existe una fibra, tal como *ef*, cuya longitud no varía. Trazando la línea *c'd'* por *f*, paralela a *ab*, se observa que la fibra *ac* se ha acortado una longitud *cc'* y está, pues, comprimida, mientras que la fibra *bd* se ha alargado la longitud *d'd* y está sometida a tensión.

El plano que contiene todas las fibras como la *ef* se llama *superficie neutra*, ya que tales fibras no varían de longitud y, por tanto, no están sujetas a esfuerzo alguno. En seguida veremos que la superficie neutra pasa por los centros de gravedad de las secciones transversales de la viga.

Consideremos ahora la deformación de una fibra cualquiera *gh* situada a una distancia *y* de la superficie neutra. Su alargamiento *hk* es el arco de circunferencia de radio *y* y ángulo $d\theta$ y viene dado por:

$$\delta = hk = y\, d\theta$$

La deformación se obtiene dividiendo el alargamiento entre la longitud inicial *ef* de la fibra:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{y\, d\theta}{ef}$$

Llamando ρ al radio de curvatura de la superficie neutra, la longitud *ef* es igual a $\rho\, d\theta$, por lo que la deformación unitaria vale

$$\epsilon = \frac{y\, d\theta}{\rho\, d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

Suponiendo que el material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke, hipótesis 2, el esfuerzo en la fibra *gh* viene dado por:

$$\sigma = E\epsilon = \left(\frac{E}{\rho}\right) y \qquad (a)$$

Esta expresión indica que el esfuerzo en cualquier fibra es directamente proporcional a su distancia y a la superficie neutra, ya que se ha supuesto que el módulo elástico es igual a tensión que a compresión, hipótesis 3, y el radio de curvatura ρ de la superficie neutra es independiente de la ordenada y de la fibra. Ahora bien, los esfuerzos no deben sobrepasar el límite de proporcionalidad, pues en caso contrario dejaría de cumplirse la ley de Hooke en la que se ha basado la determinación de la forma de distribución de los esfuerzos.

Para completar la deducción de la fórmula de la flexión se aplican las condiciones de equilibrio. Como se ha visto en la sección 4-3, las fuerzas exteriores que actúan a un lado de la sección en estudio quedan equilibradas por la fuerza cortante y el momento flexionante resistentes. Para que se produzca este equilibrio, un elemento diferencial cualquiera de la sección de exploración está sometido a las fuerzas que indica la figura 5-2*. La intersección de la superficie neutra con la sección se llama *eje neutro*, abreviadamente E. N.

Para satisfacer la condición de que las fuerzas exteriores no tengan componente según el eje X, hipótesis 5, se tiene,

$$[\Sigma X = 0] \qquad \int \sigma_x \, dA = 0$$

en donde σ_x equivale a σ de la ecuación (a). Sustituyendo σ_x por su valor Ey/ρ y resulta,

$$\frac{E}{\rho} \int y \, dA = 0$$

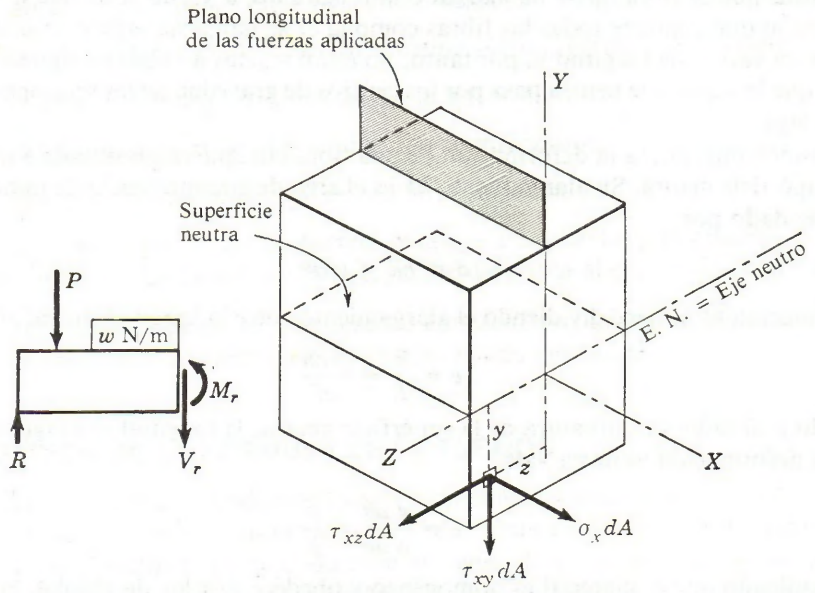


Figura 5-2. Fuerzas que actúan sobre un elemento de área de la sección recta.

* La sección transversal se ha dibujado rectangular por facilidad de representación, pero puede tener otra forma cualquiera.

Los términos E y ρ, constantes, se han sacado fuera del signo integral. Como $y\,dA$ es el momento estático del área diferencial dA respecto de E. N., la integral $\int y\,dA$ es el momento estático total del área. Por tanto,

$$\frac{E}{\rho} A\bar{y} = 0$$

Sin embargo, como solamente $\bar{y}$ en esta expresión puede ser nulo, se deduce que la distancia a E. N., eje de referencia, del centro de gravedad de la sección recta debe ser cero, es decir, que la línea neutra pasa por el centroide del área de la sección transversal.

La condición $\Sigma Y = 0$ que da $V = V_r$ conduce a la fórmula del esfuerzo cortante, cuya deducción se deja para más adelante (Sec. 5-7). De momento, se hace observar solamente que la fuerza cortante resistente V_r es la suma de todas las fuerzas cortantes $\tau_{xy}\,dA$, es decir, $V_r = \int \tau_{xy}\,dA$.

La condición $\Sigma Z = 0$ conduce a que $\int \tau_{xz}\,dA = 0$. Puesto que las fuerzas exteriores no tienen componente según el eje Z, en el sistema de fuerzas cortantes $\tau_{xz}\,dA$ está en equilibrio. En la sección sección 13-8 se examina este hecho con más detalle, y se verá cómo el plano de las fuerzas puede no ser el plano XY, sino uno paralelo a él. En estos casos, las cargas producen un momento con respecto al eje X que es equilibrado por $\int y(\tau_{xz}\,dA) - \int z(\tau_{xy}\,dA)$ para cumplir la ecuación $\Sigma M_x = 0$. Esta condición se verifica automáticamente para secciones simétricas respecto del eje Y, ya que cualquier elemento tiene otro simétrico y, por tanto, las integrales se anulan. Como consecuencia, para secciones simétricas con respecto al eje Y, el plano de las fuerzas exteriores debe coincidir con el plano XY, y si no ocurre así, la viga estará sometida a torsión.

Consideremos ahora la condición $\Sigma M_y = 0$. Las fuerzas exteriores no producen momento con respecto al eje Y, ni tampoco las fuerzas cortantes interiores. Por tanto,

$$[\Sigma M_y = 0] \qquad \int z(\sigma_x\,dA) = 0$$

Sustituyendo σ_x por Ey/ρ, resulta,

$$\frac{E}{\rho}\int zy\,dA = 0$$

La integral $\int zy\,dA$ es el producto de inercia P_{zy}, que es nulo solamente si Y y Z son ejes de simetría o ejes principales de la sección. Esto constituye la justificación de la hipótesis 5.

La última condición de equilibrio $\Sigma M_z = 0$ requiere que el momento flexionante sea equilibrado por el momento resistente, es decir, $M = M_r$. El momento resistente con respecto a E. N. de un elemento cualquiera es $y(\sigma_x dA)$ y, por tanto,

$$M = \int y(\sigma_x\,dA)$$

Sustituyendo σ_x por Ey/ρ, resulta

$$M = \frac{E}{\rho}\int y^2\,dA$$

Puesto que $\int y^2\,dA$ es el momento de inercia* I del área con respecto al eje de referencia, que en este caso es E. N., que pasa por el centro de gravedad, se obtiene finalmente,

$$M = \frac{EI}{\rho} \qquad (b)$$

Ahora se deduce por qué en la sección 4-2 era necesario considerar el eje que pasa por el centroide de la sección de exploración, como eje con respecto al cual se calcula el momento flexionante; de esta manera se tiene un eje común para calcular e igualar M y M_r.

La forma más común de escribir la ecuación (*b*) es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad \textbf{(5–1)}$$

que se utiliza en las secciones 6-2 y 6-3 como base para hallar la deformación de las vigas. Puesto que la curvatura es el recíproco del radio de curvatura, la ecuación (5-1) indica que la curvatura es directamente proporcional al momento flexionante. Este hecho ya se había utilizado (pág. 95) al identificar el signo del momento con la forma de la viga deformada: curvatura positiva, cóncava hacia arriba, correspondiente a un momento flexionante positivo, y viceversa.

Igualando la relación E/ρ deducida de (5-1) con el valor de la ecuación (*a*) se obtiene

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$$

que conduce directamente a la fórmula de la flexión†, también llamada "fórmula de la escuadría":

$$\sigma = \frac{My}{I} \qquad \textbf{(5–2)}$$

Esta expresión indica que el esfuerzo debido a la flexión en cualquier sección es directamente proporcional a la distancia del punto considerado a la línea neutra. Una forma más común de la fórmula de la flexión se obtiene sustituyendo y por la distancia c del elemento más alejado de la línea neutra. Con esto se obtiene el esfuerzo máximo:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} \qquad \textbf{(5–2a)}$$

El cociente I/c se llama *módulo de resistencia* de la sección o simplemente, *módulo de sección*, y se suele designar por S, por lo que la fórmula de la flexión adquiere la forma:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{I/c} = \frac{M}{S} \qquad \textbf{(5–2b)}$$

---

* En el Apéndice A se hace un estudio muy completo de los momentos de inercia.

† Obsérvese la semejanza con la fórmula de la torsión $\tau = T\rho/J$. Esta semejanza no sólo facilita su recuerdo, sino que indica también que las unidades de M y M_r han de ser las mismas, ya que ambos son N · m.

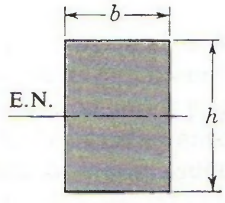
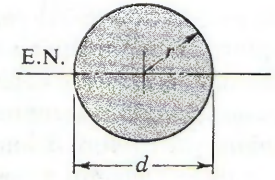
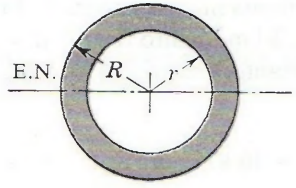
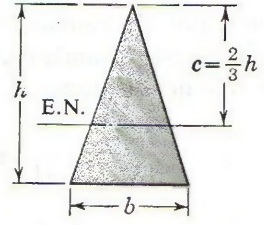
Esta fórmula es muy empleada en vigas de sección constante, y muestra cómo el esfuerzo máximo se produce en la sección de momento flexionante máximo. En la tabla 5-1 se dan los valores del módulo de resistencia de las formas más comunes de sección recta.

Un análisis muy interesante, análogo al que se empleará en el estudio de las vigas de concreto armado (Sec. 10-4) es el de la variación de los esfuerzos de flexión en una sección rectangular, como se indica en la figura 5-3.

Dado que la suma de las fuerzas horizontales en la sección debe ser nula, la fuerza total de compresión C, en la mitad superior de la sección recta, ha de ser igual a la fuerza total de tensión T en la mitad inferior. Por tanto, el momento resistente M_r está constituido por el par que forman las fuerzas C y T iguales y opuestas. La magnitud de cada una de estas fuerzas es igual al producto del esfuerzo medio por el área. Por consiguiente, como el esfuerzo medio en una distribución lineal es la mitad del esfuerzo máximo, se tiene:

$$T = C = (\sigma_{\text{med}})(\text{área}) = \left(\frac{1}{2}\sigma\right)\left(b\frac{h}{2}\right)$$

Tabla 5-1.
Módulos de resistencia de varias formas de sección transversal

Rectangular  $S = \frac{bh^2}{6}$	Circular (llena)  $S = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}$
Circular hueca (tubular)  $S = \frac{\pi}{4R}(R^4 - r^4)$	Triangular  $S = \frac{bh^3}{24}$

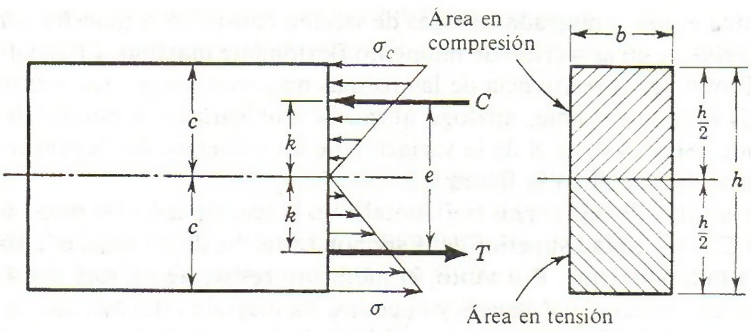


Figura 5-3. El momento resistente equivale a un par formado por las resultantes de las fuerzas de compresión y de tensión.

Las fuerzas C y T actúan en el centro de gravedad de la carga triangular a una distancia k de E. N., y como $k = \frac{2}{3}\ c = \frac{2}{3}\ (h/2)$, el brazo del par resistente es $e = 2k = \frac{2}{3}\ h$. Igualando el momento flexionante al momento resistente resulta:

$$M = M_r = Ce = Te$$

$$M = \left(\frac{1}{2}\sigma\right)\left(b\frac{h}{2}\right)\left(\frac{2}{3}h\right) = \sigma\frac{bh^2}{6}$$

que coincide con la ecuación (5-2b) para una sección rectangular.

Módulo de ruptura

Puede emplearse la ecuación (5-2a) para determinar el esfuerzo de flexión en una viga cargada hasta su ruptura en una máquina de ensayos. Puesto que en este caso se excede el límite de proporcionalidad, el esfuerzo determinado de esta forma no es el verdadero esfuerzo en el material cuando se produce la ruptura de la viga. Sin embargo, el esfuerzo ficticio así obtenido se llama *módulo de ruptura* del material y se utiliza para comparar las resistencias últimas de vigas de distintos tamaños y materiales.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

501. Una viga de sección rectangular de 150 × 250 mm soporta la carga que indica la figura 5-4. Determinar el máximo esfuerzo por flexión que se produce.

Solución: Se comienza por determinar el máximo momento flexionante. El diagrama de fuerza cortante indica que éste se anula para $x = 2$ m. El momento flexionante en dicho punto, calculado por el área del diagrama de fuerza cortante, es, para $x = 2$ m,

$$[\Delta M = (\text{área})_V] \qquad M_{\text{máx}} = \left(\frac{14+2}{2}\right)(2) = 16\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

No es necesario dibujar el diagrama de momentos.

Apliquemos ahora la fórmula de la flexión, cuidando que las unidades empleadas sean

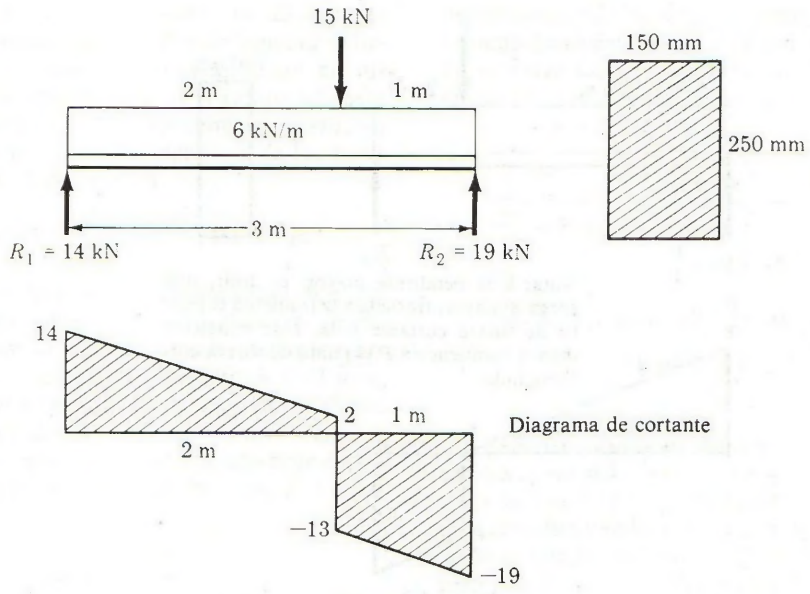


Figura 5-4.

congruentes. En la tabla 5-1 se tiene el módulo resistente para la sección rectangular, $S = bh^2/6$, con lo que

$$\left[\sigma = \frac{M}{S} = \frac{6M}{bh^2}\right] \qquad \sigma_{\text{máx}} = \frac{6(16 \times 10^3)}{(0.150)(0.250)^2} = 10.24 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

502. Una viga de madera de 100 × 300 mm y 8 m de longitud soporta las cargas indicadas en la figura 5-5. Si el máximo esfuerzo admisible es de 9 MPa, ¿para qué el valor máximo de w se anula la fuerza cortante bajo P y cuánto vale P?

Solución: Para satisfacer las condiciones indicadas en el enunciado, el diagrama de fuerza cortante debe tener la forma que representa la figura. El máximo valor de w que anula la fuerza cortante bajo P se determina por la ecuación (4-3),

$$[\Delta V = (\text{área})_{\text{cargas}}] \qquad 4w + \frac{P}{4} = 6w$$

que proporciona la siguiente relación entre P y w,

$$P = 8w \qquad (a)$$

El máximo momento flexionante tiene lugar bajo P y su valor es

$$[\Delta M = (\text{área})_V] \qquad M_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(6)(6w) = 18w \text{ N} \cdot \text{m}$$

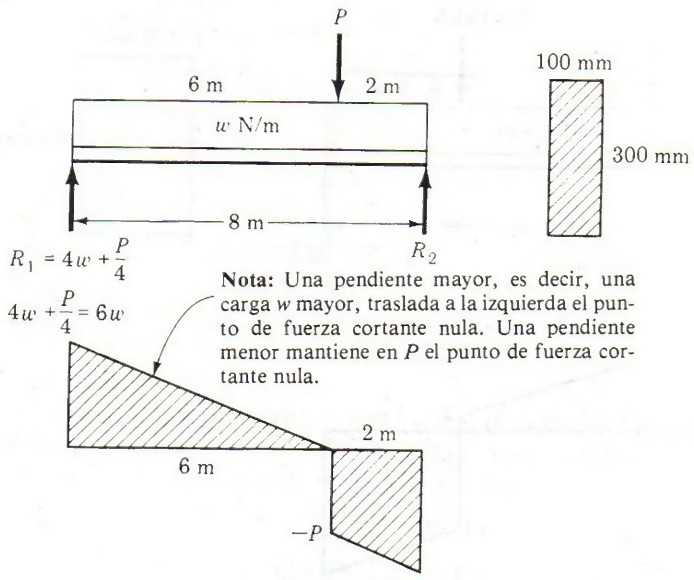


Figura 5-5.

Aplicando la fórmula de la flexión resulta:

$$\left[M = \sigma \frac{I}{c} = \sigma \frac{bh^2}{6} \right] \qquad 18w = (9 \times 10^6) \frac{(0.100)(0.300)^2}{6}$$

$$w = 750 \text{ N/m} \qquad \textbf{Resp.}$$

y según (*a*) el valor de P es:

$$P = 8w = 8(750) = 6000 \text{ N} \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

503. Una viga en voladizo, de 60 mm de ancho por 200 mm de canto y 6 m de longitud, soporta una carga que varía uniformemente desde cero en el extremo libre hasta 1000 N/m en el empotramiento. Determinar el valor y el signo del esfuerzo en una fibra situada a 40 mm del extremo superior de la viga en una sección a 3 m del extremo libre.

Resp. (*b*) $\sigma = 1.13$ MPa

504. Una viga simple o simplemente apoyada, de sección rectangular de 60 mm de ancho por 100 mm de altura, y 4 m de longitud, está sometida a una carga concentrada de 800 N en un punto situado a 1 m de uno de los apoyos. Determine el esfuerzo máximo así como el esfuerzo en una fibra situada à 10 mm de la parte superior de la sección, para una sección situada a la mitad del claro.

505. Una sierra de cinta de acero de alta resistencia, que tiene 20 mm de ancho y 0.8 mm de espesor, pasa por unas poleas de 600 mm de diámetro. ¿Qué esfuerzo máximo se desarrolla por la flexión al rodear las poleas? ¿Qué diámetro mínimo pueden tener las mismas sin que sobrepase el esfuerzo de 400 MPa? $E = 200$ GPa.

Resp. $\sigma = 267$ MPa

506. Una barra de acero, de 25 mm de ancho, 6 mm de espesor y 1 m de longitud se flexiona por la acción de pares aplicados en sus extremos, de manera que en el centro adquiere una deflexión de 20 mm. Determinar el esfuerzo máximo en la barra y la magnitud de los pares aplicados; $E = 200$ GN/m^2.

Resp. $\sigma = 95.8$ MPa; $M = 14.4$ N · m

507. En un ensayo de laboratorio sobre una viga cargada con pares en sus extremos se encontró que las fibras tales como las AB de la figura P-507 tuvieron un alargamiento de 0.03 mm, mientras que las CD se habían acortado 0.09 mm en la longitud de 200 mm entre puntos. Calcular los esfuerzos que han debido de aparecer en las fibras superior e inferior de la viga; $E = 100$ GPa.

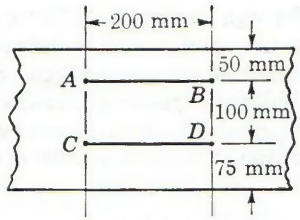


Figura P-507.

508. Determinar el espesor mínimo b de la viga de la figura P-508, de manera que el máximo esfuerzo normal no exceda de 10 MPa.

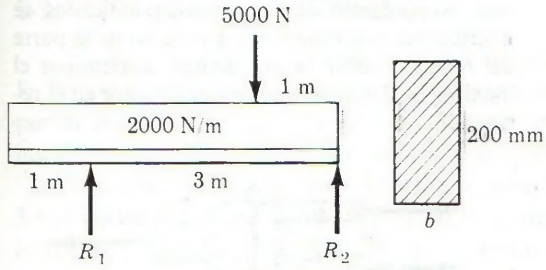


Figura P-508.

Resp. $b = 75.0$ mm

509. Una viga de tipo caja muy usada en construcciones aeronáuticas consta de una serie de tubos unidos mediante unas almas muy delgadas como se indica, en sección, en la figura P-509. Cada tubo tiene una sección recta de 130 mm^2. Si el esfuerzo medio en estos tubos no puede exceder de 70 MPa, determinar la carga total uniformemente distribuida que puede soportar esta viga sobre un claro de 4 m. Despreciar el efecto resistente de las almas de unión.

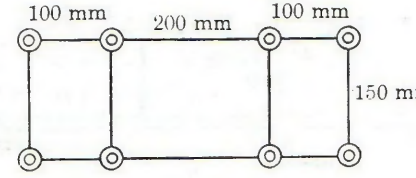


Figura P-509.

510. Una barra de 40 mm de diámetro se emplea como viga simplemente apoyada sobre un claro de 2 m. Determine la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a lo largo de la mitad derecha de la viga si el esfuerzo debido a la flexión está limitado a un valor de 60 MN/m^2.

Resp. $w = 1340$ N/m

511. Una barra rectangular simplemente apoyada, de 50 mm de ancho por 100 mm de espesor, soporta una carga de 1200 N/m uniformemente distribuida sobre toda su longitud. ¿Cuál es la longitud máxima de la barra si el esfuerzo flexionante está restringido a 20 MPa?

512. Una barra de sección circular de 20 mm de diámetro tiene una línea axial semicircular de 600 mm de radio medio, como indica la figura P-512. Si $P = 2000$ N y $F = 1000$ N, calcular el esfuerzo máximo de flexión en la sección a-a. Se desprecia la deformación general de la barra.

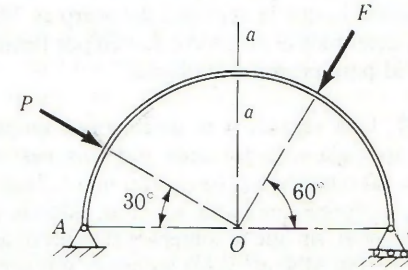


Figura P-512.

Resp. $\sigma = 331$ MPa

513. Una barra rectangular de acero de 50 mm de ancho por 80 mm de espesor, es cargada como se muestra en la figura P-513. Determine la magnitud y ubicación del máximo esfuerzo flexionante.

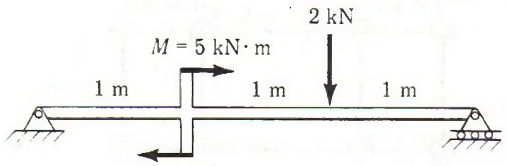


Figura P-513.

514. El marco de la figura P-514, de ángulo recto en *C*, soporta una carga uniformemente repartida equivalente a 200 N de proyección horizontal, es decir, una carga total de 1000 N. Determinar el máximo esfuerzo normal de flexión en la sección *a-a* si ésta es un cuadrado de 50 mm de lado.

Resp. $\sigma = 30.0$ MPa

515. Repita el problema 514 hallando el máximo esfuerzo debido a la flexión en la sección *b-b*.

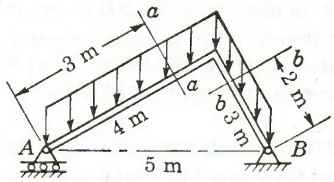


Figura P-514 y P-515.

516. Una barra rectangular de acero, de 20 mm de ancho por 40 mm de altura y 4 m de longitud, está simplemente apoyada en sus extremos. Sabiendo que la densidad del acero es 7850 kg/m^3, determine el máximo esfuerzo por flexión debido al peso propio de la barra.

517. Una viga de 4 m de longitud simplemente apoyada está formada por dos perfiles C230 × 30 remachados formando una I. Hallar la carga uniforme que puede soportar, además de su propio peso, sin que se sobrepase el esfuerzo admisible de 140 MN/m^2 si (*a*) las almas son verticales, y (*b*) las almas están horizontales. Consultar el Apéndice B para ver las propiedades de los perfiles.

518. Una viga de sección S380 × 74 (ver tablas, Apéndice B) está simplemente apoyada en sus extremos. Soporta una carga concentrada central de 40 kN y una uniformemente distribuida de 15 kN/m, incluido su peso propio. Calcular la máxima longitud que puede tener si el esfuerzo admisible es de 140 MPa. Consultar el Apéndice B para las propiedades de perfiles S.

519. Una viga de 10 m está colocada sobre dos apoyos situados a 1 m de sus extremos. Se ha construido de dos perfiles C380 × 50 remachados por sus almas y colocadas éstas en posición vertical. Determinar la carga total uniformemente distribuida en toda su longitud, que puede soportar sin exceder el esfuerzo máximo de 120 MPa.

Resp. $w = 22.0$ kN/m

520. Una viga de sección W200 × 27 (ver Apénd. B) se usa como viga en voladizo de 6 m de longitud. Calcule la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a todo lo largo de la viga, además de su propio peso, si el esfuerzo por flexión no ha de exceder el valor de 140 MN/m^2.

521. Repetir el problema 520 empleando una viga de 4 m con una sección W250 × 67.

522. La figura P-522 muestra la sección de una junta, en la que un remache de 28 mm de diámetro une dos placas de 14 mm a una de 20 mm. Suponiendo que las fuerzas indicadas se distribuyen uniformemente a lo largo de la parte del remache sobre la que actúan, determinar el máximo esfuerzo de flexión que aparece en el remache.

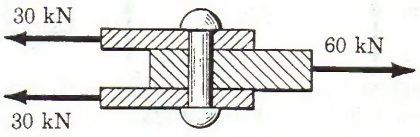


Figura P-522.

523. Una viga de madera de sección cuadrada que se emplea como durmiente de ferrocarril, está sostenida por una reacción uniformemente distribuida y soporta las dos cargas distribuidas de 48 kN cada una como indica la figura P-523.

Determinar el tamaño de la sección del durmiente si la tensión admisible es de 8 MPa.

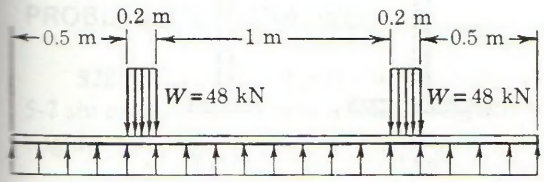


Figura P-523.

524. Una viga de madera de 150 mm de ancho y de 300 mm de altura está cargada como indica la figura P-524. Si el máximo esfuerzo admisible es de 8 MN/m^2, determinar los valores máximos de w y P que pueden aplicarse simultáneamente.

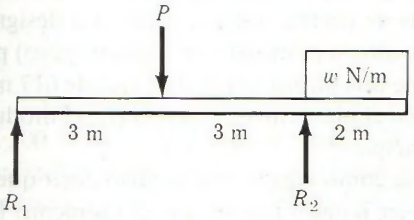


Figura P-524 y P-525.

Resp. $w = 9$ kN/m, $P = 18$ kN

525. En el problema anterior, si la carga en el voladizo es de 10 kN/m y éste tiene x metros de longitud, determinar los máximos valores de x y P que puede tener simultáneamente.

526. Una viga rectangular, de 120 mm de ancho por 400 mm de altura, está cargada como se muestra en la figura P-526. Si $w = 3$ kN/m, calcule el valor de P que produzca un esfuerzo por flexión máximo de 10 MPa.

Resp. $P = 32.5$ kN

527. Resolver el problema anterior con $w = 6$ kN/m.

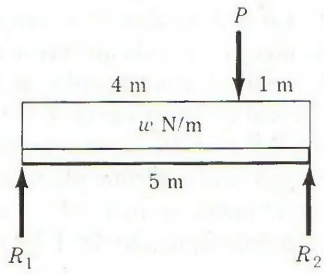


Figura P-526 y P-527.

5-3. PERFILES COMERCIALES

En una viga de sección rectangular o circular, las fibras situadas en la proximidad del E. N. están sometidas a un esfuerzo muy pequeño comparado con el esfuerzo en la parte superior o en la inferior. El hecho de que una gran parte de la sección esté poco aprovechada las hace poco apropiadas para trabajar a flexión.

La fórmula de la flexión, $M = \sigma I/c$, muestra que si el área de la sección rectangular (fig. 5-6a) pudiera distribuirse de manera que la viga siguiera teniendo la misma altura, pero con la forma indicada en la figura 5-6b, el momento de inercia aumentaría muchísimo, por lo que el momento flexionante que podría soportar sería mucho mayor.

Físicamente, el incremento de momento resistente es debido a que hay muchas más fibras a mayor distancia del E. N., fibras que soportarán un esfuerzo mayor, y con un brazo de momento también mayor respecto del E. N. Sin embargo, la sección de la figura 5-6b no es realizable; las dos partes en que ha quedado dividida no pueden estar aisladas. Es necesario emplear parte del área en la sujeción, como se indica en la figura 5-6c. Se verá más adelante cómo el área del alma soporta prácticamente la totalidad de la fuerza cortante vertical, y se estudiará cómo determinar sus dimensiones.

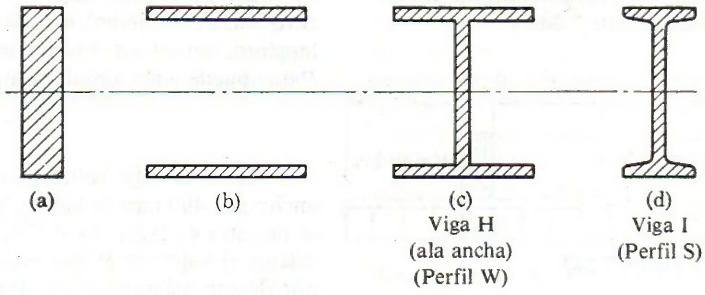


Figura 5-6.

La figura 5-6c representa una sección I de ala ancha (que suele llamarse H). Es uno de los perfiles más eficientes, ya que no sólo tiene gran resistencia trabajando a la flexión como viga, sino también como columna (Cap. 11). Otro tipo de perfil laminado es el I normal, figura 5-6d, más antiguo que el de ala ancha y que al no ser tan eficiente tiende a ser sustituido por aquél. En el Apéndice B se dan las características de perfiles estructurales. La designación de las vigas I y H (ala ancha) se da expresando su altura nominal y su masa (o peso) por unidad de longitud. Por ejemplo, un W610 × 140 tiene una altura (o peralte) real de 617 mm y una masa real de 140.1 kg/m. Las tablas dan también el momento de inercia (I), el módulo de sección (S) y el radio de giro (r) para cada eje principal.*, †

Al escoger una determinada sección para aplicarla como viga es innecesario decir que el momento que puede resistir, $M_r = \sigma I/c = \sigma S$, debe ser igual o mayor que el momento flexionante máximo aplicado M. Esta condición puede expresarse por la desigualdad:

$$S \geq \frac{M}{\sigma} \tag{5-3}$$

que indica que la sección debe elegirse de manera que su módulo resistente sea igual o mayor que la relación del momento flexionante al esfuerzo admisible. En el problema ilustrativo 528 que se dará a continuación, se aclara el procedimiento y las precauciones necesarias.

Flexión lateral en vigas

En las vigas I, los patines sometidos a compresión tienden a pandearse transversalmente en sentido horizontal si la viga es demasiado larga. Se trata de un efecto que examinaremos en el Capítulo 11. Cuando esta flexión lateral está impedida por el forjado del piso o porque los patines sometidos a compresión estén arriostrados mediante varillas espaciadas a intervalos apropiados, se puede emplear el esfuerzo admisible total. En caso contrario, debe reducirse el esfuerzo. Esta reducción en el esfuerzo admisible puede hacerse según fórmulas dadas por

* Muchos diseños están basados en la masa nominal por metro. Sin embargo, para ilustrar el uso de las tablas usaremos la masa teórica por metro. Se simboliza por r el radio de giro (o de inercia) siguiendo la notación del AISC (American Institute of Steel Construction). No se confunda con la r del radio de un círculo.

† **N. del R.** En el citado Apéndice B se presentan las tablas de propiedades de perfiles de acero estructural de fabricación americana y europea, y de otros materiales para construcción.

el American Institute of Steel Construction. En lo que sigue, supondremos que todas las vigas están arriostradas adecuadamente para evitar la deflexión lateral.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

528. Seleccionar el perfil W más ligero que puede soportar la carga indicada en la figura 5-7 sin exceder el esfuerzo admisible de 120 MPa. Determinar el esfuerzo real en el perfil escogido. Suponga que la viga está arriostrada adecuadamente para evitar la deflexión lateral.

Solución: Calculemos las reacciones en primer lugar y tracemos el diagrama de fuerza cortante. El máximo momento tiene lugar bajo la carga y vale $15 \times 4 = 60$ kN · m. Aplicando la ecuación (5-3) se tiene:

$$\left[S \geqslant \frac{M}{\sigma} \right] \qquad S \geqslant \frac{60 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\geqslant 500 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

En la tabla de perfiles H(oW) se busca uno cuyo módulo de sección sea igual o superior a 500×10^3 mm^3. Este perfil es el W200 × 52, con $S = 512 \times 10^3$ mm^3. En el grupo W250, hallamos un perfil W250 × 45 con $S = 534 \times 10^3$, que es también satisfactorio, además de ser más ligero. El grupo W310 incluye un perfil W310 × 39 con $S = 549 \times 10^3$ mm^3, que es el mejor, ya que la viga adecuada más factible en los otros grupos tiene una masa unitaria mayor que 38.7 kg/m, que es la del perfil W310 × 39.

El lector se preguntará por qué se producen tantos perfiles diferentes con módulos de sección aproximadamente iguales. La razón es que, aunque la viga más ligera es la más económica sobre la base de peso únicamente, a menudo el espacio disponible exige una viga menos peraltada que la más ligera.

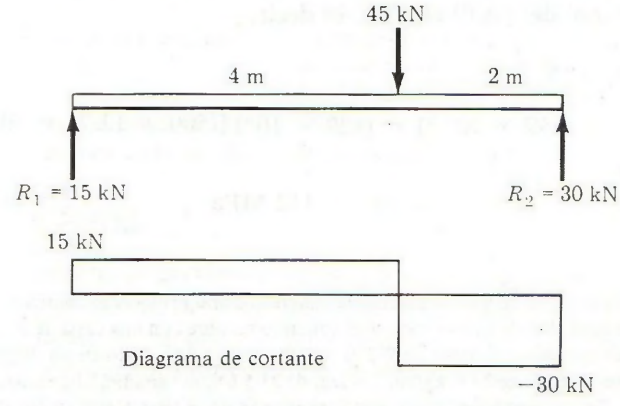


Figura 5-7. Carga útil. (Carga aplicada sin incluir el peso propio.)

La elección del perfil no está completa todavía, ya que se ha de incluir el peso de la viga*. El momento que puede resistir la viga, M_R, debe ser igual o mayor que la suma del momento M_U producido por la carga útil y el momento M_{pp} producido por su peso propio.

$$M_R \geq M_U + M_{pp}$$

Dividiendo entre σ,

$$\frac{M_B}{\sigma} \geqslant \frac{M_U}{\sigma} + \frac{M_{pp}}{\sigma}$$

en donde sustituyendo M/σ por el módulo resistente S se obtiene la ecuación de condición:

$$S_R \geq S_U + S_{pp}$$

En este ejemplo el peso de la viga no es lo suficientemente grande para cambiar la posición del punto de máximo momento flexionante combinado. Calculemos, pues, el valor del momento M_{pp} para $x = 4$ m (fig. 5-8), que vale, por definición de momento, $M = (\Sigma M)_{\text{der}}$,

$$M_{pp} = (1.14)(2) - (0.380 \times 2)(1) = 1.52 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

o por el área rayada del diagrama de fuerza cortante,

$$M_{pp} = \frac{(1.14 + 0.38)}{2}(2) = 1.52 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Por tanto, el módulo resistente necesario para este momento es

$$\left[S_{pp} = \frac{M_{pp}}{\sigma} \right] \qquad S_{pp} = \frac{1.52 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 12.7 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$= 12.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Aplicando la ecuación de condición,

$$[S_R \geq S_U + S_{pp}] \qquad 549 \times 10^3 > (500 + 12.7) \times 10^3$$

se desprende que la sección elegida es suficiente.

El esfuerzo real en la viga se determina fácilmente por la relación del módulo resistente necesario en la viga al del perfil elegido, es decir,

$$[M = \sigma' S_R = \sigma(S_U + S_{pp})]$$

$$\sigma' (549 \times 10^{-6}) = (120 \times 10^6)[(500 + 12.7) \times 10^{-6}]$$

de lo cual

$$\sigma' = 112 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

---

* A veces las vigas de acero suelen recubrirse de concreto como protección contra el fuego o por formar parte de un suelo de este material. Puede suponerse que el concreto recubre con una capa de 50 mm al rectángulo que circunscribe a la viga. Por ejemplo, un perfil de W310 × 59 quedará embebido en un rectángulo de concreto de 410 mm × 265 mm, que con un peso de 2400 kgf/m^3, o sea, de 23.5 kN/m^3 añadirá una carga de aproximadamente 2.56 kN/m al peso muerto. En los problemas que luego se proponen no se tendrá esto en cuenta, a menos que se diga lo contrario. Prácticamente suele incluirse este peso muerto dentro del peso propio que se estima a priori.

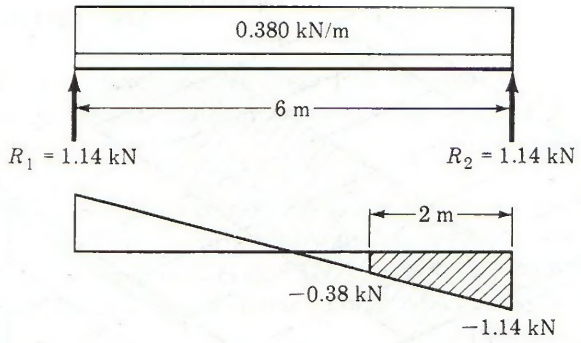


Figura 5-8. Peso muerto. (Debido al peso propio de la viga.)

PROBLEMAS

Suponga que las vigas de los problemas siguientes están arriostradas adecuadamente para evitar toda deflexión lateral. Asegúrese de incluir el peso propio de la viga.

529. Una viga simplemente apoyada en sus extremos, de 10 m de claro, soporta una carga uniforme de 16 kN/m sobre toda su longitud. ¿Cuál es la viga más ligera de perfil W que no excederá un esfuerzo por flexión de 120 MPa? ¿Cuál es el esfuerzo real en la viga seleccionada?

Resp. W610 × 82; 113 MPa

530. Repetir el problema anterior si la carga distribuida es de 12 kN/m y la longitud de la viga es 8 m.

531. Se aplica una carga concentrada de 90 kN en el centro de una viga simplemente apoyada de 8 m de claro. Si el esfuerzo admisible es de 120 MN/m^2, elegir la sección W más ligera.

Resp. W530 × 74

532. Resolver el problema anterior si la longitud de la viga se cambia a 12 m.

533. Una viga simplemente apoyada de 12 m de claro soporta una carga repartida de 30 kN/m en los 6 m centrales. Elegir la sección más ligera, si el esfuerzo admisible es de 140 MPa. Hallar el esfuerzo real máximo en la viga elegida.

Resp. W610 × 125; 133 MPa

534. Repetir el problema anterior si la carga uniformemente distribuida se cambia a 80 kN/m.

535. Una viga apoyada en sus extremos de 16 m de claro soporta una carga uniforme de 20 kN/m en toda su longitud sobre su mitad derecha. Si el esfuerzo admisible es de 120 MN/m^2, elegir la sección W más económica.

536. Una viga simplemente apoyada de 10 m de largo soporta una carga de 20 kN/m distribuida uniformemente en toda su longitud y una carga de 40 kN concentrada en su parte media. Si el esfuerzo permisible es de 120 MPa, determine la viga de forma W más ligera que pueda emplearse.

Resp. W610 × 125

5-4. ESTRUCTURAS DE PISOS

Quizá el empleo más general de las vigas es en las estructuras de edificios y para soporte de los pisos. La figura 5-9 indica la disposición más usual del entramado de un piso. El tablado está soportado por viguetas. Se supone que éstas trabajan como vigas simplemente apoyadas. Las viguetas a su vez están apoyadas en vigas de mayor tamaño, llamadas trabes o vigas maestras, que se apoyan en los soportes o columnas que trasmiten el peso de las cargas a la cimentación.

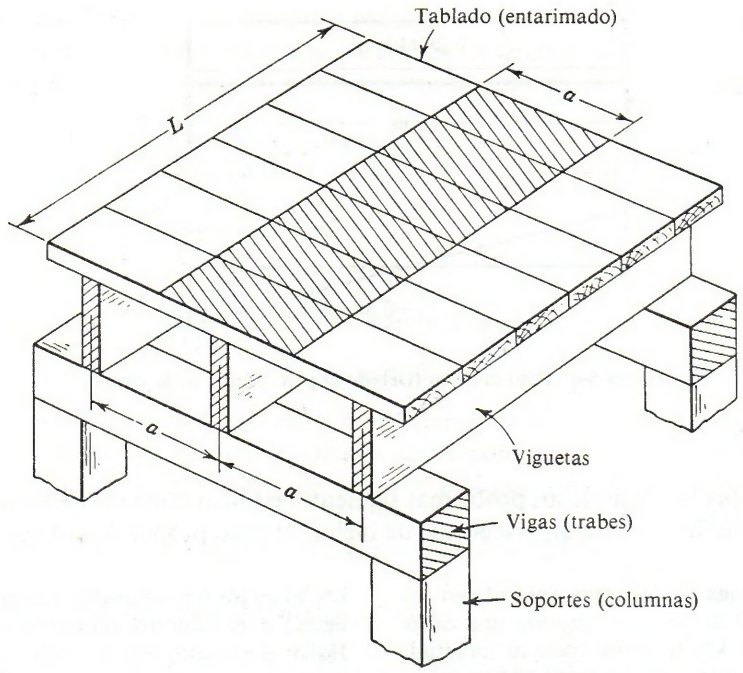


Figura 5-9. Estructura o entramado de un piso de madera.

La carga sobre el suelo está especificada en los distintos reglamentos de construcción en p N/m^2 y puede variar desde 2.5 hasta 25 kN/m^2 según se trate de viviendas, oficinas, etc., hasta ciertos edificios industriales. Si las viguetas tienen L metros de longitud y están espaciadas a entre centros, se supone que cada una soporta la carga de la superficie a por L que se indica rayada en la figura 5-9. La carga en las viguetas se supone uniformemente repartida como se indica en la figura 5-10. El peso total W es igual a la carga p N/m^2 por el área aL, y se divide entre el claro L para dar la carga uniforme $w = pa$ N/m.

En estructuras metálicas, la disposición del entramado es esencialmente la misma, excepto que las viguetas se suelen remachar o soldar al alma de las trabes, como se vio en la figura 1-12, en lugar de apoyarse sobre ellas. Las figuras del ejemplo que sigue representan una pequeña edificación y muestran cómo se construyen los diagramas de carga para las diversas vigas.

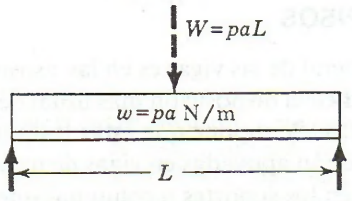


Figura 5-10. Carga sobre las viguetas.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

537. Determinar los diagramas de carga para las vigas *B*-1, *C*-1, *B*-2 y *C*-2 del edificio cuya planta parcial de estructura se representa en la figura 5-11. Las cargas en cada zona son las indicadas.

Solución: En la figura se indican con *B*-1, *B*-2, etc., las viguetas que soportan la carga de la tabla. Las trabes, o vigas que soportan las viguetas, se han denominado *C*-1, *C*-2, etc.

En la vigueta *B*-1 la carga total es de 5 kN/m^2 uniformemente distribuida sobre una longitud de 4 m y un ancho de 2 m, por lo que su diagrama de cargas es el indicado en la figura 5-12.

La viga *C*-1 es una trabe que soporta un extremo de la vigueta *B*-1 y se apoya en las vigas *B*-2. Está, pues, cargada con las reacciones de las vigas *B*-1, como se indica en la figura 5-13.

La viga *B*-2 soporta la reacción de *C*-1, así como la mitad de las cargas de los vanos o tramos adyacentes. Su diagrama de cargas se indica en la figura 5-14. Para los primeros 2 m, la carga es de 10 kN/m^2 sobre una superficie de 2 × 1 m, equivalente a 20 kN sobre una longitud de 2 m, o sea, 10 kN/m. La reacción de *C*-1 es una carga concentrada de 20 kN. Para el resto de la viga la carga total es la suma de 10 kN/m^2 sobre un área de 4 × 1 m, más 5 kN/m^2 sobre un área de 4 × 1 m, es decir, un total de 60 kN sobre una longitud de 4 m, o sea, 15 kN/m.

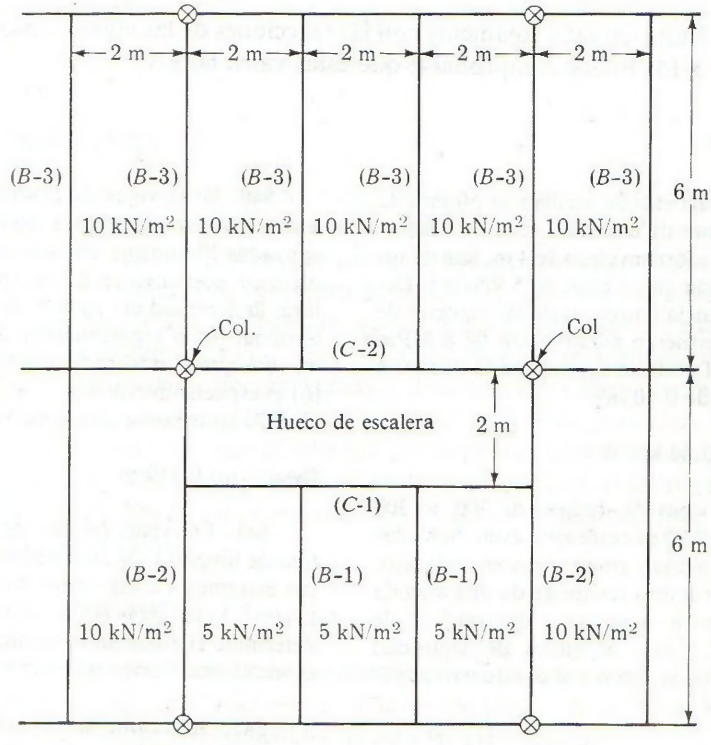


Figura 5-11. Planta del piso y cargas.

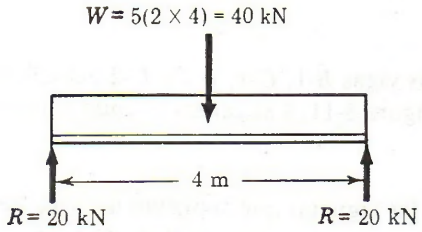


Figura 5-12. Viga (*B*-1).

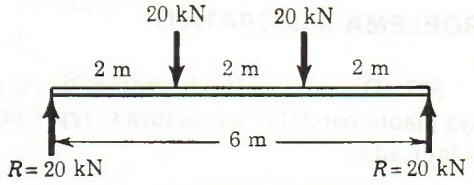


Figura 5-13. Trabe (*C*-1).

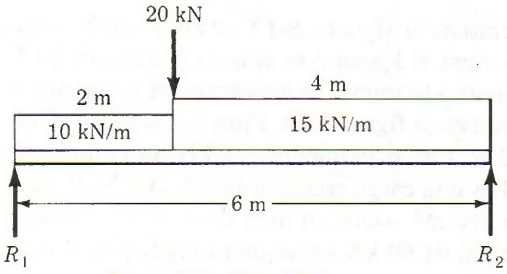


Figura 5-14. Viga (*B*-2).

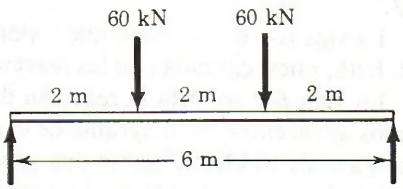


Figura 5-15. Trabe (*C-2*).

La viga *C*-2 está cargada solamente con las reacciones de las viguetas *B*-3, como se indica en la figura 5-15. Puede comprobarse que éstas valen 60 kN.

PROBLEMAS

538. Unas viguetas de madera de 50 mm de ancho por 200 mm de altura de sección, simplemente apoyadas sobre un claro de 4 m, han de soportar un piso con carga total de 5 kN/m^2. Determinar la distancia entre ejes de las viguetas de manera que el esfuerzo máximo sea de 8 MPa. ¿Qué carga total podrían soportar si la distancia entre ejes fuera de 0.40 m?

Resp. 0.267 m; 3.34 kN/m^2

539. Unas vigas de madera de 300 × 300 mm, espaciadas 0.90 m entre ejes, están hincadas en el terreno y actúan como vigas en voladizo, formando la estructura resistente de una ataguía para contención de agua cuya densidad es de 1000 kg/m^3. Calcular la altura de seguridad del agua detrás de la represa si el esfuerzo admisible es de 8 MN/m^2.

Resp. h = 2.90 m

540. Unas vigas de madera de 200 mm de ancho y 300 mm de altura, con 5 m de longitud, apoyadas libremente en sus extremos inferior y superior, sostienen un dique o presa de 3 m de altura; la densidad del agua es de 1000 kg/m^3. Determinar (*a*) el espaciamiento de los maderos de manera que el esfuerzo máximo sea de 8 MPa, y (*b*) el espaciamiento si $\sigma_{máx}$ = 12 MPa y el agua alcanza su máxima altura de 5 m.

Resp. (a) 0.939 m

541. Las vigas del piso de cierto edificio, de 6 m de longitud, están simplemente apoyadas en sus extremos y están sometidas a una carga de 4 kN/m^2. Si las vigas tienen secciones W250 × 45, determine el espaciamiento adecuado usando un esfuerzo por flexión admisible de 120 MPa.

542. Seleccione las secciones W más ligeras que puedan emplearse para las vigas y trabes del

problema 537 si el esfuerzo admisible es de 120 MPa, despreciando el peso propio de los miembros.

Resp. *B*-1: W250 × 18; *B*-2: W410 × 46; *C*-1: W310 × 28; *C*-2: W410 × 60

543. En la figura P-543 se muestra una parte de la planta del piso de un edificio, indicándose la carga que actúa sobre cada claro (carga aplicada y carga muerta). Seleccione los perfiles *W* adecuados más ligeros si el esfuerzo por flexión admisible es de 120 MPa y las vigas están correctamente arriostradas.

544. Repita el problema 543 si la carga de 15 kN/m^2 se cambia a 24 kN/m^2 y la de 9 kN/m^2, a 12 kN/m^2.

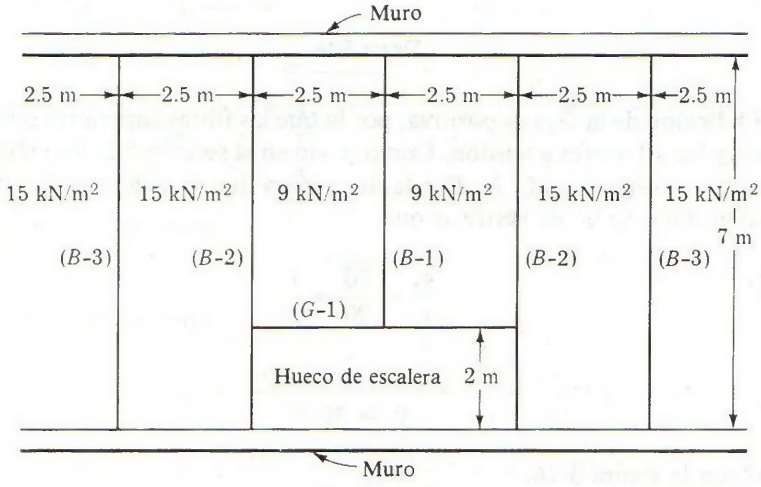


Figura P-543.

5-5. VIGAS ASIMÉTRICAS

Todas las vigas examinadas hasta ahora eran de sección simétrica con respecto a la línea neutra. Como el esfuerzo por flexión varía linealmente con la distancia al eje neutro que pasa por el centro de gravedad, tales secciones son útiles para materiales que tengan igual resistencia a la tensión que a la compresión, pero para aquellos otros que sean relativamente débiles a la tensión y más resistentes a la compresión, como es el caso del hierro fundido, es preferible emplear secciones asimétricas con respecto al E. N. Con esta forma de sección, las fibras de gran resistencia pueden colocarse a mayor distancia de la línea neutra que las fibras más débiles. La sección ideal sería aquella en la que el centro de gravedad, o sea la línea neutra, se colocara en tal posición que la relación de distancias a las fibras que van a quedar sometidas a la máxima tensión y compresión, fuera la misma que la relación de los esfuerzos admisibles para cada caso. De esta manera se alcanzarían simultáneamente los valores admisibles a tensión y a compresión.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

545. Una viga de fundición simplemente apoyada soporta una carga uniformemente repartida. Determinar el ancho b de la sección en T invertida (fig. 5-16) de manera que se alcancen simultáneamente los esfuerzos admisibles de 30 y 90 MPa a tensión y a compresión, respectivamente.

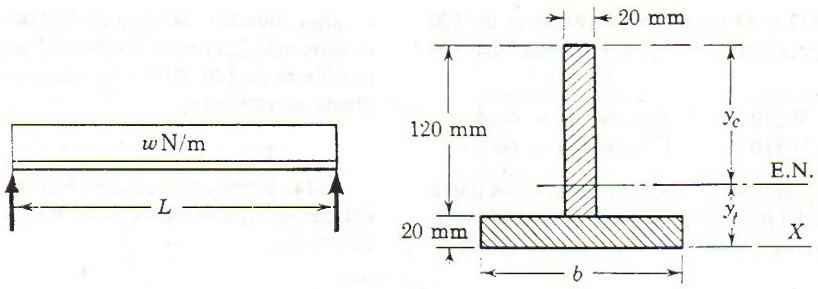


Figura 5-16.

Solución: La flexión de la viga es positiva, por lo que las fibras superiores quedan sometidas a compresión y las inferiores a tensión. Como se vio en la sección 5-2, los esfuerzos varían linealmente con su distancia al E. N. Por tanto, y para que se alcancen simultáneamente los esfuerzos admisibles, se ha de verificar que

$$\left[\frac{y_t}{y_c} = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}\right] \qquad \frac{y_t}{y_c} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

o bien,

$$y_c = 3y_t \tag{a}$$

De acuerdo con la figura 5-16,

$$y_t + y_c = 140 \text{ mm} \tag{b}$$

De (*a*) y (*b*) se obtiene

$$y_t = 35 \text{ mm} \quad \text{y} \quad y_c = 105 \text{ mm}$$

Descomponiendo la sección en los dos rectángulos rayados, y tomando momentos con respecto al eje X que pasa por el borde inferior del patín, se tiene:

$$[A\bar{y} = \Sigma ay]$$
$$(120 \times 20 + b \times 20)y_t = (120 \times 20)(20 + 60) + (b \times 20)(10)$$

Despejando b y sustituyendo el valor de $y_t = 35$, queda

$$b = 216 \text{ mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

546. Calcular los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga de la figura 5-17.

Solución: Las secciones de fuerza cortante nula y momentos máximos, positivos o negativos, son las de abscisas $x = 1.8$ m y $x = 4$ m. Los momentos en estas secciones son $M_{1.8} = 16.2$ kN • m y $M_4 = -8$ kN • m. (Comprobar estos valores.)

El signo positivo del momento para $x = 1.8$ m indica curvatura cóncava hacia arriba (Sec. 4-2), por lo que las fibras superiores trabajan a compresión y las inferiores a tensión.

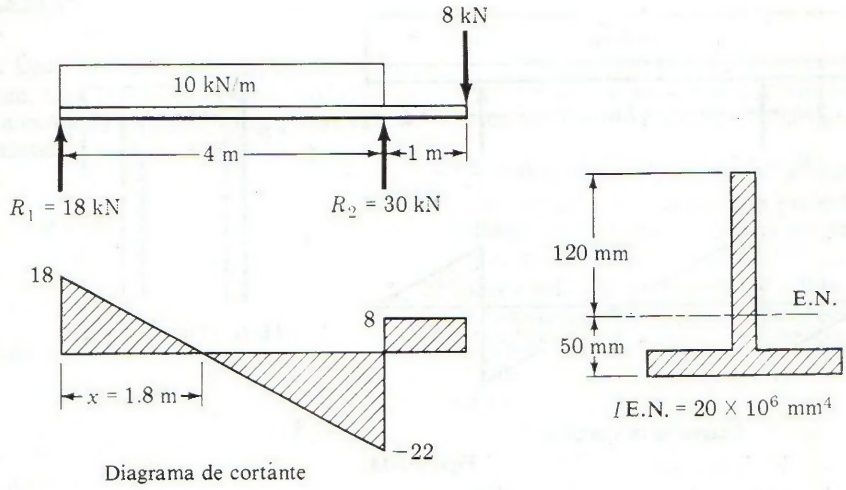


Figura 5-17.

Aplicando (5-2), los esfuerzos son:

$$\left[\sigma = \frac{My}{I}\right] \qquad \sigma_c = \frac{(16.2 \times 10^3)(0.120)}{20 \times 10^{-6}} = 97.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{(16.2 \times 10^3)(0.050)}{20 \times 10^{-6}} = 40.5 \text{ MPa}$$

Obsérvese que M se expresa en N · m, y en m e I en m^4.

Para $x = 4$ m el momento es negativo, por lo que las fibras superiores están a tensión y las inferiores a compresión. Aplicando (5-2) se obtienen los siguientes valores de los esfuerzos.

$$\left[\sigma = \frac{My}{I}\right] \qquad \sigma_t = \frac{(8 \times 10^3)(0.120)}{20 \times 10^{-6}} = 48.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{(8 \times 10^3)(0.050)}{20 \times 10^{-6}} = 20.0 \text{ MPa}$$

Se observa que el esfuerzo máximo a tensión es de 48.0 MPa en el punto $x = 1.8$ m y que el máximo a compresión es de 97.2 MPa para $x = 4$ m. En una sección asimétrica que tenga cambios de signo en la curvatura, los esfuerzos máximos no tienen lugar necesariamente ambos en la misma sección de máximo momento flexionante, y deben calcularse siempre en las secciones de máximo momento, positivo o negativo.

547. La viga con voladizos de la figura 5-18 es de fundición y los esfuerzos admisibles son de 40 MPa a tensión y de 100 MPa a compresión. Si la sección es la indicada en la figura, determinar la carga máxima uniformemente distribuida que puede soportar.

Solución: Para $x = 1.2$ m el momento flexionante es $-0.72w$ N · m y por ser negativo, las fibras superiores están sometidas a tensión. Aplicando (5-2) se deduce que el momento flexionante que puede resistir la viga, por compresión o por tensión, es

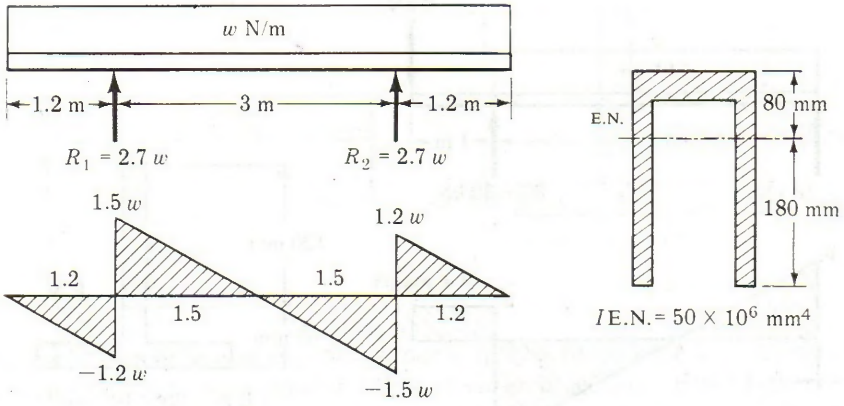


Figura 5-18.

$$\left[M_r = \frac{\sigma I}{y}\right] \qquad M_t = \frac{(40 \times 10^6)(50 \times 10^{-6})}{0.080} = 25.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_c = \frac{(100 \times 10^6)(50 \times 10^{-6})}{0.180} = 27.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

En este caso el momento flexionante que puede soportar la viga queda limitado por la tensión. Igualando el momento flexionante existente al que puede resistir se obtiene:

$$[M = M_r] \qquad 0.72w = 25.0 \times 10^3 \qquad w = 34.7 \text{ kN/m}$$

Pero antes de aceptar esta carga se ha de investigar lo que ocurre en la otra sección de momento máximo, ahora positivo, que tiene lugar para $x = 2.7$ m, en que $M = +0.405w$ N· m. Aunque el valor absoluto de este momento es menor que en el punto $x = 1.2$ m, la curvatura es ahora cóncava hacia arriba y, por tanto, las fibras superiores trabajan a compresión y las inferiores a tensión. Como antes, el momento que puede soportar, por tensión o por compresión, es

$$\left[M_r = \frac{\sigma I}{y}\right] \qquad M_c = \frac{(100 \times 10^6)(50 \times 10^{-6})}{0.080} = 62.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_t = \frac{(40 \times 10^6)(50 \times 10^{-6})}{0.180} = 11.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Igualando el menor de ellos al momento flexionante se obtiene

$$[M = M_r] \qquad 0.405w = 11.1 \times 10^3 \qquad w = 27.4 \text{ kN/m}$$

La carga máxima que puede soportar la viga es la menor de las dos obtenidas, o sea, 27.4 kN/m. Compruebe que invirtiendo la viga, la carga admisible se reduce a 15.4 kN/m.

PROBLEMAS

548. Una viga simplemente apoyada, de 4 m de longitud, tiene la sección indicada en la figura P-548. La carga repartida uniformemente vale w N/m. Calcular w si $\sigma_t \leq 30$ MN/m^2 y $\sigma_c \leq 70$ MN/m^2.

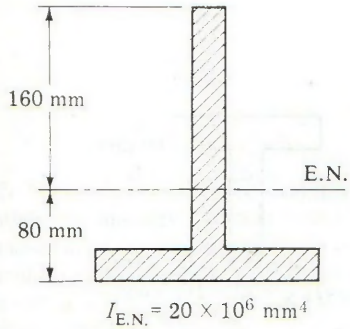


Figura P-548.

Resp. $w = 3750$ N/m

549. Determinar los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga de la figura P-549. La sección es una T con las dimensiones y propiedades que se indican en la figura.

Resp. $\sigma_t = 20.0$ MPa; σ_c 10.0 MPa

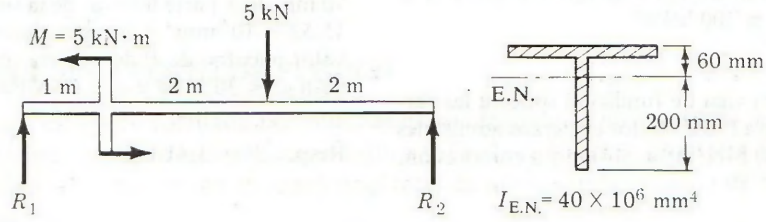


Figura P-549.

550. Calcule el valor máximo del esfuerzo por flexión, a tensión o a compresión, para la viga en voladizo mostrada en la figura P-550.

551. En la figura P-551 se muestra la sección de una viga cargada de manera tal que su momento flexionante alcanza los valores extremos de $+1.5P$ N · m y $-2.2P$ N · m, siendo P la carga aplicada, en newtons. Calcule el valor máximo que puede adquirir P si el esfuerzo de trabajo es de 30 MPa a tensión y de 70 MPa a compresión.

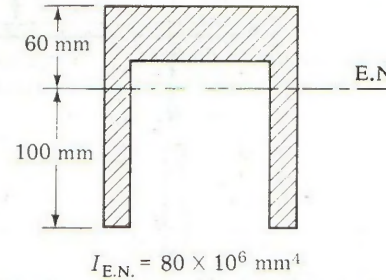


Figura P-551.

Resp. $P = 16.0$ kN

552. Resuelva el problema 551 suponiendo ahora que los momentos extremos son $+3.2P$ N· m y $-5.8P$ N· m.

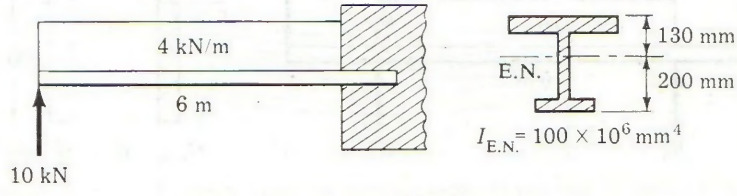


Figura P-550.

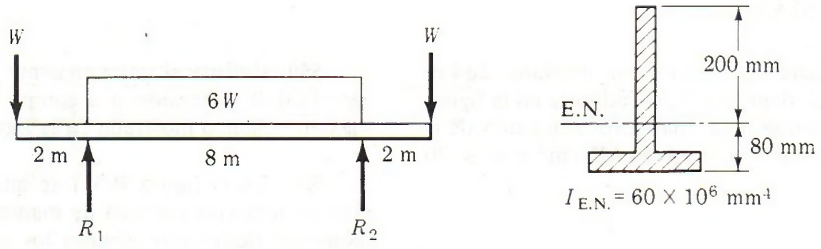


Figura P-553.

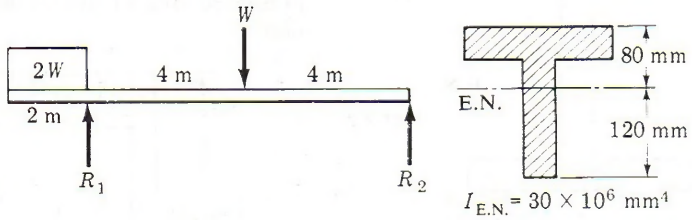


Figura P-554.

553. Calcule el máximo valor de W que pueda resistir la viga de la figura P-553 si $\sigma_t \leq 20$ MN/m^2 y $\sigma_c \leq 60$ MN/m^2.

Resp. $W = 3$ kN

554. ¿Cuál es el valor de W que pueda aplicarse a la viga mostrada en la figura P-554 si $\sigma_t \leq 60$ MPa y $\sigma_c \leq 100$ MPa?

555. Una viga de fundición soporta las cargas de la figura P-555. Si los esfuerzos admisibles son de 20 y 80 MN/m^2 a tensión y a compresión, respectivamente, calcular los límites de longitud entre los que pueden variar los voladizos.

Resp. $x = 2.0$ a 2.5 m

556. Una viga de sección en T soporta las tres fuerzas concentradas que se indican en la figura P-556. Comprobar que la línea neutra está a 70 mm de la parte inferior de la sección y que $I = 15.52 \times 10^6$ mm^4. Con estos datos, determinar el valor máximo de P de manera que los esfuerzos sean $\sigma_t \leq 30$ MPa y $\sigma_c \leq 70$ MPa.

Resp. $P = 1.41$ kN

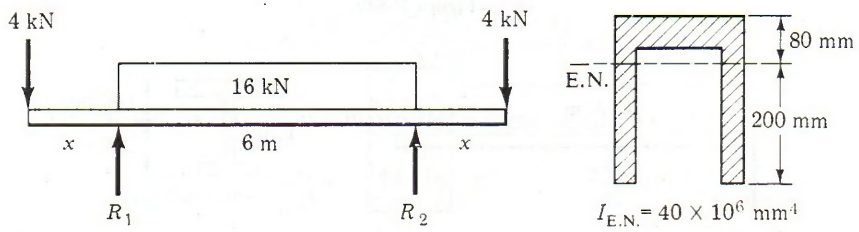
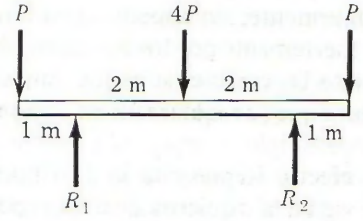


Figura P-555.



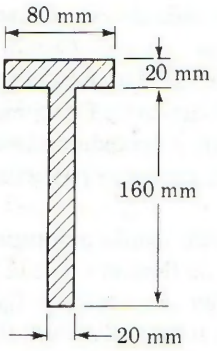


Figura P-556.

557. Una viga de fundición de 10 m de longitud está apoyada como indica la figura P-557 y soporta una carga uniformemente repartida de w N/m incluido su propio peso. Los esfuerzos admisibles son $\sigma_t \leq 20$ MN/m^2 y $\sigma_c \leq 80$ MN/m^2. Determinar el máximo valor de w si $x = 1$ m.

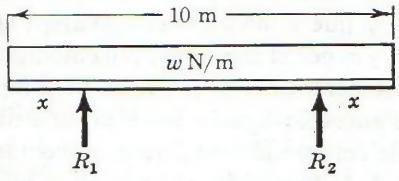


Figura P-557.

Resp. $w = 1.92$ kN/m

558. En el problema anterior, determinar los valores de x y w, de manera que esta última sea máxima.

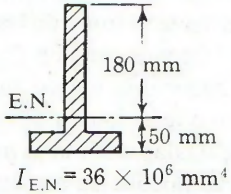


Figura P-558.

Resp. $x = 1.59$ m; $w = 3.16$ kN/m

5-6. ANÁLISIS DEL EFECTO DE FLEXIÓN

Si una viga estuviera formada por muchas capas delgadas colocadas una sobre otra, la flexión produciría el efecto que indica la figura 5-19. Las diversas capas, independientes, deslizarían unas sobre las otras y la resistencia total de la viga sería la suma de la resistencia de las diversas capas.

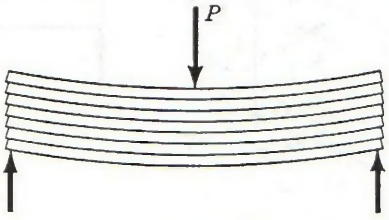


Figura 5-19. Deslizamiento entre las distintas capas de una viga formada de capas macizas sobrepuestas.

Una viga formada de esta manera es mucho menos resistente que una viga única de las mismas dimensiones totales. Como demostración práctica de este efecto, curvemos un paquete de naipes entre las manos, sujetándolo suavemente, sin impedir que los naipes puedan deslizar entre sí al curvarse. Después, sujétense fuertemente por los extremos, de manera que no puedan deslizar, y aproximándose, por tanto, a las características de una sección única y maciza, e inténtese curvar el paquete. Se observará que se requiere un esfuerzo mucho mayor que antes.

La figura 5-20a ayuda a comprender este efecto. Representa la distribución de los esfuerzos normales de flexión sobre la porción de viga a la izquierda de una sección de exploración *m-n* de la viga maciza de la figura 5-20b.

Sumando las fuerzas horizontales que actúan en toda la altura de la sección, las fuerzas de compresión quedan equilibridas por las de tensión, como se requiere por la condición de equilibrio $\Sigma X = 0$ (Sec. 5-2). Sin embargo, sumando las fuerzas horizontales que actúan en parte de la altura de la sección, por ejemplo, desde los elementos superiores *a-b* hasta los *c-d*, la fuerza de compresión total C_1, sobre el área *abcd*, igual al valor medio del esfuerzo por el área de *abcd*, sólo puede equilibrarse mediante una fuerza cortante que debe desarrollarse en el plano horizontal *dce*. Esta fuerza cortante se puede producir en una viga maciza, pero no en una formada por capas independientes.

Si se extiende la suma de las fuerzas horizontales hasta el plano *fg*, la compresión que resulta queda incrementada en C_2, que es el valor medio de σ_d y σ_f por el área *cdfg*. Por tanto, tendrá que haber una mayor fuerza cortante en el plano horizontal *fg* que en el plano *cde*. Por supuesto que la fuerza de compresión total $C_1 + C_2$, que actúa sobre el área *abgf*, también puede calcularse como la media de los esfuerzos σ_a y σ_f por el área *abgf*. Sin embargo, el primer procedimiento da una idea más clara de cómo el incremento de la fuerza de compresión va siendo cada vez menor conforme se desciende a intervalos iguales desde la parte superior de la sección hacia la inferior, aunque la fuerza de compresión total vaya aumentando hasta llegar a la línea neutra, en donde el incremento de la fuerza de compresión se anula.

Este análisis indica que el máximo desequilibrio horizontal tiene lugar precisamente en el E. N., desequilibrio que va reduciéndose gradualmente hasta cero, conforme se incluyan más elementos de superficie de la sección por debajo de E. N. Esto es debido, naturalmente, a que el efecto de las fuerzas de compresión se va compensando por las de tensión que existen

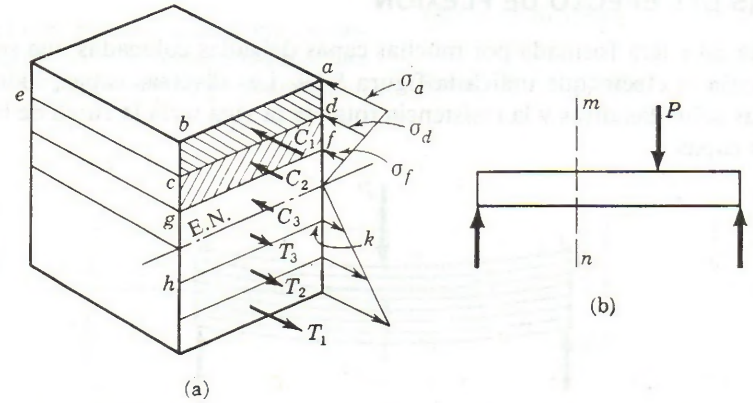


Figura 5-20. Distribución de las fuerzas de compresión y de tensión.

por debajo del E. N. hasta que, finalmente, al considerar la sección completa, el desequilibrio es nulo, ya que $\Sigma X = 0$.

También se observa que las capas o planos equidistantes de la línea neutra están sometidos al mismo desequilibrio horizontal, por ejemplo, en *fg* y *hk*, ya que al añadir a $C_1 + C_2$ las fuerzas iguales y opuestas C_3 y T_3 no varía el resultado. De todo ello se deduce que la fuerza cortante que se desarrolla en *fg* y *hk* es la misma, aunque esto requiere que las áreas desde la línea neutra a las capas o planos equidistantes sean simétricas respecto a aquélla y, por tanto, esta última conclusión no será válida, por ejemplo, si la sección de la viga fuera un triángulo de base horizontal.

PROBLEMAS

559. Una viga está formada por seis planchas de 100 mm de ancho por 20 mm de espesor, colocadas libremente una sobre otra formando un conjunto de 100 mm de ancho por 120 mm de altura. (*a*) Comparar la resistencia de dicho conjunto con la de una viga de una sola pieza y de las mismas dimensiones. (*b*) Calcular la relación de resistencias si la viga estuviera formada por doce planchas de 100 mm de ancho por 10 mm de espesor.

Resp. (a) 1 a 6; (b) 1 a 12

560. La viga de sección I de la figura P-560 se refuerza remachando dos placas de 160 × 20 mm a los patines superior e inferior. Si el esfuerzo máximo es de 110 MPa, calcular la fuerza total de compresión o tensión (a) en cada refuerzo, y (b) en cada patín. Despreciar el efecto de debilitación de los orificios de los remaches.

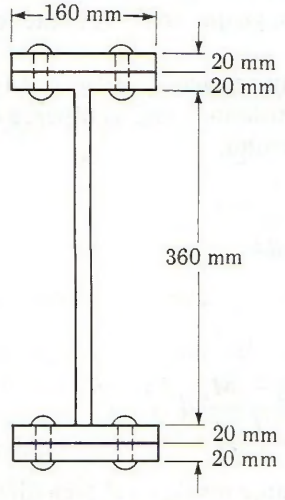


Figura P-560.

Resp. (*a*) 336 kN; (*b*) 304 kN

561. Una sección en T tiene las dimensiones de la figura P-561. Demostrar que la línea neutra está a 60 mm del borde superior y que el momento de inercia con respecto a ella es $I_{LN} = 26.67 \times 10^6$ mm^4. Si el esfuerzo de tensión en la parte inferior del patín es de 10 MN/m^2, determinar: (a) La fuerza total de tensión en el patín. (b) La fuerza total de compresión en la sección. (c) El momento de la fuerza total de compresión con respecto al E. N. (d) El momento de la fuerza total de tensión respecto del E. N. (e) Comparar la suma de (c) y (d) con el momento total aplicado según se deduce de la fórmula de la flexión.

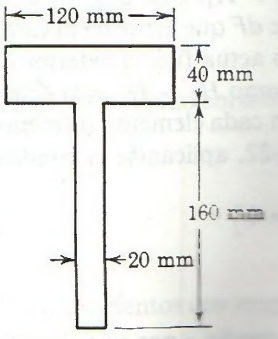


Figura P-561.

Resp. (*a*) 96.0 kN; (*b*) 98.0 kN; (*c*) 9.15 kN · m; (*d*) 4.19 kN · m

562. En una viga de sección cualquiera en la que el esfuerzo máximo es σ, demostrar que la fuerza total sobre un elemento de área A', como el rayado en la figura P-562, viene dada por $F =$

$(\sigma/c)\, A'\bar{y}'$, siendo $\bar{y}'$ la ordenada del centro de gravedad del área rayada. Demostrar también que el momento de esta fuerza con respecto al E. N. es $M' = \sigma/c\, I'$, en donde I' es el momento de inercia del área A' con respecto a la línea o eje neutro.

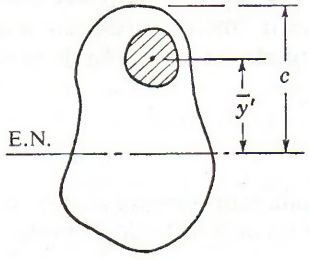


Figura P-562.

563. Una viga de tipo caja está formada por cuatro tablas de 50 × 150 mm de sección, atornilladas firmemente entre sí como indica la figura P-563. Si el máximo esfuerzo normal que se produce es de 8 MPa, determinar la fuerza total que actúa sobre la porción rayada de la sección y el momento de esta fuerza respecto del E. N. *Indicación*: Emplear los resultados del problema 562.

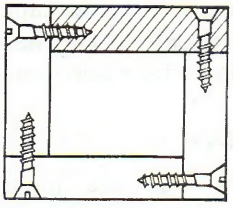


Figura P-563 y P-564.

Resp. $F = 45.0$ kN; $M = 3.50$ kN · m

564. Repetir el problema anterior usando una de las tablas verticales, en lugar de la rayada.

5-7. DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA DEL ESFUERZO CORTANTE HORIZONTAL

Consideremos dos secciones adyacentes (1) y (2) de una viga, separadas una distancia dx, como indica la figura 5-21, y aislemos la parte rayada del elemento comprendido entre ellas. La figura 5-22 representa, en perspectiva, esta parte aislada.

Supongamos que el momento flexionante en la sección (2) es mayor que en la sección (1), por lo que los esfuerzos normales también serán distintos, σ_2 mayor que σ_1, y la resultante horizontal de las fuerzas de compresión en la sección (2) será mayor que la de la sección (1), $H_2 > H_1$. Esta diferencia entre H_2 y H_1 sólo puede equilibrarse por la fuerza cortante resistente dF que actúe en la cara inferior del elemento aislado, ya que en las restantes caras de éste no actúa fuerza exterior alguna.

Como $H_2 - H_1$ es la suma de las diferencias de las compresiones $\sigma_2\, dA$ y $\sigma_1\, dA$ que actúan en cada elemento diferencial contenido en el elemento aislado, como se observa en la figura 5-22, aplicando la condición de la estática $\Sigma H = 0$ resulta,

$[\Sigma H = 0]$

$$dF = H_2 - H_1 = \int_{y_1}^{c} \sigma_2\, dA - \int_{y_1}^{c} \sigma_1\, dA$$

Sustituyendo σ por su valor My/I,

$$dF = \frac{M_2}{I}\int_{y_1}^{c} y\, dA - \frac{M_1}{I}\int_{y_1}^{c} y\, dA = \frac{M_2 - M_1}{I}\int_{y_1}^{c} y\, dA$$

De la figura 5-21, $dF = \tau b\, dx$, siendo τ el esfuerzo cortante medio en el área diferencial de ancho b y longitud dx. Ahora bien, $M_2 - M_1$ representa el incremento diferencial de

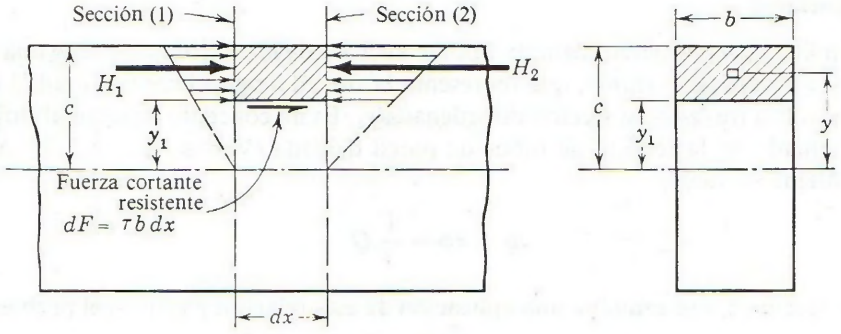


Figura 5-21.

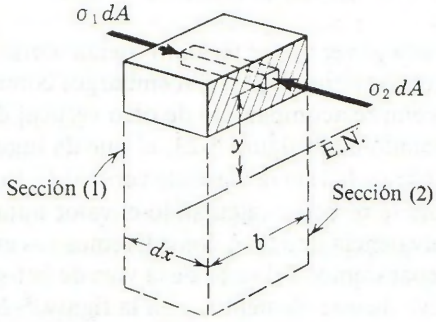


Figura 5-22.

momento flexionante en la longitud dx, por lo que la relación anterior se puede escribir en la forma,

$$\tau = \frac{dM}{Ib\, dx} \int_{y_1}^{c} y\, dA$$

y como, según la sección 4-4, $dM/dx = V$, fuerza cortante vertical, el esfuerzo cortante horizontal viene dado por:

$$\tau = \frac{V}{Ib} \int_{y_1}^{c} y\, dA = \frac{V}{Ib} A'\bar{y} = \frac{V}{Ib} Q \qquad (5\text{–}4)$$

Se ha sustituido la integral $\int_{y_1}^{c} y\, dA$, que representa la suma de los momentos con respecto al E. N. de las áreas diferenciales dA, por su equivalente $A'\bar{y}$, o sea, el momento estático, respecto de la línea neutra, del área parcial A' situada entre la paralela al E. N. a la altura y_1 donde se va a calcular el esfuerzo cortante y el borde superior de la sección. La distancia desde ésta al centro de gravedad de A' es $\bar{y}$. También se puede representar este momento estático de área por Q.

Flujo de cortante

Multiplicando el esfuerzo cortante τ por el ancho b de la sección se obtiene una cantidad q *denominada flujo de cortante*, que representa la fuerza longitudinal por unidad de longitud transmitida a través de la sección de ordenada y_1. Es un concepto análogo al flujo de cortante examinado en la torsión de tubos de pared delgada (Ver la sección 3-5). Aplicando (5-4) se obtiene su valor,

$$q = \tau b = \frac{V}{I} Q \qquad \textbf{(5–4a)}$$

En la sección 5-9 se examina una aplicación de esta relación y otra en el problema 1321.

Relación entre los esfuerzos cortantes horizontal y vertical

Habrá quien se sorprenda al ver que el término fuerza cortante vertical (V) aparece en la fórmula del esfuerzo cortante horizontal (τ_h). Sin embargo, como ahora veremos, un esfuerzo cortante horizontal va siempre acompañado de otro vertical del mismo valor. Es precisamente este último, representado en la figura 5-23, el que da lugar a la fuerza cortante resistente $V_r = \int \tau \, dA$ que equilibra a la fuerza cortante vertical V. Puesto que no es fácil calcular directamente τ_v, el problema se resuelve calculando el valor numéricamente igual de τ_h.

Para demostrar la equivalencia de τ_h y τ_v consideremos sus efectos sobre un elemento diferencial cualquiera, que separaremos del resto de la viga de la figura 5-23. En la figura 5-24a se representa una perspectiva de este elemento, y en la figura 5-24b una vista lateral. Para el equilibrio horizontal del elemento, el esfuerzo cortante τ_h en la cara inferior requiere otra igual en la cara superior, y las fuerzas a que dan lugar estos esfuerzos, figura 5-23c, forman un par contrario al del reloj que requiere otro igual, pero en el mismo sentido del reloj, para conseguir el equilibrio de momentos. Las fuerzas de este par inducen el esfuerzo cortante τ_v en las caras verticales del elemento, como se observa en la figura.

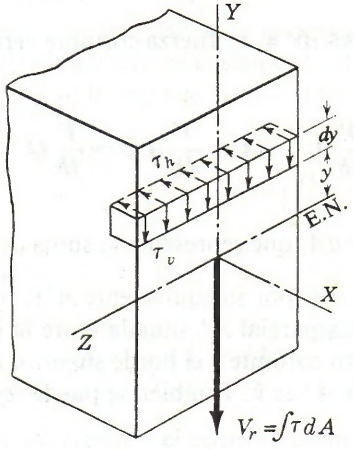
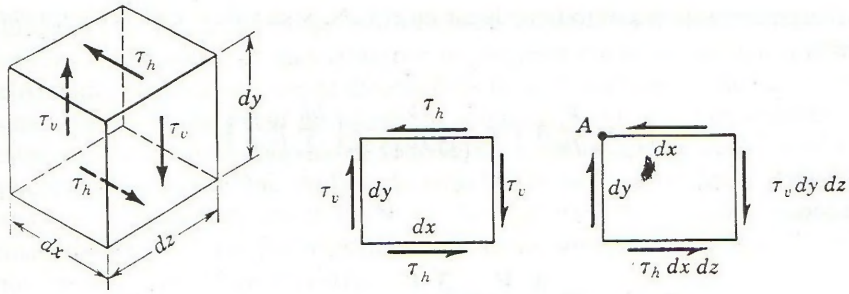


Figura 5-23. Esfuerzos cortantes horizontal y vertical.



(a) (b) Esfuerzos (c) Fuerzas

Figura 5-24. Esfuerzos cortantes que actúan sobre un elemento.

Tomando momentos con respecto a un eje que pase por A (fig. 5-24c), se obtiene

$$[\Sigma M_A = 0] \qquad (\tau_h\, dx\, dz)dy - (\tau_v\, dy\, dz)dx = 0$$

Dividiendo entre $dx\, dy\, dz$ resulta,

$$\tau_h = \tau_v \tag{5-5}$$

Se deduce, pues, que un esfuerzo cortante que actúa en la cara de un elemento va acompañado siempre de otro numéricamente igual en una cara perpendicular al primero.

Aplicación a la sección rectangular

La distribución del esfuerzo cortante en una sección rectangular se puede obtener aplicando la ecuación (5-4) a la figura 5-25. En un plano a distancia y de la línea neutra,

$$\tau = \frac{V}{Ib}A'\bar{y} = \frac{V}{Ib}\left[b\left(\frac{h}{2} - y\right)\right]\left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right]$$

Simplificando,

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{5-5a}$$

lo que demuestra que el esfuerzo cortante se distribuye conforme a una ley parabólica en la altura de la sección.

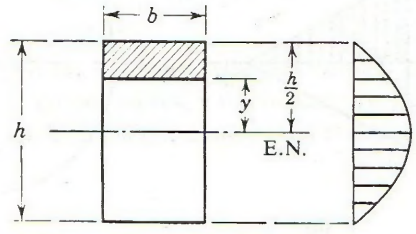


Figura 5-25. Distribución parabólica del esfuerzo cortante en una sección rectangular.

El esfuerzo cortante máximo tiene lugar en el E.N. y su valor se obtiene aplicando (5-4) directamente,

$$\tau = \frac{V}{Ib} A'\bar{y} = \frac{V}{(bh^3/12)b}\left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{4}\right)$$

Simplificando,

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \qquad (5\text{–}6)$$

Naturalmente que se obtiene el mismo valor haciendo $y = 0$ en la expresión (5-5a).

La fórmula (5-6) indica que el esfuerzo cortante máximo en una sección rectangular es un 50 % mayor que el valor medio V/A en la sección total.

Hipótesis y limitaciones de la fórmula

Hemos supuesto implícitamente que el esfuerzo cortante es uniforme a lo ancho de la viga. Aunque esta hipótesis no es rigurosamente cierta, es lo suficientemente aproximada para secciones en las que las fuerzas interiores de flexión están distribuidas uniformemente a lo ancho de la sección en sucesivas capas horizontales.

Esta condición se cumple, por ejemplo, en una sección rectangular y en una I, tal como se observa en la figura 5-26a, secciones en las que las fuerzas normales de flexión a lo largo de las sucesivas bandas verticales, rayadas o no rayadas, se distribuyen de la misma forma y con los mismos valores a lo ancho de las mismas. En cambio, figura 5-26b, no ocurre lo mismo en una sección triangular, en la que aplicando la misma ecuación (5-4) a las sucesivas bandas verticales se vería cómo el esfuerzo cortante en el E. N. es máximo en el extremo izquierdo y nulo en el extremo derecho, y si se aplica la fórmula a la sección total se obtiene en cambio un valor *medio* de dicho esfuerzo cortante, ya sea en el E. N. o bien, en un plano paralelo a una distancia y de éste. Otra excepción es, por la misma razón, la sección circular (fig. 5-26c). Se demuestra que los esfuerzos cortantes en el extremo de cada cuerda horizontal han

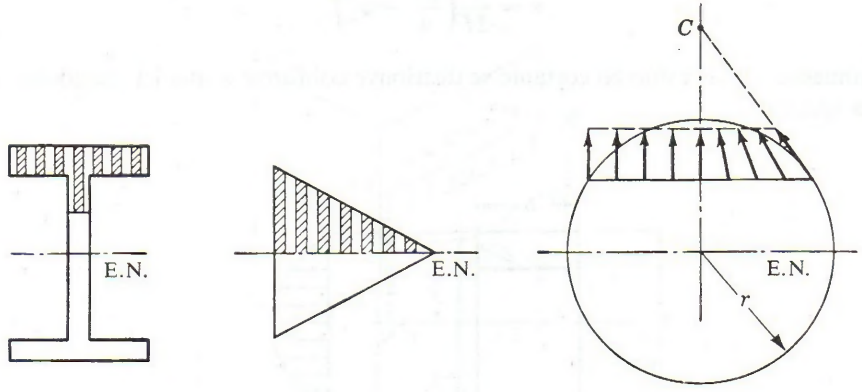


Figura 5-26.

de ser tangentes al círculo, como se indica en la mitad derecha de la figura, pero en los puntos interiores se desconoce su dirección, por lo que para poder determinar un valor, aunque sea aproximado, se supone que esta dirección es tal que todos los esfuerzos cortantes en los puntos de la cuerda dada pasan por el vértice común C, y que las componentes verticales de estos esfuerzos tienen el mismo valor a todo lo ancho de la cuerda, como se indica en la mitad izquierda de la figura 5-26c. Aplicando estas hipótesis y la ecuación (5-4) se obtiene como valor máximo del cortante en el E. N. el de $\frac{4}{3}(P/\pi r^2)$. Un estudio más detallado del problema* muestra que el esfuerzo cortante real varía, sobre el E. N., desde $1.23P/\pi r^2$ en los extremos hasta $1.38P/\pi r^2$ en el centro.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

565. Una viga simplemente apoyada, de 120 mm de ancho por 180 mm de alto y 6 m de longitud, soporta una carga uniforme de 4 kN/m. (a) Determinar el esfuerzo cortante horizontal en los sucesivos planos horizontales trazados cada 30 mm desde la parte superior de la viga, en una sección que dista 1 m del apoyo izquierdo. (b) Calcular el máximo esfuerzo cortante.

Solución:

Parte a. Como vemos en el diagrama de cortante, figura 5-27a, la fuerza cortante vertical en el punto de abscisa $x = 1$ m da $V = 8$ kN.

El momento de inercia de la sección con respecto al E. N. es

$$\left[I = \frac{bh^3}{12} \right] \qquad I_{\text{L.N.}} = \frac{120(180)^3}{12} = 58.32 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$= 58.32 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Aplicando la ecuación (5-4) en los puntos a 30 mm bajo el borde superior, figura 5-27b, se tiene:

$$\left[\tau = \frac{V}{Ib} A' \bar{y} \right]$$

$$\tau = \frac{8000}{(58.32 \times 10^{-6})(0.120)} (0.120 \times 0.030)(0.075)$$

$$= 309 \text{ kPa}$$

y en los puntos a 60 mm del borde,

$$\left[\tau = \frac{V}{Ib} A' \bar{y} \right]$$

$$\tau = \frac{8000}{(58.32 \times 10^{-6})(0.120)} (0.120 \times 0.060)(0.060)$$

$$= 494 \text{ kPa}$$

Este último esfuerzo también se puede determinar, como se ve en la figura 5-27d, descomponiendo el área A' en dos partes, y puesto que el momento estático de un área es igual a la suma de los momentos estáticos de cada parte, es decir, $A'\bar{y} = \Sigma ay$, se llega al mismo resultado,

---

* Véase S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1951, pág. 321.

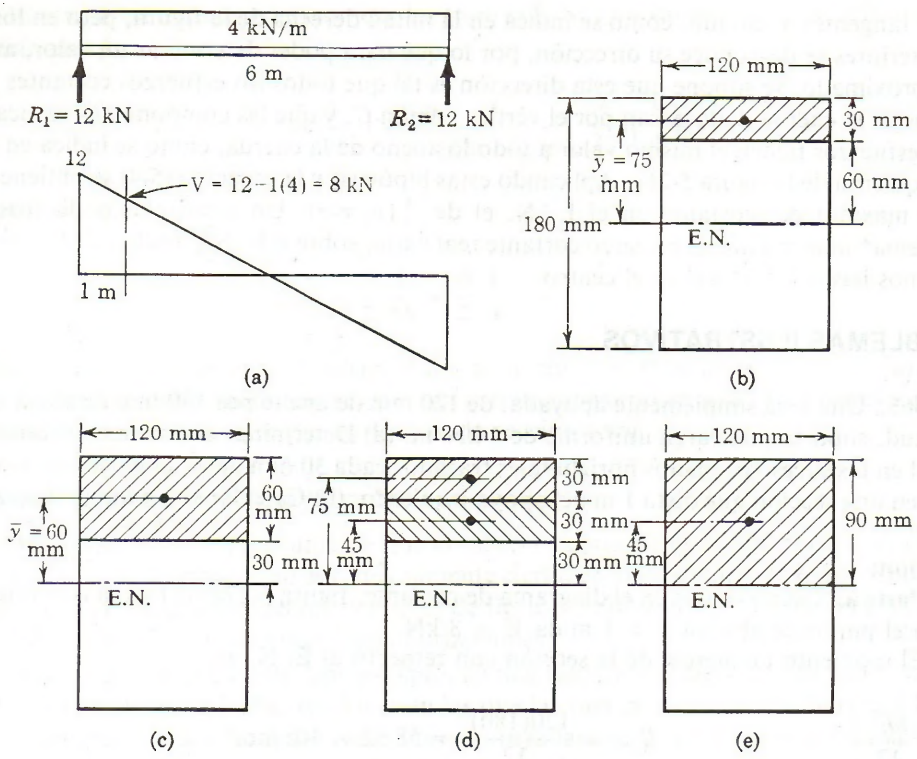


Figura 5-27.

$$\left[\tau = \frac{V}{Ib}\Sigma ay\right]$$

$$\tau = \frac{8000}{(58.32 \times 10^{-6})(0.120)}[(0.120 \times 0.030)(0.075) + (0.120 \times 0.030)(0.045)]$$

$$= 494 \text{ kPa}$$

Aunque este cálculo es más largo y laborioso que el anterior, muestra los pasos a seguir cuando el área A' no sea de forma sencilla, como ocurre en el caso de vigas I o de otras formas más complicadas.

En el E. N., o sea, a 90 mm del borde superior, el esfuerzo cortante es, figura 5-27e,

$$\left[\tau = \frac{V}{Ib}A'\bar{y}\right] \qquad \tau = \frac{8000}{(58.32 \times 10^{-6})(0.120)}(0.120 \times 0.090)(0.045)$$

$$= 555 \text{ kPa}$$

O bien, empleando la ecuación (5-6), ya que ésta determina directamente el esfuerzo cortante máximo en una sección rectangular,

$$\left[\tau = \frac{3}{2}\frac{V}{bh}\right] \qquad \tau = \frac{3}{2}\frac{8000}{(0.120)(0.180)} = 555 \text{ kPa}$$

El esfuerzo cortante en los puntos a 120 mm y a 150 mm se determina exactamente igual y, por tratarse de posiciones simétricas a las ya calculadas, respecto del E. N., resultan 494 y 309 kPa, respectivamente.

Obsérvese que en cualquier viga de sección simétrica con respecto al E. N., los valores de τ a igual distancia por encima y por debajo de la misma son iguales. Físicamente se ve que es cierto ya que, como se ha dicho en la sección 5-6, las fuerzas de tensión y de compresión entre ordenadas simétricas se equilibran. Analíticamente también, ya que la línea neutra es un eje principal de simetría de la sección y de aquí que el momento estático $A'\bar{y}$ de un área parcial A' situada sobre el E. N. sea igual al de un área simétricamente colocada por debajo. Por otra parte, como el momento estático del área total con respecto de un eje que pasa por el centro de gravedad es nulo, se deduce que el momento con respecto al E.N. del área parcial entre una línea de ordenada y y el borde superior, es igual al momento del área parcial entre esta misma línea y el borde inferior. Por tanto, para calcular $A'\bar{y}$ se puede emplear el área por encima o por debajo de la línea considerada, según lo que sea más sencillo o más fácil.

Parte b. El esfuerzo cortante máximo tiene lugar en el E. N. de la sección de fuerza cortante máxima. Como ésta tiene lugar en los apoyos, de acuerdo con la ecuación (5-6), el máximo esfuerzo cortante es

$$\left[\tau = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\right] \qquad \tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{12 \times 10^3}{(0.120 \times 0.180)} = 833 \text{ kPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

566. Una viga tiene una sección I como se indica en la figura 5-28a. En una sección donde la fuerza cortante $V = 70$ kN, calcular (a) el máximo esfuerzo cortante, y (b) el esfuerzo cortante en la unión del alma y los patines. (c) Dibujar la distribución de esfuerzos cortantes en el patín y determinar el tanto por ciento de la fuerza cortante que absorbe éste.

Solución: El momento de inercia se obtiene por diferencia entre el del rectángulo total y el de los rectángulos rayados.

$$\left[I = \Sigma \frac{bh^3}{12}\right]$$

$$I_{E.N.} = \frac{160(240)^3}{12} - 2\left[\frac{70(200)^3}{12}\right]$$

$$= 91.0 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 91.0 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

El esfuerzo cortante máximo tiene lugar en la línea neutra. Aplicando (5-4) y calculando $A'\bar{y}$ como suma de los momentos de los dos rectángulos rayados. Figura 5-28b, se tiene

$$\left[\tau = \frac{V}{Ib}A'\bar{y}\right]$$

$$\tau_{máx} = \frac{70 \times 10^3}{(91.0 \times 10^{-6})(0.020)} \times [(0.160 \times 0.020)(0.110) + (0.020 \times 0.100)(0.050)]$$

$$= 17.4 \text{ MPa}$$

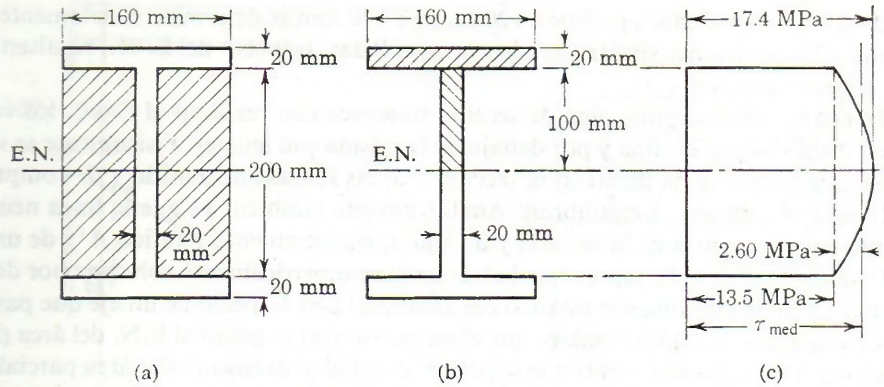


Figura 5-28.

En la unión del alma y los patines hay una discontinuidad en el esfuerzo cortante porque $b = 160$ mm al calcular el cortante en el patín, mientras que $b = 20$ mm cuando se consideran esfuerzos en el alma. Entonces, en la unión el esfuerzo cortante en el alma vale

$$\left[\tau = \frac{V}{Ib}A'\bar{y}\right] \qquad \tau = \frac{70 \times 10^3}{(91.0 \times 10^{-6})(0.020)}(0.160 \times 0.020)(0.110)$$
$$= 13.5 \text{ MPa}$$

Demuéstrese que el cortante *en el patín* vale 1.69 MPa.

El esfuerzo cortante en el alma varía parabólicamente entre los extremos superior e inferior, como se ve en la figura 5-28c. El valor medio de la parte parabólica es $\frac{2}{3}(17.4 - 13.5) = 2.60$ MPa. Por tanto, el valor medio en el alma es $\tau_{med} = 13.5 + 2.60 = 16.1$ MPa.

La fuerza cortante absorbida por el alma es

$$V_{alma} = (0.200 \times 0.020)(16.1 \times 10^6) = 64.4 \text{ kN}$$

de donde el tanto por ciento sobre la fuerza cortante total es

$$\% V_{alma} = \frac{64.4}{70} \times 100 = 92.0\%$$

lo que demuestra que los patines son prácticamente ineficaces para soportar la fuerza cortante vertical. Suponiendo que ésta se distribuye uniformemente en el alma solamente, el valor medio así obtenido se aproxima mucho al máximo obtenido mediante (5-4). En efecto,

$$\left[\tau = \frac{V}{A_{alma}}\right] \qquad \tau = \frac{70 \times 10^3}{(0.200)(0.020)} = 17.5 \text{ MPa}$$

valor muy próximo a 17.4 MPa, obtenido anteriormente.

Este procedimiento da siempre resultados muy aproximados al valor real de $\tau_{máx}$; sin embargo, en muchas normas y especificaciones no se considera como altura del alma la distancia entre los patines, sino la altura total de la viga, lo que proporciona menor seguridad. Por ello suelen rebajarse algo los esfuerzos cortantes admisibles para compensar esta menor seguridad.

PROBLEMAS

567. Una viga de madera de 90 mm de ancho y 160 mm de altura está sometida a una fuerza cortante vertical de 20 kN. Determinar el esfuerzo cortante en puntos tomados de 20 en 20 mm a lo alto de la viga, a partir de su borde superior.

568. Demostrar que el esfuerzo cortante en la línea neutra de una sección circular es $T = \frac{4}{3}(V/\pi r^2)$, suponiendo que se distribuye uniformemente en toda su longitud.

569. Demostrar que el esfuerzo cortante máximo en una viga de sección tubular de paredes delgadas y de sección A es $\tau = 2\,V/A$.

570. Una viga simplemente apoyada de 4 m de claro tiene la sección indicada en la figura P-570. Determinar la máxima carga uniformemente distribuida que puede aplicarse a todo lo largo de la viga si el esfuerzo está limitado a 1.2 MPa.

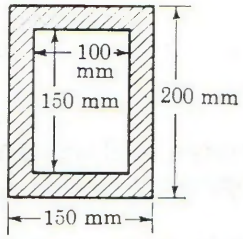


Figura P-570.

Resp. $w = 4.60$ kN/m

571. La sección mostrada en la figura P-571 corresponde a una viga formada al ensamblar dos piezas rectangulares de madera. La viga está sometida a una fuerza cortante máxima de 60 kN. Demuestre que la línea neutra está localizada 34 mm abajo del borde superior y que $I_{E.N.} = 10.57 \times 10^6$ mm^4. Usando estos valores, determine el esfuerzo cortante (a) en el eje neutro y (b) en la unión entre las dos piezas.

Resp. (a) 3.28 MPa; (b) 3.18 MPa, 31.8 MPa

572. En la figura P-572, si $P = 5$ kN calcular el esfuerzo cortante en puntos a distancias de 20 en 20 mm desde el borde superior de la sección

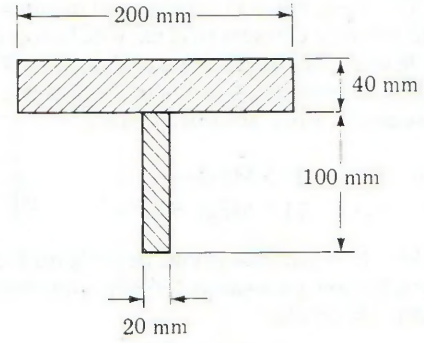


Figura P-571.

de máxima V. La línea neutra está a 70 mm del borde superior e $I_{LN} = 15.52 \times 10^6$ mm^4.

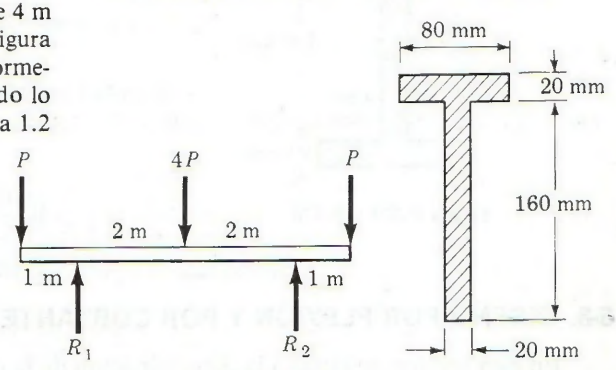


Figura P-572.

573. La sección recta de una viga de madera es un triángulo isósceles, con el vértice hacia arriba, de altura h y base b. Si V es el esfuerzo cortante vertical, demostrar también que $\tau_{máx} = 3V/bh$ y que tiene lugar en el punto medio de la altura.

574. En la viga cuya sección muestra la figura P-574, demostrar que el máximo esfuerzo cortante horizontal tiene lugar en un punto a una distancia $h/8$ por encima o por debajo del E. N.

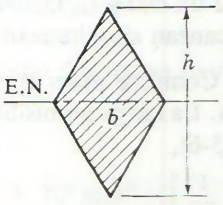


Figura P-574.

575. Determinar el máximo y el mínimo valor del esfuerzo cortante en el patín de la viga que tiene la sección indicada en la figura P-575 si V = 100 kN. Calcular también el tanto por ciento de fuerza cortante que absorbe el patín.

Resp. $\tau_{máx}$ = 30.5 MPa;
τ_{min} = 23.5 MPa; 90.2%

576. Si el patín de la viga de la figura P-575 tuviera 200 mm en lugar de 160 mm, ¿que fuerza cortante absorbería?

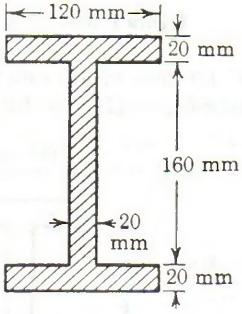


Figura P-575 y P-576.

577. Una viga compuesta está formada por láminas de 6 mm, separadas por bloques como indica la figura P-577. ¿Qué fuerza cortante producirá un esfuerzo máximo de 1.4 MPa?

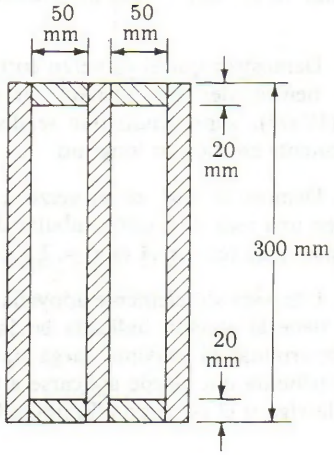


Figura P-577.

5-8. DISEÑO POR FLEXIÓN Y POR CORTANTE

En esta sección se estudia la determinación de la capacidad de carga, o del tamaño de la sección, de una viga que tenga limitados, al mismo tiempo, sus esfuerzos por flexión (σ) y de corte (τ). No se requieren otros principios que los ya estudiados.

En vigas cortas, fuertemente cargadas, las dimensiones vendrán dadas generalmente por el esfuerzo cortante, que varía con V, mientras que en las vigas largas suele ser casi siempre el esfuerzo normal, o esfuerzo por flexión, el que limita la carga o determina las dimensiones de la sección, ya que el momento flexionante aumenta con la longitud y las cargas. El esfuerzo cortante también tiene mayor importancia en las vigas de madera que en las de acero por la poca resistencia al cortante que presentan aquéllas.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

578. Una viga de sección rectangular soporta una carga uniformemente repartida de w N/m sobre un claro L. Determinar la longitud crítica para la cual el esfuerzo cortante y el normal alcanzan simultáneamente sus valores admisibles.

Solución: Como se observa en la figura 5-29, $V_{máx} = W/2$, en donde W es la carga total distribuida. La carga admisible está limitada por el esfuerzo admisible τ determinado por la ecuación (5-6),

$$\left[\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} \right] \qquad \tau = \frac{3}{2}\cdot\frac{W/2}{bh} \qquad W = \frac{4}{3}bh\tau$$

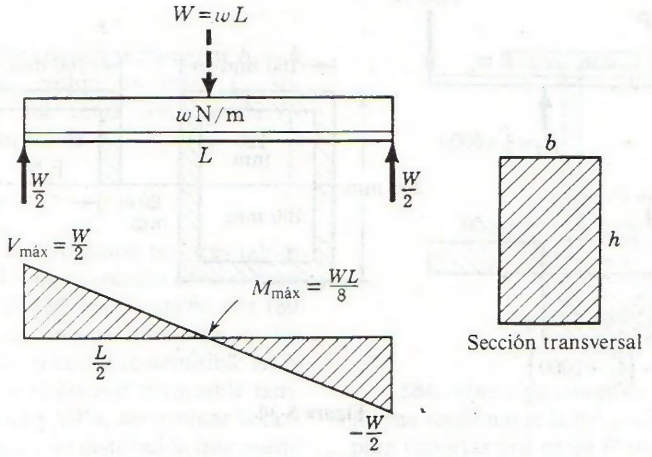


Figura 5-29.

Obsérvese que W resulta independiente de la longitud.

En el punto de cortante cero, el momento flexionante máximo, evaluado a partir del área del diagrama de cortante vale

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{W}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{WL}{8} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Sustituyendo este valor en la fórmula de la flexión (5-2a) resulta:

$$\left[M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{\sigma b h^2}{6} \right] \qquad \frac{WL}{8} = \frac{\sigma b h^2}{6}$$

Sustituyendo W por su valor en función de τ,

$$\left(\frac{4}{3} bh\tau\right)\left(\frac{L}{8}\right) = \frac{\sigma b h^2}{6}$$

de donde

$$L = \frac{\sigma h}{\tau}$$

Para valores mayores que la longitud crítica, el esfuerzo normal es el que predomina, mientras que para los valores menores, el que predomina es el esfuerzo cortante.

579. Una viga en caja soporta las cargas de la figura 5-30. Calcular el valor máximo de P si el esfuerzo normal admisible es de 8 MPa y el cortante, de 1.2 MPa.

Solución: Determinemos el momento de inercia de la sección como diferencia entre los dos rectángulos, exterior e interior.

$$I = \sum \frac{bh^3}{12} = \frac{160(200)^3}{12} - \frac{120(160)^3}{12} = 65.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$= 65.7 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

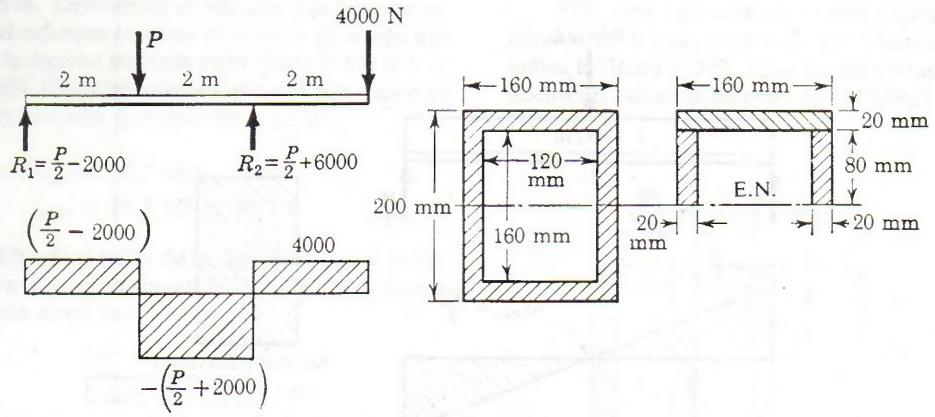


Figura 5-30.

Calculadas las reacciones por las ecuaciones de la estática se puede trazar el diagrama de fuerza cortante con los valores indicados en la figura 5-30. En función de P, la máxima V vale $-(\frac{1}{2}P + 2000)$. Descomponiendo el área sobre el E. N. en los tres rectángulos señalados, el momento estático Q de dicha área es:

$$[Q = \Sigma a\bar{y}] \qquad Q = (160 \times 20)(90) + 2(80 \times 20)(40)$$
$$= 416 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 416 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

o puede obtenerse por diferencia de los momentos de las áreas del rectángulo de 100 × 160 mm y del de 80 × 120 mm, lo que daría lo mismo

$$[Q = \Sigma a\bar{y}] \qquad Q = (160 \times 100)(50) - (120 \times 80)(40)$$
$$= 416 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Sustituyendo los valores absolutos de V y Q en la ecuación (5-4) se obtiene

$$\left[\tau = \frac{V}{Ib}Q\right] \qquad 1.2 \times 10^6 = \frac{\frac{1}{2}P + 2000}{(65.7 \times 10^{-6})(0.040)}(416 \times 10^{-6})$$

de donde

$$P = 11.2 \text{ kN}$$

El momento máximo, en función de P, tiene lugar en $x = 2$ m, y vale

$$M = \left(\frac{1}{2}P - 2000\right)(2) = (P - 4000) \text{ N} \cdot \text{m}$$

Al aplicar la fórmula de la flexión

$$\left[M = \frac{\sigma I}{c}\right] \qquad P - 4000 = \frac{(8 \times 10^6)(65.7 \times 10^{-6})}{0.100}$$
$$P = 9.26 \text{ kN}$$

La carga de seguridad es la menor de los dos valores obtenidos, es decir, $P = 9.26$ kN.

Se puede comprobar cómo, en este caso, el momento máximo negativo sobre el apoyo derecho es, en valor absoluto, menor que el máximo positivo bajo P, pero en un caso general habría que comprobarlo también.

PROBLEMAS

580. Una viga de sección rectangular $b \times h$ simplemente apoyada sobre un claro L, soporta en el centro una carga concentrada P. Expresar $\tau_{máx}$ en función de σ_f.

Resp. $\tau = \sigma_f h/2L$

581. Una viga está formada por tres tablas de sección 150 × 60 mm, encoladas entre sí para formar una sección de 150 mm de ancho por 180 mm de altura. Si el cortante admisible en las juntas es de 600 kPa, el cortante admisible en la madera es 900 kPa y el normal permisible también en la madera vale 8 MPa, determinar la carga máxima uniformemente distribuida que puede resistir la viga sobre un claro de 2 m.

582. Calcule las dimensiones del cuadrado más pequeño que sea la sección transversal de la viga mostrada en la figura P-582, si $\tau \leq 900$ kPa y $\sigma \leq 8$ MPa.

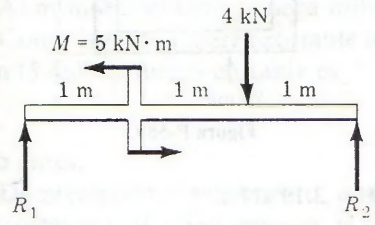


Figura P-582.

583. Una viga simplemente apoyada de claro L y carga concentrada P en el centro, tiene una sección I como la indicada en la figura P-583. Determinar la relación entre $\sigma_{máx}$ y $\tau_{máx}$.

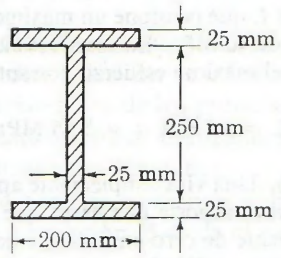


Figura P-583 y P-584.

584. Una viga compuesta, de madera, de la misma sección que la del problema 583, se utiliza para soportar una carga P en un punto de un claro de 8 m. Determinar P y su posición de manera que causen simultáneamente $\sigma_{máx} = 8$ MPa y $\tau_{máx} = 1.2$ MPa.

585. Una viga simplemente apoyada de L m de longitud soporta una carga uniformemente distribuida de 16 kN/m a todo su largo y tiene la

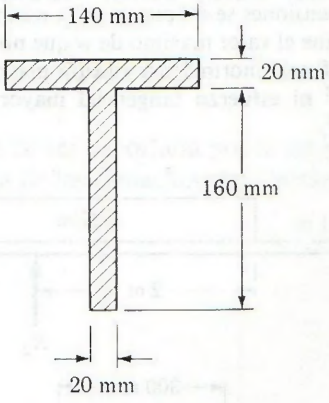


Figura P-585.

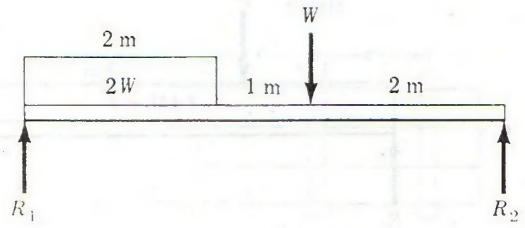
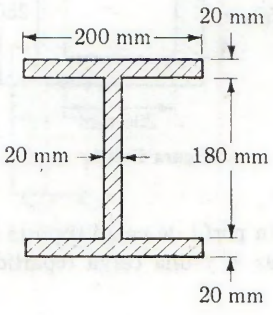


Figura P-587.



sección mostrada en la figura P-585. Calcule el valor de L que ocasione un máximo esfuerzo por flexión de 40 MPa. En estas condiciones, ¿cuánto vale el máximo esfuerzo cortante?

Resp. $L = 1.77$ m; $\tau = 5.55$ MPa

586. Una viga simplemente apoyada de 6 m de longitud soporta una carga que aumenta uniformemente de cero en un extremo a w N/m en el otro. La sección de la viga es la mostrada en la figura P-577. Calcule el valor máximo de w si $\sigma_f \leq 10$ MPa y $\tau \leq 800$ kPa.

587. La viga de patín ancho de la figura P-587 sostiene una carga concentrada W y una uniformemente distribuida de valor total $2W$. Determine el valor máximo de W si $\sigma_f \leq 10$ MPa y $\tau \leq 1.4$ MPa.

Resp. $W = 2.62$ kN

588. La carga distribuida mostrada en la figura P-588 está sostenida por una viga en caja cuyas dimensiones se muestran en la misma figura. Determine el valor máximo de w que no producirá ni esfuerzo normal por flexión mayor que 14 MN/m^2 ni esfuerzo tangencial mayor que 1.2 MN/m^2.

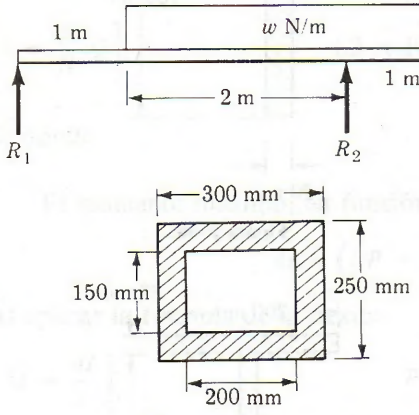


Figura P-588.

589. Un perfil de canal soporta dos cargas concentradas W y una carga repartida total de $18W$, distribuida como indica la figura P-589. Verificar que el E. N. esté situado a 50 mm de la base y que $I_{E.N.} = 15.96 \times 10^6$ mm^4. Luego use estos valores para determinar el máximo valor de W que no exceda el esfuerzo normal (30 MPa a tensión y 70 MPa a compresión), ni el cortante de 20 MPa (esfuerzos admisibles).

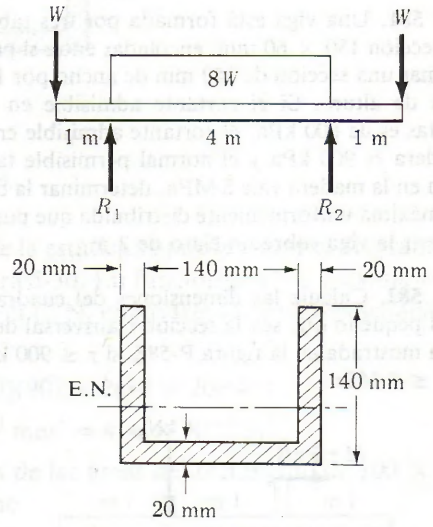


Figura P-589.

Resp. $W = 3.19$ kN

590. Una viga de sección rectangular, de 150 mm de ancho por 250 mm de altura, soporta una carga uniformemente distribuida de 8 kN/m y una concentrada P como se muestra en la figura P-590. Determine el máximo valor de P si $\sigma \geq 10$ MPa y $\tau \leq 1.2$ MPa.

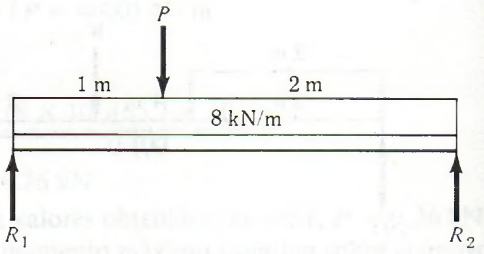


Figura P-590.

5-9. ESPACIAMIENTO DE REMACHES EN VIGAS COMPUESTAS

En el análisis de los efectos de la flexión se ha puesto de manifiesto, sección 5-6, que los distintos elementos que constituyen una viga compuesta tienden a deslizar uno sobre otro.

Se estudiarán ahora las dimensiones y separación o espaciamiento de los remaches, que en una viga compuesta unen sus elementos, para que resistan esta acción de deslizamiento. El primer paso es la determinación de la fuerza que han de resistir tales remaches.

La figura 5-31 representa una viga compuesta, formada por tres elementos solidarios mediante dos filas de remaches espaciados una distancia e. La ecuación (5-4) da el esfuerzo cortante en la superficie de contacto entre los dos elementos superiores:

$$\tau = \frac{V}{Ib} Q$$

siendo Q el momento estático del área sombreada respecto de la línea neutra. Multiplicando este esfuerzo por el área sombreada (en planta) eb, se obtiene la fuerza a resistir en la longitud e:

$$F = \tau(eb) = \frac{V}{Ib} Q(eb) = \frac{Ve}{I} Q$$

Al mismo resultado se llega utilizando el concepto de flujo de cortante.

Como éste es la fuerza cortante longitudinal por unidad de longitud, en la distancia e, y según (5-4a), la fuerza cortante es

$$F = qe = \frac{VQ}{I} e$$

como antes.

Despreciando el rozamiento, esta fuerza cortante ha de ser soportada por la resistencia R al cortante o al aplastamiento, la que sea más pequeña de los remaches. Igualando R y F resulta

$$R = \frac{Ve}{I} Q \qquad (5\text{–}7)$$

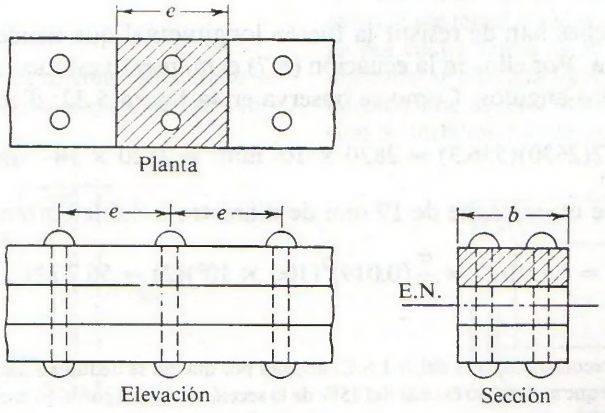


Figura 5-31.

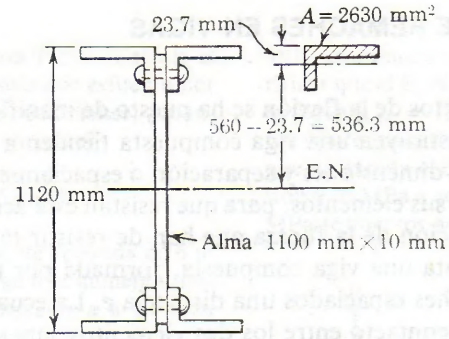


Figura 5-32.

Si la fuerza cortante vertical es variable a lo largo de la viga, se toma el valor medio de V en la longitud del intervalo e, aunque a menudo suele tomarse, para mayor seguridad, el valor máximo de V en el intervalo, sobre todo en vigas compuestas metálicas en las que se determina el espaciamiento para unos remaches dados, o el remache necesario para un espaciamiento dado, dentro de tramos de longitud igual a la altura de la viga. En este caso, la ecuación (5-7) relaciona la resistencia del remache con su espaciamiento dentro de la longitud de cada tramo, y V es la $V_{máx}$ en el considerado.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

591. La viga cuya sección muestra la figura 5-32 está formada por una sola placa de 1 100 mm de altura y 10 mm de espesor, que constituye el alma, y ángulos de 125 × 90 × 13 mm remachados a ella por sus lados cortos y que constituyen los patines. Se forma así una sección de 1120 mm de altura en la que el momento de inercia,* con respecto al E. N., vale 4140×10^6 mm^4. En una sección en la que $V = 450$ kN, determinar el espaciamiento entre los remaches de 19 mm de diámetro que unen los ángulos a la placa. Se consideran $\tau = 100$ MPa, σ_b (aplastamiento) = 220 MPa y 280 MPa para los remaches a simple y a doble cortante, respectivamente.

Solución: Los remaches han de resistir la fuerza longitudinal que tiende a deslizar los dos ángulos sobre el alma. Por ello, en la ecuación (5-7) el momento estático se refiere al área de la sección de estos dos ángulos. Como se observa en la figura 5-32, dicho momento es

$$Q = 2(2630)(536.3) = 2820 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 2820 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

La resistencia de un remache de 19 mm de diámetro a doble cortante es

$$R_s = (A_s\tau)(2) = \frac{\pi}{4}(0.019)^2(100 \times 10^6)(2) = 56.7 \text{ kN}$$

* Las más recientes recomendaciones del A.I.S.C. abogan por que no se deduzcan los orificios de remachado en el cálculo de I, siempre que su área no exceda del 15% de la sección total del patín. Si la excede, indican que sólo el exceso sobre este 15% debe tenerse en cuenta para reducir el momento de inercia.

y la resistencia al aplastamiento contra el alma,

$$R_b = (dt)\sigma_b = (0.019)(0.010)(280 \times 10^6) = 53.2 \text{ kN}$$

Introduciendo el menor de estos valores en la ecuación (5-7) se obtiene el paso, o espaciamiento entre remaches:

$$e = \frac{RI}{VQ} = \frac{(53.2 \times 10^3)(4140 \times 10^{-6})}{(450 \times 10^3)(2820 \times 10^{-6})} = 0.174 \text{ m}$$
$$= 174 \text{ mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

592. Se construye una viga de sección I con tres tablones de 80 × 200 mm dispuestos como indica la figura P-592, y hechos solidarios mediante pernos pasantes. Si cada uno puede resistir una fuerza cortante de 8 kN determinar su espaciamiento cuando la viga se carga de manera que se produzca un esfuerzo cortante máximo de 1.2 MPa.

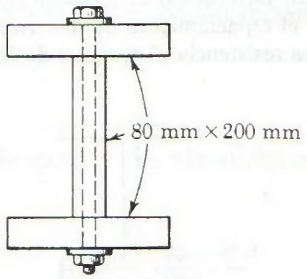


Figura P-592.

Resp. $e = 98.2$ mm

593. Una viga en caja, construida como se indica en la figura P-593, se asegura mediante tornillos espaciados a 100 mm. La viga, simplemente apoyada, soporta una carga concentrada P en el tercio de un claro de 3 m. Determinar el valor máximo de P de manera que no sobrepase el esesfuerzo cortante de 800 kPa en la viga, ni la fuerza cortante de 1 200 N en los tornillos. ¿Cuál será entonces el esfuerzo normal máximo en la viga?

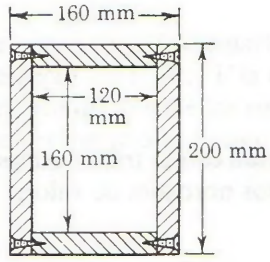


Figura P-593.

594. Sobre una viga simplemente apoyada de 4 m de claro se aplica una carga repartida uniformemente de w N/m. La sección de la viga es la de la figura P-593, pero girada un cuarto de vuelta. Determinar el valor máximo de w si $\sigma_f \leq 10$ MPa, $\tau \leq 800$ kPa y los tornillos tienen una resistencia al cortante de 800 N y una separación de 50 mm.

Resp. $w = 2.05$ kN/m

595. Una viga de 6 m de claro soporta una carga P a la mitad del mismo. La viga está formada por cuatro tablas de 50 × 150 mm atornilladas como se indica la figura P-595. Si el esfuerzo máximo σ ha de ser 9 MN/m^2 calcular la separación de tornillos si cada uno resiste 800 N.

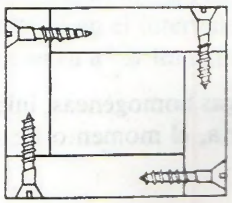


Figura P-595.

596. Tres tablones de 100 × 150 mm, dispuestos como se indica en la figura P-596 y asegurados mediante pernos pasantes espaciados a 0.4 m forman una viga compuesta, simplemente apoyada, de 6 m de claro con una carga concentrada P en su centro. Si P produce un $\sigma_{máx}$ = 12 MPa, determinar el diámetro de los pernos suponiendo que la fuerza cortante entre los tablones se trasmite solamente por fricción. Los pernos se pueden someter a un esfuerzo de 140 MPa a tensión y el coeficiente de rozamiento entre las piezas es de 0.40.

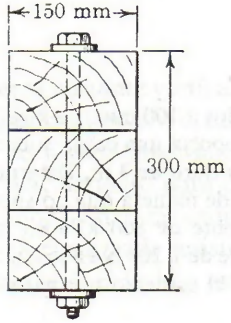


Figura P-596.

Resp. d = 19.1 mm

597. Se construye una viga compuesta, con ángulos de 125 × 75 × 13 mm remachados a una placa de 1000 × 10 mm por sus lados cortos, formando una sección de altura total 1020 mm semejante a la de la figura 5-32. Dos placas, cada una de 300 × 10 mm, se remachan a los ángulos para aumentar la sección de los patines, de manera que la altura total alcanza el valor de 1040 mm. El momento de inercia de la sección completa con respecto al E. N. es de 4770 × 10^6 mm^4. Utilizando los mismos esfuerzos admisibles del problema ilustrativo 591, determinar el espaciamiento entre los remaches de 22 mm de diámetro que han de unir los ángulos de alma en una sección en la cual V = 450 kN.

598. Dos perfiles C 380 × 60 se unen, como indica la figura P-598, mediante pares de remaches de 19 mm de diámetro, espaciados 200 mm a lo largo de la viga. Calcular la fuerza cortante máxima V que podrá soportar ésta sin que se excedan los esfuerzos dados en el problema 591.

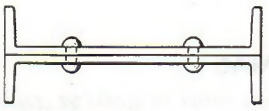


Figura P-598.

Resp. 25.9 kN

599. Se forma una viga uniendo dos I de ala ancha W 250 × 73 en la forma indicada en la figura P-599. Se emplea para soportar una carga de 30 kN/m incluido el peso propio, sobre un claro de 8 m. Determinar el esfuerzo máximo por flexión y el espaciamiento de los remaches, que tienen una resistencia al cortante de 26 kN.

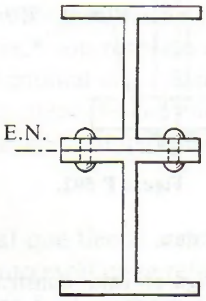


Figura P-599.

RESUMEN

Para vigas homogéneas, inicialmente rectas, que soportan cargas transversales en el plano de simetría, el momento flexionante da lugar a esfuerzos normales de valor:

$$\sigma = \frac{My}{I} \qquad (5\text{–}2)$$

El esfuerzo de flexión es, pues, directamente proporcional a la distancia y a la línea neutra, que pasa por el centro de gravedad de la sección.

El esfuerzo normal máximo tiene lugar en la sección de máximo momento flexionante, en sus fibras extremas. Llamando c a la distancia de éstas a la línea neutra, la fórmula de la flexión o "fórmula de la escuadría" se escribe en la forma:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} \qquad \textbf{(5–2a, b)}$$

en donde $S = I/c$ representa el módulo resistente de la sección. Para perfiles laminados los valores de S se dan también en las tablas del Apéndice B. Los esfuerzos admisibles en vigas no arriostradas lateralmente en especial en vigas aligeradas o perfiles con alas relativamente estrechas, pueden evaluarse con la ecuación (5-3).

La fuerza cortante vertical produce esfuerzos cortantes horizontales y verticales numéricamente iguales, ecuación (5-5), que se determinan por:

$$\tau = \frac{V}{Ib} A'\bar{y} = \frac{V}{Ib} Q \qquad \textbf{(5–4)}$$

en donde A' es el área parcial de la porción de sección situada sobre una paralela al E. N. en el punto donde se trata de hallar el esfuerzo cortante. El valor $Q = A'\bar{y}$ es el momento estático de dicha área con respecto al E. N., o también, el momento del área por debajo de dicha línea, respecto de la línea o eje neutro.

El esfuerzo cortante máximo tiene lugar en la sección de máximo V, y generalmente en el E. N. Para vigas de sección rectangular el máximo esfuerzo cortante vale:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} \qquad \textbf{(5–6)}$$

En vigas de sección I de ala ancha o normal, un valor muy aproximado es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{V}{A_{\text{alma}}}$$

donde A_{alma} es el área de la sección del alma comprendida entre los bordes interiores de las alas o patines.

La separación de remaches en una viga compuesta viene dada por:

$$e = \frac{RI}{VQ} \qquad \textbf{(5–7)}$$

siendo R la resistencia de los remaches existentes en la longitud e, I el momento de inercia de la sección respecto del E. N., V la fuerza cortante máxima vertical en el intervalo e, y Q el momento estático del área de los elementos cuyo resbalamiento se va a ver impedido por los remaches, con respecto a la línea o eje neutro.

6
deformación en vigas

6-1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudia la rigidez de las vigas. Frecuentemente, el diseño de una viga queda determinado más por su rigidez que por su resistencia. Por ejemplo, al diseñar elementos de máquina para trabajos de precisión, tales como tornos, prensas, limadoras, etc., las deformaciones deben permanecer por debajo de las tolerancias admisibles del trabajo que se va a realizar. Asimismo, en las vigas de pisos que tengan por debajo cielo raso de yeso o escayola, se suele limitar la deflexión máxima a 1/360 de claro, para que no aparezcan grietas en el yeso. Una de las más importantes aplicaciones del estudio de la deformación de las vigas es, por otra parte, la obtención de ecuaciones de deformación que, junto con las condiciones de equilibrio estático, permitan resolver las vigas estáticamente indeterminadas. (Véanse los Caps. 7 y 8.)

Se utilizan varios métodos para determinar la deformación de las vigas. Aunque basados en los mismos principios, difieren en su técnica y en sus objetivos inmediatos. En primer lugar, se estudia un procedimiento modernizado del método de la doble integración, que simplifica mucho su aplicación. Otro método, el del área de momentos, se considera el más directo de todos, en especial si se desea conocer la deformación en un punto determinado. Después de un estudio previo del diagrama de momentos por partes (Sec. 6-4) se verá cómo es no solamente muy sencillo, sino extremadamente rápido. Otra variante de este método, que se estudiará en la sección 8-7, es también rápido y cómodo de aplicar.

Otros métodos son el de la viga conjugada y el de superposición. El método de la viga conjugada es realmente una variante del método del área de momentos, pero difiere en su aplicación práctica. El método de superposición no es un método distinto; utiliza las fórmulas obtenidas para las deformaciones, en ciertos tipos fundamentales de cargas, para obtener las soluciones correspondientes a cargas que sean combinaciones de estos tipos fundamentales.

6-2. MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

La vista lateral de la superficie neutra de una viga deformada se llama *curva elástica*, o simplemente, *elástica* de la viga. Es la curva que forma el eje longitudinal, inicialmente recto. Se muestra sumamente exagerada en la figura 6-1. En esta sección se deduce la ecuación de dicha curva, y cómo calcular el desplazamiento vertical o deflexión y de cualquier punto en función de su abscisa x.

Tomemos el extremo izquierdo como origen del eje X, dirigido según la dirección inicial de la viga sin deformar, y el eje Y positivo hacia arriba. Se supone siempre que las deformaciones son tan pequeñas que no hay diferencia apreciable entre la longitud inicial de la viga y la proyección de su longitud deformada. En consecuencia, la curva elástica es muy llana y su pendiente en cualquier punto también es muy pequeña. El valor de esta pendiente, $\tan\theta = dy/dx$, puede hacerse sin error apreciable, igual a θ. Por consiguiente,

$$\theta = \frac{dy}{dx} \tag{a}$$

y

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{b}$$

Considerando la variación de θ en una longitud diferencial ds, producida por la flexión de la viga, es evidente que

$$ds = \rho\, d\theta \tag{c}$$

siendo ρ el radio de curvatura en la longitud de arco ds. Como la curva elástica es casi recta, ds es prácticamente igual a ds. En estas condiciones, de las ecuaciones (b) y (c) se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d\theta}{dx} \text{ o bien, } \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{d}$$

Al deducir la fórmula de la flexión, en la sección 5-2, se obtuvo la relación

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{5-1}$$

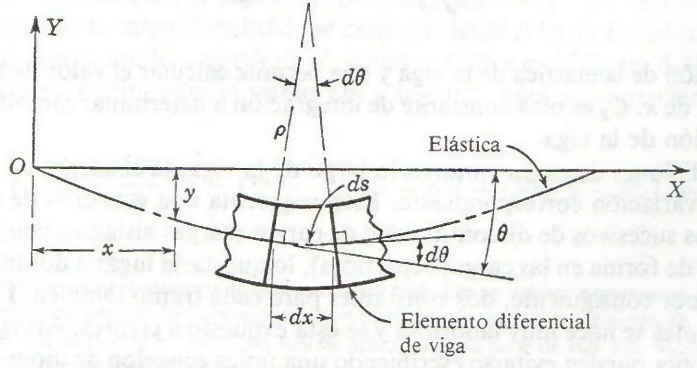


Figura 6-1.

y, por tanto, igualando los valores $1/\rho$ de las ecuaciones (*d*) y (5-1) resulta:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \tag{6-1}$$

Esta es la ecuación diferencial de la elástica de una viga. El producto *EI*, que se llama *rigidez a la flexión*, es normalmente constante a lo largo de la viga.

Las aproximaciones hechas, el ángulo por la tangente, y *dx* por *ds*, no tienen influencia apreciable en la exactitud de la expresión (6-1) y, en efecto, sustituyendo $1/\rho$ por su valor exacto, junto con la ecuación (5-1), se tendría

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{M}{EI}$$

Teniendo en cuenta que dy/dx es muy pequeño, su cuadrado es despreciable frente a la unidad, por lo que se puede escribir

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

que coincide con la ecuación (6-1).

Integrando la ecuación (6-1), suponiendo *EI* constante, resulta

$$EI\frac{dy}{dx} = \int M\,dx + C_1 \tag{6-2}$$

que es la ecuación de la pendiente, y que permite determinar el valor de la misma, o dy/dx en cualquier punto. Conviene observar que en esta ecuación, *M* no es un valor del momento, sino la ecuación del momento flexionante en función de *x*, y C_1 es una constante a determinar por las condiciones de apoyo.

Integrando de nuevo la ecuación (6-2),

$$EIy = \int\int M\,dx\,dx + C_1x + C_2 \tag{6-3}$$

que es la ecuación de la elástica de la viga y que permite calcular el valor de la ordenada *y* en cualquier valor de *x*. C_2 es otra constante de integración a determinar también por las condiciones se sujeción de la viga.

Si las condiciones de carga varían a lo largo de la viga, la ecuación de momentos también tendrá la variación correspondiente. Esto requeriría una ecuación de momentos entre cada dos puntos sucesivos de discontinuidad de cargas (cargas aisladas, comienzo o terminación, o cambio de forma en las cargas repartidas), lo que daría lugar a dos integraciones para cada tramo y, por consiguiente, dos constantes para cada tramo también. La determinación de estas constantes se hace muy laboriosa y se está expuesto a errores. Afortunadamente, estas complicaciones pueden evitarse escribiendo una única ecuación de momentos válida para toda la viga, pese a las discontinuidades de carga.

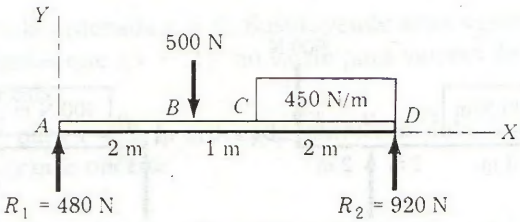


Figura 6-2.

Consideremos, por ejemplo, la viga de la figura 6-2. Aplicando la definición $M = (\Sigma M)_{izq}$, se deduce que las ecuaciones de los momentos entre cada dos puntos de discontinuidad de cargas son:

$$M_{AB} = 480x \text{ N·m}$$
$$M_{BC} = [480x - 500(x - 2)] \text{ N·m}$$
$$M_{CD} = \left[480x - 500(x - 2) - \frac{450}{2}(x - 3)^2\right] \text{ N·m}$$

Obsérvese que la ecuación para el tramo *CD* también es válida en los otros dos, *AB* y *BC*, si los términos $(x - 2)$ y $(x - 3)^2$ no se tienen en cuenta para valores de x menores que 2 y 3, respectivamente. En otras palabras, los términos $(x - 2)$ y $(x - 3)^2$ no tienen existencia para valores de x que hagan negativo al paréntesis.

Como indicación de este convencionalismo vamos adoptar la notación con paréntesis angulares $\langle\ \rangle$ para estos términos, en vez de los paréntesis normales. Con este cambio de notación se obtiene la única ecuación de momentos siguiente:

$$M = \left(480x - 500\langle x - 2\rangle - \frac{450}{2}\langle x - 3\rangle^2\right) \text{ N·m}$$

válida para toda la viga.*

Veamos otro ejemplo. Consideremos la viga de la figura 6-3a, en la cual la carga distribuida se extiende solamente en el segmento *BC*. Se puede crear, sin embargo, una continuidad suponiendo que la carga distribuida se extiende desde *B* hasta *E* y añadiendo una carga igual y opuesta, que la anule, a partir de *C*, como se indica en la figura 6-3b. La ecuación general de momentos, escrita para el tramo *DE* y según la notación anterior, es:

$$M = \left(500x - \frac{400}{2}\langle x - 1\rangle^2 + \frac{400}{2}\langle x - 4\rangle^2 + 1300\langle x - 6\rangle\right) \text{ N·m}$$

* Prescindir de los términos entre paréntesis angulares cuando éstos toman valores negativos tiene su justificación en el hecho de que la ecuación general de momentos se escribe teniendo en cuenta la definición $M = (\Sigma M)_{izq}$, lo que significa que solamente han de tenerse en cuenta las fuerzas aplicadas en la parte de viga a la izquierda de la sección. Ahora bien, un valor negativo en un término entre paréntesis angulares indica que la carga está situada a la derecha de la sección, por lo que no hay que considerarla para la determinación del momento. Un valor cero del paréntesis indica que empieza una carga repartida o la existencia de una carga concentrada.

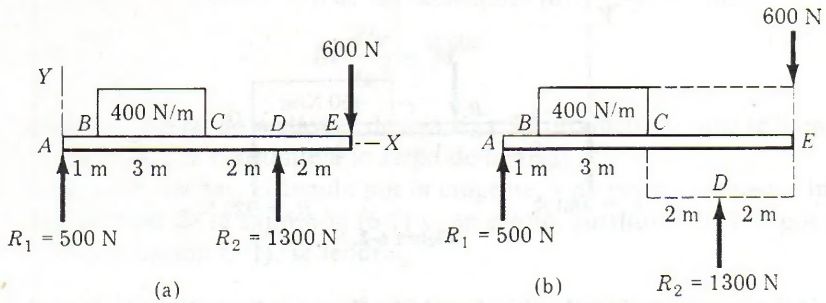


Figura 6-3. Procedimiento para establecer la continuidad de las cargas.

en donde los términos entre paréntesis angulares no tienen existencia para valores de x que hagan negativos a los paréntesis, no a su exponente. Obsérvese cómo todas las cargas quedan automáticamente incluidas en la ecuación de momentos al escribir ésta para el último tramo de la derecha de la viga.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

601. Una carga concentrada de 300 N está apoyada como se indica en la figura 6-4. Determinar las ecuaciones de la elástica y la máxima deflexión de la viga.

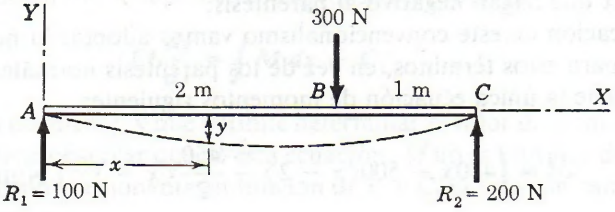


Figura 6-4.

Solución: Escribiendo la ecuación general de momentos para el último tramo BC de la viga, aplicando la ecuación diferencial de la elástica e integrando dos veces, se obtienen las siguientes expresiones para la pendiente y las ordenadas:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = (100x - 300\langle x - 2\rangle)\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad (a)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = (50x^2 - 150\langle x - 2\rangle^2 + C_1)\ \text{N}\cdot\text{m}^2 \qquad (b)$$

$$EIy = \left(\frac{50}{3}x^3 - 50\langle x - 2\rangle^3 + C_1x + C_2\right)\text{N}\cdot\text{m}^3 \qquad (c)$$

Para determinar las dos constantes de integración, que son físicamente iguales a la pendiente y a la ordenada en el origen, se aplican las condiciones de frontera siguientes:

1. En A, para $x = 0$, la ordenada $y = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (c) se obtiene $C_2 = 0$. Recordemos que $\langle x - 2\rangle^3$ no existe para valores de x menores que 2, que harían negativo el paréntesis.

2. En el otro apoyo, para $x = 3$, la ordenada también es nula. Conocido $C_2 = 0$ y sustituyendo en la expresión (c), se obtiene

$$0 = \frac{50}{3}(3)^3 - 50(3 - 2)^3 + 3C_1 \quad \text{o} \quad C_1 = -133\ \text{N}\cdot\text{m}^2$$

Determinadas las constantes de integración y sustituidos sus valores en (b) y (c), se pueden escribir las expresiones de la pendiente y de la ordenada de la elástica en su forma convencional,

TRAMO AB $(0 \leq x \leq 2)$	TRAMO BC $(2 \leq x \leq 3)$
(d) $EI\frac{dy}{dx} = (50x^2 - 133)\ \text{N}\cdot\text{m}^2$	(f) $EI\frac{dy}{dx} = [50x^2 - 150(x - 2)^2 - 133]\ \text{N}\cdot\text{m}^2$
(e) $EIy = \left(\frac{50}{3}x^3 - 133x\right)\text{N}\cdot\text{m}^3$	(g) $EIy = \left[\frac{50}{3}x^3 - 50(x - 2)^3 - 133x\right]\text{N}\cdot\text{m}^3$

Calculemos ahora la máxima deflexión para lo cual se supone que se encuentra en el tramo AB. Su posición se puede determinar derivando la ecuación (e) respecto de x e igualando a cero esta derivada, o bien, igualando a cero la expresión (d) de la pendiente, es decir, hallando el punto de pendiente nula. Por tanto,

$$50x^2 - 133 = 0 \quad \text{o} \quad x = 1.63\ \text{m}$$

Puesto que este valor de x pertenece al tramo AB se confirma la hipótesis de que la máxima deflexión ocurre en este tramo. Ahora, para obtener su valor, se sustituye $x = 1.63$ en la ecuación (e), lo que da:

$$EIy_{\text{máx}} = -145\ \text{N}\cdot\text{m}^3$$

El valor negativo obtenido indica que la ordenada y está por debajo del eje X. Con frecuencia sólo interesa el valor de la deflexión, sin indicación de signo, y entonces se representa por δ, reservando la y para las ordenadas.

El producto EIy se expresa en N · m^3, ya que proviene de la doble integración de la ecuación (6-1), en la que M se expresa en N · m. La primera integración da N · m^2, como unidades de $EI\theta$ correspondientes a la pendiente, y la segunda integración da, en efecto, N · m^3.

Expresando E en N/m^2 e I en m^4, se obtiene y en m. Por ejemplo, si $E = 10 \times 10^9$ N/m^2 e $I = 1.5 \times 10^6$ mm^4 $= 1.5 \times 10^{-6}$ m^4, el valor de y es

$$(10 \times 10^9)(1.5 \times 10^{-6})y = -145$$

de donde

$$y = -9.67 \times 10^{-3}\ \text{m} = -9.67\ \text{mm}$$

602. Hallar el valor de EIy en el punto medio entre apoyos y en el extremo volado de la viga de la figura 6-5.

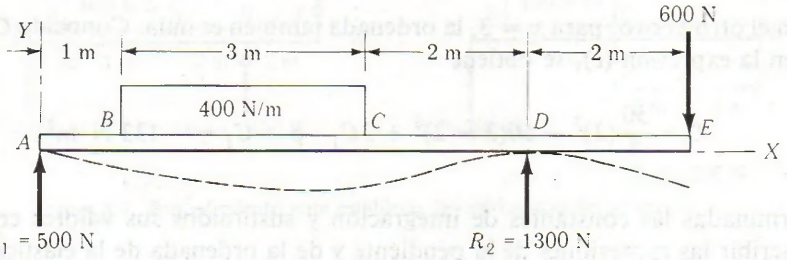


Figura 6-5.

Solución: Es la misma viga de la figura 6-3 para la que ya se había escrito la ecuación general de momentos, ecuación (*h*) de la sección 6-2. Aplicando la ecuación diferencial de la elástica e integrando dos veces resulta:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = \left(500x - \frac{400}{2}\langle x-1\rangle^2 + \frac{400}{2}\langle x-4\rangle^2 + 1300\langle x-6\rangle\right) \text{N·m}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \left(250x^2 - \frac{200}{3}\langle x-1\rangle^3 + \frac{200}{3}\langle x-4\rangle^3 + 650\langle x-6\rangle^2 + C_1\right) \text{N·m}^2$$

$$EIy = \left(\frac{250}{3}x^3 - \frac{50}{3}\langle x-1\rangle^4 + \frac{50}{3}\langle x-4\rangle^4 + \frac{650}{3}\langle x-6\rangle^3 + C_1x + C_2\right) \text{N·m}^3$$

Para determinar C_2 observemos que para $x = 0$, $y = 0$, lo que da $C_2 = 0$. No se tiene en cuenta los términos entre paréntesis angulares si son negativos. Aplicando la otra condición de apoyo, para $x = 6$, $y = 0$, resulta:

$$0 = \frac{250}{3}(6)^3 - \frac{50}{3}(5)^4 + \frac{50}{3}(2)^4 + 6C_1 \quad \text{o} \quad C_1 = -1308 \text{ N·m}^2$$

Para obtener la deflexión en el punto medio se hace $x = 3$ en la ecuación de tramo BC, en la que no se consideran los términos $\langle x-4\rangle^4$ y $\langle x-6\rangle^3$, lo que da

$$EIy = \frac{250}{3}(3)^3 - \frac{50}{3}(2)^4 - 1308(3) = -1941 \text{ N·m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

Análogamente, en la ecuación del tramo DE en la que se tienen en cuenta todos los términos, se hace $x = 8$, con lo que el valor de la ordenada en el extremo es

$$EIy = \frac{250}{3}(8)^3 - \frac{50}{3}(7)^4 + \frac{50}{3}(4)^4 + \frac{650}{3}(2)^3 - 1308(8) = -1814 \text{ N·m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

603. Una viga simplemente apoyada soporta una carga triangular como indica la figura 6-6a. Determinar la ecuación de la elástica y el valor de la deflexión máxima.

Solución: Por simetría, cada reacción es la mitad de la carga total $\frac{1}{2}wL$, por lo que $R_1 = R_2 = \frac{1}{4}wL$. En este ejemplo se tiene la ventaja de la simetría, ya que la elástica lo es con respecto

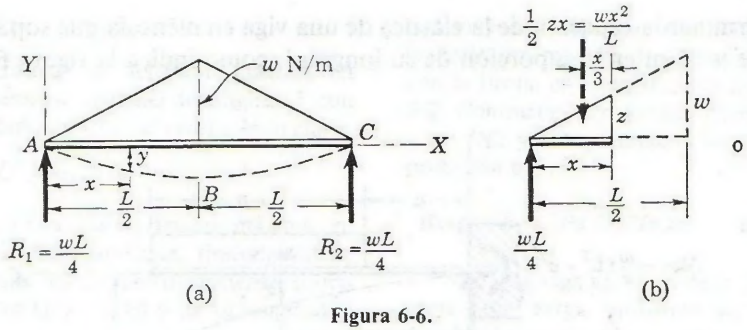


Figura 6-6.

a la vertical que pasa por el punto medio de la viga. Las condiciones de deflexión nula en A y pendiente nula en B hacen que no sea necesario establecer la ecuación general de momentos, ya que sólo se precisa la del tramo AB, y ésta se obtiene fácilmente con ayuda de la figura 6-6b.

Escribiendo la ecuación diferencial de la elástica al tramo AB e integrando dos veces resulta:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_{AB} = \frac{wL}{4}x - \frac{wx^2}{L}\cdot\frac{x}{3} \qquad (a)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wLx^2}{8} - \frac{wx^4}{12L} + C_1 \qquad (b)$$

$$EIy = \frac{wLx^3}{24} - \frac{wx^5}{60L} + C_1x + C_2 \qquad (c)$$

Para determinar las constantes de integración, como ya se ha dicho, para $x = 0$, $y = 0$, lo que da $C_2 = 0$. Por simetría, la pendiente en el centro $dy/dx = 0$, para $x = L/2$. Sustituyendo en (b),

$$0 = \frac{wL}{8}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{w}{12L}\left(\frac{L}{2}\right)^4 + C_1 \text{ o bien, } C_1 = -\frac{5wL^3}{192}$$

Por tanto, la ecuación de A a B, y también de C a B, por la citada simetría, es

$$EIy = \frac{wLx^3}{24} - \frac{wx^5}{60L} - \frac{5wL^3x}{192}$$

o bien,

$$EIy = -\frac{wx}{960L}(25L^4 - 40L^2x^2 + 16x^4)$$

La ordenada máxima, en el centro para $x = L/2$, es

$$EIy = -\frac{wL^4}{120} = -\frac{WL^3}{60}$$

en donde $W = \frac{1}{2}wL$ es la carga total.

604. Determinar la ecuación de la elástica de una viga en ménsula que soporta una carga uniforme de w N/m en una porción de su longitud, como indica la figura 6-7.

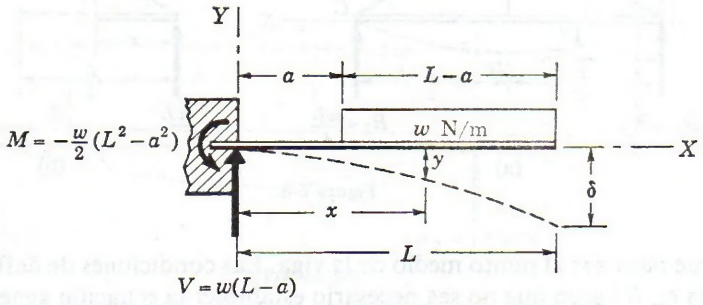


Figura 6-7.

Solución: En el empotramiento, las condiciones de equilibrio determinan los valores de M y V que son: $V = w(L - a)$ y $M = -w(L - a)(a + L - a/2) = -\frac{w}{2}(L^2 - a^2)$. En función de la ecuación general de momentos, la ecuación diferencial de la elástica es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = w(L - a)x - \frac{w}{2}(L^2 - a^2) - \frac{w}{2}\langle x - a\rangle^2 \qquad (a)$$

Integrando (*a*) se obtiene la ecuación de la pendiente,

$$EI\frac{dy}{dx} = w(L - a)\frac{x^2}{2} - \frac{w}{2}(L^2 - a^2)x - \frac{w}{6}\langle x - a\rangle^3 + C_1 \qquad (b)$$

Como la pendiente es nula para $x = 0$, se deduce que $C_1 = 0$. Integrando de nuevo, con $C_1 = 0$, resulta la ecuación de la elástica:

$$EIy = w(L - a)\frac{x^3}{6} - \frac{w}{4}(L^2 - a^2)x^2 - \frac{w}{24}\langle x - a\rangle^4 + C_2 \qquad (c)$$

En ésta, para $x = 0$ es $y = 0$, con lo que también $C_2 = 0$. Obsérvese que tomando el origen de coordenadas en el empotramiento, donde la pendiente y la ordenada son nulas, resultan también nulas las constantes de integración.

Si el valor máximo de la deflexión, en el extremo libre, es δ, es evidente que $\delta = -y$. Sustituyendo $x = L$ y simplificando resulta:

$$EI\delta = \frac{w(L - a)}{8}\left(L^3 + L^2a + La^2 - \frac{a^3}{3}\right)$$

Un valor muy interesante es cuando $a = 0$, es decir, cuando la carga repartida ocupa la totalidad de la ménsula, pues entonces la flecha en el extremo viene dada por

$$EI\delta = \frac{wL^4}{8} = \frac{WL^3}{8}$$

PROBLEMAS

605. Determinar la deflexión máxima en una viga simplemente apoyada de longitud L con una carga concentrada P en el centro de su claro.

Resp. $\delta = PL^3/48EI$

606. Determinar la deflexión máxima en una viga simplemente apoyada, de longitud L, que soporta una carga uniformemente distribuida de w N/m aplicada en toda su longitud.

Resp. $\delta = (5/384)(wL^4/EI) = (5/384)(WL^3/EI)$

607. Determinar el máximo valor de EIy en la ménsula de la figura P-607, cargada como se indica. Considerar el origen de coordenadas en el empotramiento.

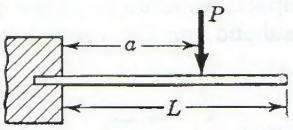


Figura P-607.

608. Obtener la ecuación de la elástica de la ménsula de la figura P-608 sometida a una carga triangular que varía desde cero en el empotramiento hasta w N/m en el extremo libre.

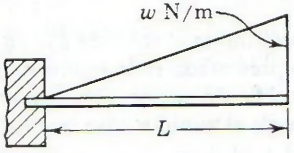


Figura P-608.

609. Como se indica en la figura P-609, una viga simplemente apoyada sostiene dos cargas concentradas simétricamente colocadas. Calcular la deflexión máxima δ y comparar el resultado con la flecha en el centro, del caso 7 de la tabla 6-2. Contrastar el resultado obtenido, poniendo $a = L/2$ y comparándolo con la solución del problema 605.

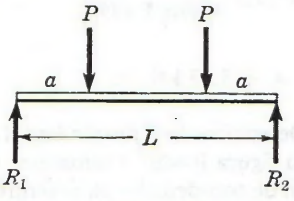


Figura P-609.

Resp. $\delta = (Pa/24EI)(3L^2 - 4a^2)$

610. La viga apoyada de la figura P-610 soporta una carga uniforme w simétricamente distribuida en una porción de su longitud. Determinar la deflexión máxima y confrontar el resultado, poniendo $a = 0$, con la solución del problema 606.

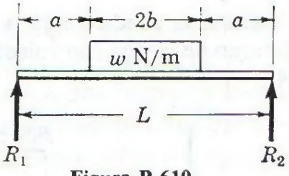


Figura P-610.

611. Calcular el valor de $EI\delta$ en el centro del claro en la viga representada en la figura P-611. Si $E = 10$ GN/m^2, determinar el valor de I necesario para que la deflexión en el centro no sobrepase 1/360 del claro. *Indicación*: Considerar el origen de x en el apoyo derecho siendo x positiva hacia la izquierda.

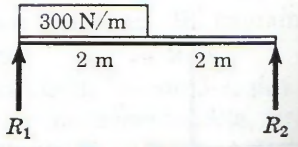


Figura P-611.

Resp. $EI\delta = 500$ N · m^3; $I = 4.50 \times 10^6$ mm^4

612. Calcular el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga cargada como se indica en la figura P-612.

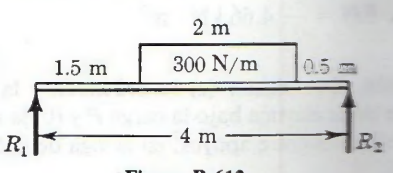


Figura P-612.

Resp. $EI\delta = 657$ N · m^3

613. Calcular el valor de EIy en el extremo derecho de la viga cargada como indica la figura P-613.

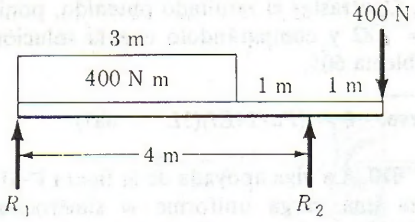


Figura P-613.

Resp. $EIy = 195\ \text{N} \cdot \text{m}^3$

614. Calcular la pendiente de la elástica en el apoyo derecho de la viga con voladizo de la figura P-614.

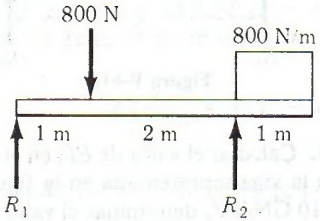


Figura P-614.

615. Calcular el valor de EIy en el centro entre apoyos de la viga con voladizo de la figura P-615.

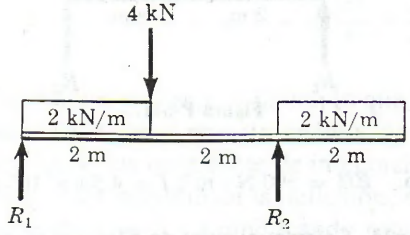


Figura P-615.

Resp. $EIy = -4.66\ \text{kN} \cdot \text{m}^3$

616. Determinar (a) la ordenada y la pendiente de la elástica bajo la carga P y (b) la máxima deflexión entre apoyos, en la viga de la figura P-616.

Resp. (b) $EIy_{\text{máx}} = Pa^2b/9\sqrt{3}$

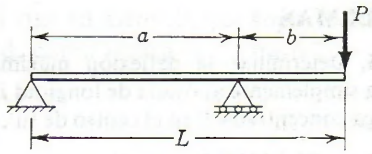


Figura P-616 y P-617.

617. Sustituir la carga P del problema 616 por un par M aplicado en el extremo derecho, y determinar la pendiente y ordenada en el mismo punto.

Resp. $EIdy/dx = -(M/3)(L + 2b)$; $EI\delta = (Mb/6)(2L + b)$

618. Una viga simplemente apoyada resiste la acción de un par M aplicado como se indica en la figura P-618. Determinar la ecuación de la elástica y la deflexión en el punto de aplicación del par. Después, poniendo $a = L$ y $a = 0$, comparar el resultado con los casos 11 y 12 de la Tabla 6-2.

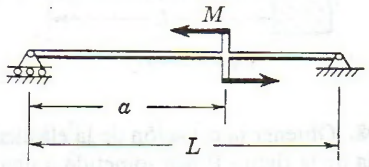


Figura P-618.

Resp. $EIy = (Ma/3L)(L^2 - 3La + 2a^2)$

619. Determinar el valor de EIy en el centro de la viga representada en la figura P-619. (*Indicación:* Use el hecho de que, debido a la simetría, la pendiente en el punto medio es nula.)

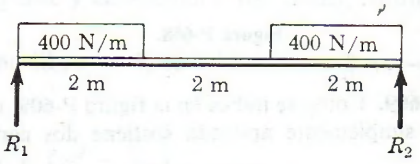


Figura P-619.

Resp. $EIy = -3.33\ \text{kN} \cdot \text{m}^3$

620. Determinar la deflexión δ en el centro de la viga de la figura P-620. *Indicación:* Considerar el origen de coordenadas en el centro de la viga ya deformada.

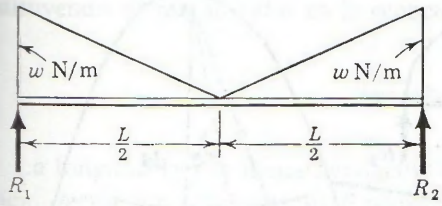


Figura P-620.

Resp. $\delta = (9/1920)(wL^4/EI)$

621. Calcular $EI\delta$ en el centro del claro, en la viga de la figura P-621. Confrontar el resultado obtenido, haciendo $a = 0$, con el resultado del problema 606. Téngase en cuenta la misma indicación del problema anterior.

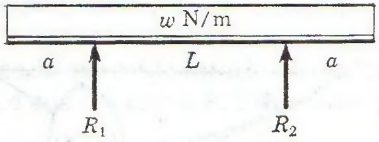


Figura P-621.

6-3. MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS

Un método muy útil y sencillo para determinar la pendiente y deflexión en las vigas es el *método del área de momentos,* en el que intervienen el área del diagrama de momentos y el momento de dicha área. Se comienza, en primer lugar, por los dos teoremas básicos de este método; luego, una vez calculadas las áreas y los momentos de estas áreas del diagrama de momentos, se aplica el método a varios tipos de problemas. El método está especialmente indicado en la determinación de la pendiente o de la deflexión en puntos determinados, más que para hallar la ecuación general de la elástica. Como en su utilización se ha de tener en cuenta la forma y relaciones geométricas en la elástica, no se pierde el significado físico de lo que se está calculando.

El método del área de momentos está sujeto a las mismas limitaciones que el de la doble integración. Sin embargo, para verlo en su totalidad, como un conjunto completamente independiente, se repite una pequeña parte de lo dicho en la sección anterior. La figura 6-8a representa una viga simplemente apoyada con una carga cualquiera. La elástica, como intersección de la superficie neutra con el plano vertical que pasa por los centroides de las secciones, se representa en la figura 6-8b, aunque sumamente exagerada. El diagrama de momentos se supone que es el representado en la figura 6-8c.

Al igual que en la deducción de la fórmula de la deflexión, sección 5-2, dos secciones planas adyacentes, distantes una longitud dx sobre una viga inicialmente recta, giran un ángulo $d\theta$ una respecto a la otra. Se puede ver con más detalle en la parte CD ampliada de la figura 6-8b. El arco ds medido a lo largo de la elástica entre las dos secciones es igual $\rho\, d\theta$, siendo ρ el radio de curvatura de la elástica en ese punto. De la ecuación (5-1) se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

y como $ds = \rho\, d\theta$, ahora escribimos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{ds}$$

o bien

$$d\theta = \frac{M}{EI}\, ds \qquad (a)$$

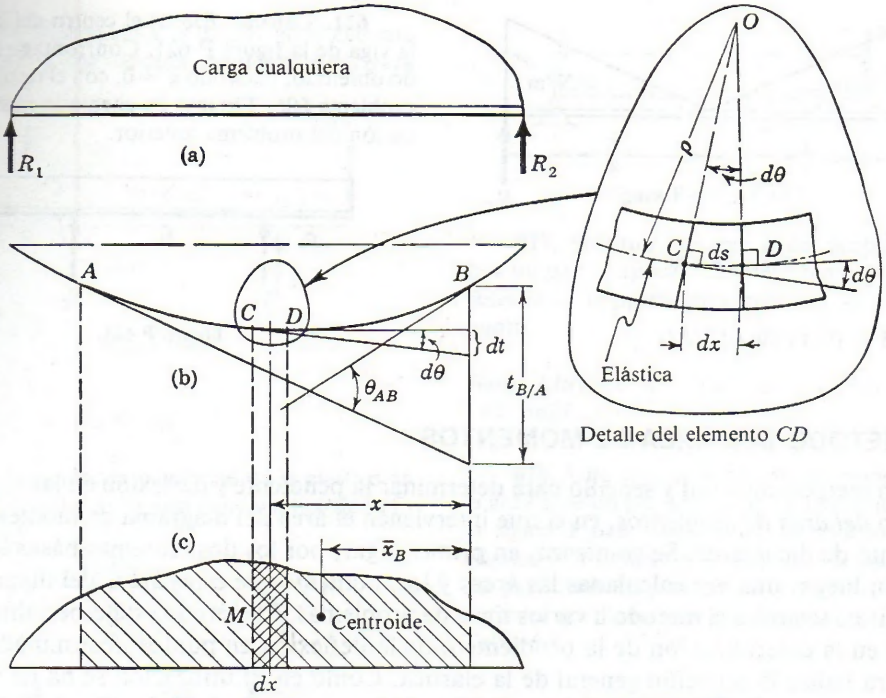


Figura 6-8. Teoremas del área del diagrama de momentos.

En la mayoría de los casos prácticos, la elástica es tan llana que no se comete error apreciable suponiendo que *ds* es igual a su proyección *dx*. En estas condiciones, se tiene:

$$d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \qquad (b)$$

Evidentemente, dos tangentes trazadas a la elástica en *C* y *D*, como en la figura 6-8b, forman el mismo ángulo $d\theta$ que el que forman las secciones *OC* y *OD*, por lo que la *desviación angular,* o ángulo entre las tangentes a la elástica en dos puntos cualesquiera *A* y *B*, es igual a la suma de estos pequeños ángulos:

$$\theta_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \frac{1}{EI}\int_{x_A}^{x_B} M\,dx \qquad (c)$$

Obsérvese también, figura 6-8b, que la distancia desde el punto *B* de la elástica, medida perpendicularmente a la posición inicial de la viga, hasta la tangente trazada a la curva por otro punto cualquiera *A*, es la suma de los segmentos *dt* interceptados por las tangentes sucesivas trazadas a la elástica en puntos sucesivos. Cada uno de estos segmentos *dt* puede considerarse como un arco de radio *x* y ángulo $d\theta$:

$$dt = x\,d\theta$$

de donde

$$t_{B/A} = \int dt = \int x\,d\theta$$

Sustituyendo $d\theta$ por su valor en la ecuación (b) se obtiene:

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI}\int_{x_A}^{x_B} x(M\,dx) \qquad (d)$$

La longitud $t_{B/A}$ se llama desviación de B con respecto a una tangente trazada por A, o bien, *desviación tangencial* de B respecto de A. El subíndice indica que va desde B hasta la tangente trazada en A. La figura 6-9 aclara la diferencia que existe entre la desviación tangencial $t_{B/A}$ de B respecto de A y la desviación $t_{A/B}$ de A con respecto a B. En general, dichas desviaciones son distintas.

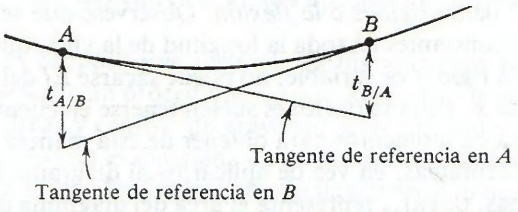


Figura 6-9. En general, $t_{A/B}$ no es igual a $t_{B/A}$.

El significado geométrico de las ecuaciones (c) y (d) conduce a los dos teoremas fundamentales del método del área de momentos. En el diagrama de momentos flexionantes de la figura 6-8c, se observa que $M\,dx$ es el área del elemento diferencial rayado situado a distancia x de la ordenada que pasa por B. Ahora bien, como $\int M\,dx$ es la suma de tales elementos, la ecuación (c) se puede escribir en la forma

$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB} \qquad (6\text{–}4)$$

Esta es la expresión algebraica del Teorema I, que se puede enunciar como sigue:

Teorema I: La desviación angular, o ángulo entre las tangentes trazadas a la elástica en dos puntos cualesquiera A y B, es igual al producto de $1/EI$ por el área del diagrama de momentos flexionantes entre estos dos puntos.

La figura 6-8c muestra cómo la expresión $x(M\,dx)$ que aparece dentro de la integral en la ecuación (d) es el momento del área del elemento rayado con respecto a la ordenada en B. Por tanto, el significado geométrico de la integral $\int x(M\,dx)$ es el momento con respecto a la ordenada en B del área de la porción del diagrama de momentos flexionantes comprendida entre A y B. Con ello la expresión algebraica del Teorema II es:

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B \qquad (6\text{–}5)$$

Este teorema se enuncia así:

Teorema II: La desviación tangencial de un punto B con respecto a la tangente trazada a la elástica en otro punto cualquiera A, en dirección perpendicular a la inicial de la viga, es

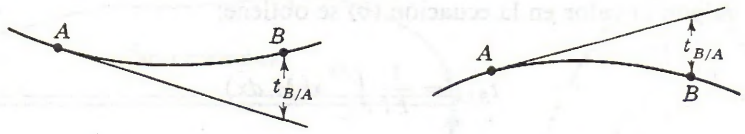


Figura 6-10. Signo de las desviaciones tangenciales. (a) Positiva; B queda situado sobre la tangente de referencia. (b) Negativa; B queda situado por debajo de la tangente de referencia.

igual al producto de $1/EI$ por el momento con respecto a B del área de la porción del diagrama de momentos entre los puntos A y B.

El producto EI se llama *rigidez a la flexión*. Obsérvese que se ha supuesto tácitamente que E e I permanecían constantes en toda la longitud de la viga, que es un caso muy común. Sin embargo, cuando la rigidez es variable, no puede sacarse EI del signo integral, y hay que conocerla en función de x. Tales variaciones suelen tenerse en cuenta dividiendo entre EI las ordenadas del diagrama de momentos para obtener de esta manera un diagrama de M/EI al que se aplican los dos teoremas, en vez de aplicarlos al diagrama de M.

En los dos teoremas, $(\text{área})_{AB}$ representa el área del diagrama de momentos entre las ordenadas correspondientes a los puntos A y B, $\bar{x}_B$ es el brazo de momento de esta área con respecto a B. Cuando el área del diagrama de momentos se compone de varias partes (véase la Sec. 6-4), positivas y negativas, la expresión $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_B$ representa el momento del área de todas estas partes. El momento del área se toma siempre con respecto a la ordenada del punto cuya desviación se quiere obtener, por lo que conviene ponerle a $\bar{x}$ el subíndice correspondiente, por ejemplo B, lo que indica que el brazo de momentos se toma hasta este punto. Obsérvese que este subíndice B es el mismo del numerador del subíndice de t, B/A.

Los convenios de signos siguientes son de gran importancia: La desviación tangencial de un punto cualquiera es positiva si el punto queda por encima de la tangente con respecto a la cual se toma esta desviación, y negativa si queda por debajo de dicha tangente. En la figura 6-10 se representan las desviaciones positivas y negativas. Recíprocamente, una desviación positiva indica que el punto queda por encima de la tangente de referencia.*

El otro convencionalismo de signos es el que se refiere a las pendientes y se indica en la figura 6-11. Un valor positivo de la *variación de pendiente* θ_{AB} indica que la tangente en el

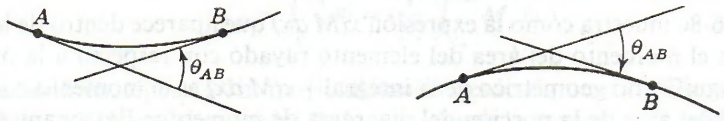


Figura 6-11. Signo de la variación de pendiente o desviación angular. (a) Positiva; θ_{AB} en sentido contrario al del reloj respecto de la tangente de la izquierda. (b) Negativa; θ_{AB} en sentido del reloj respecto de la tangente de la izquierda.

* **N. de T.** Las áreas de momentos se toman con su signo, el mismo que el momento flexionante, y los brazos de momentos son siempre positivos. Así en la viga de la figura 6-9, que en el tramo AB tiene momentos positivos, $t_{A/B}$ y $t_{B/A}$ son ambas positivas.

punto situado a la derecha, B, se obtiene girando en sentido contrario al del reloj la tangente trazada en el punto más a la izquierda, A; es decir, que para pasar de la tangente en A a la tangente en B se gira en sentido contrario al del reloj, y viceversa para los valores negativos de θ_{AB}.

6-4. DIAGRAMAS DE MOMENTOS POR PARTES

Para aplicar los teoremas del área de momentos se ha de poder calcular fácilmente, y con precisión, el área de cualquier parte de un diagrama de momentos, y el momento de dicha área con respecto a un eje cualquiera. Un procedimiento es, evidentemente, integrar las expresiones $\int M\,dx$ y $\int x(M\,dx)$ entre los límites apropiados, debiendo estar expresado M en función de x.

Sin embargo, nuestro propósito es sustituir las integraciones por cálculos numéricos muy sencillos. Para ello se sigue un procedimiento que consiste en dividir el diagrama de momentos en partes, cuyas áreas y centros de gravedad sean conocidos. Empezaremos, pues, por ver cómo se puede representar el diagrama de momentos flexionantes de forma que se vea el efecto de cada carga por separado. En adelante lo llamaremos *diagrama de momentos por partes,* en lugar del diagrama que pudiera llamarse *normal* o *convencional.*

Su construcción se basa en los dos principios fundamentales:

1. El momento flexionante producido en una determinada sección por un sistema de cargas es igual a la suma de los momentos flexionantes producidos en la misma sección por cada carga actuando por separado. Este principio se expresa algebraicamente mediante la ecuación:

$$M = (\Sigma M)_{\text{izq}} = (\Sigma M)_{\text{der}} \tag{4-2}$$

en donde $(\Sigma M)_{\text{izq}}$ representa la suma de los momentos producidos por todas las fuerzas que actúan a la izquierda de la sección, y $(\Sigma M)_{\text{der}}$ la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan a la derecha de la misma.

2. El efecto en el momento flexionante de cualquier carga individual es de la forma general:

$$y = kx^n \tag{a}$$

La figura 6-12 representa esta ecuación. El área y la posición del centro de gravedad se calculan fácilmente mediante las expresiones:

$$\text{área} = \frac{1}{n+1} \cdot bh \tag{b}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n+2} \cdot b \tag{c}$$

siendo b la base y h la altura.

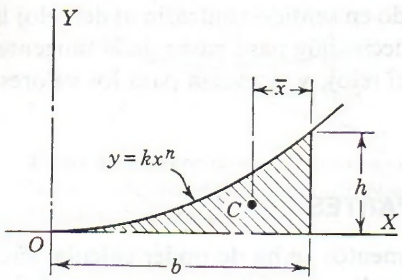


Figura 6-12.

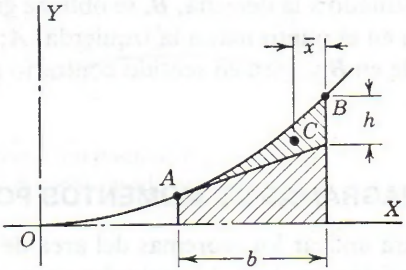


Figura 6-13.

Para calcular el área comprendida entre dos ordenadas cualesquiera A y B, figura 6-13, las ecuaciones (b) y (c) dan los valores correspondientes al área comprendida entre la curva, la tangente en A y la ordenada en B. A esta área habrá que añadir, por supuesto, el área trapecial entre la tangente en A y el eje X.

En la tabla 6-1 se comprueba este segundo principio. Aparecen una serie de datos correspondientes a ménsulas cargadas con tipos de carga cada vez más complejos.

Se observa, por ejemplo, que una ménsula que soporta un par C en el extremo tiene una distribución de momentos flexionantes del tipo $y = kx^n$ donde $k = -C$ y $n = 0$, es decir, $M = -Cx^0$. En otras palabras, un par da lugar a una distribución de momentos de grado cero. Análogamente, una carga concentrada da lugar a una distribución de momentos de grado uno; una carga uniforme, a una de momentos de grado dos, etc.

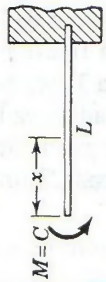
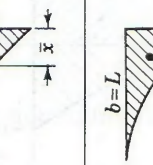
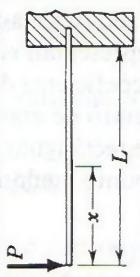
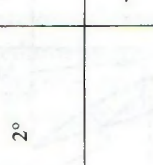
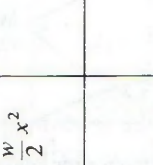
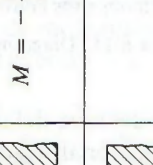
En la columna encabezada con ÁREA se expresa el área del diagrama de momento en función de la base b y la máxima altura h del diagrama, con un coeficiente para cada tipo de carga. La posición del centro de gravedad de cada diagrama de momentos, medida desde el punto de ordenada máxima, viene dada por la longitud de la base por un coeficiente. Estos coeficientes, cuyo cálculo es muy sencillo, se obtienen de las ecuaciones (b) y (c), dando a n el valor del grado de cada ecuación, es decir, $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, etc.

Un ejemplo aclarará la forma de utilizar la Tabla 6-1 para trazar el diagrama de momentos por partes. La viga simplemente apoyada de la figura 6-14 tiene 3 m de longitud y soporta una carga uniformemente distribuida de 300 N/m sobre una longitud de 2 m a partir del apoyo derecho.

En cualquier sección a-a entre A y B, el momento definido por $M = (\Sigma M)_{izq}$ se debe únicamente a R_1. En cualquier sección b-b entre B y C el momento se debe a R_1 y a la parte de carga uniformemente distribuida entre B y b-b. Obsérvese que la carga uniformemente distribuida no interviene en el momento flexionante entre A y B. En realidad, el efecto de R_1 en el momento flexionante en cualquier sección de la viga equivale al que tendría en la ménsula (a), mientras que el efecto de la carga uniforme en cualquier sección equivale al que tendría en la ménsula (b).

Tomando los datos necesarios de la Tabla 6-1 se pueden poner los diagramas de momentos flexionantes de las vigas (a) y (b) sobre una base común, línea de momento cero, como se indica en (c) de la misma figura. Evidentemente, la suma algebraica de las áreas sombreadas de (c) dan como resultado el diagrama de momentos convencional ya que el momento en cualquier sección de la viga original es igual a la suma de los momentos que producen en la misma sección las cargas individuales, principio básico 1. Por tanto, si el área triangular se

TABLA 6-1 Cargas en vigas en voladizo ó ménsulas

TIPO DE CARGA	VOLADIZO CARGADO	DISTRIBUCIÓN (momento en una sección x)	GRADO DE LA ECUACIÓN DE MOMENTO	DIAGRAMA DE MOMENTOS	ÁREA	$\bar{x}$
Par		$M = -C$	Cero (o sea, $M = -Cx^0$)		$\frac{1}{1}bh$	$\frac{1}{2}b$
Concentrada		$M = -Px$	1°		$\frac{1}{2}bh$	$\frac{1}{3}b$
Uniformemente distribuida		$M = -\frac{w}{2}x^2$	2°		$\frac{1}{3}bh$	$\frac{1}{4}b$
Uniformemente variada		$M = -\frac{w}{6L}x^3$	3°		$\frac{1}{4}bh$	$\frac{1}{5}b$

dibuja hacia abajo, resulta el diagrama (d). El área rayada de este diagrama (d) es igual al área del diagrama (e), ya que la única diferencia, en cuanto al aspecto, es que en este último las ordenadas de los momentos se han tomado a partir de la línea horizontal. De aquí se deduce que, recíprocamente, el diagrama de momentos convencional se puede sustituir por el de partes de la figura 6-14c, en el que las áreas y los centros de gravedad de cada parte son fácilmente calculables mediante los datos de la Tabla 6-1.

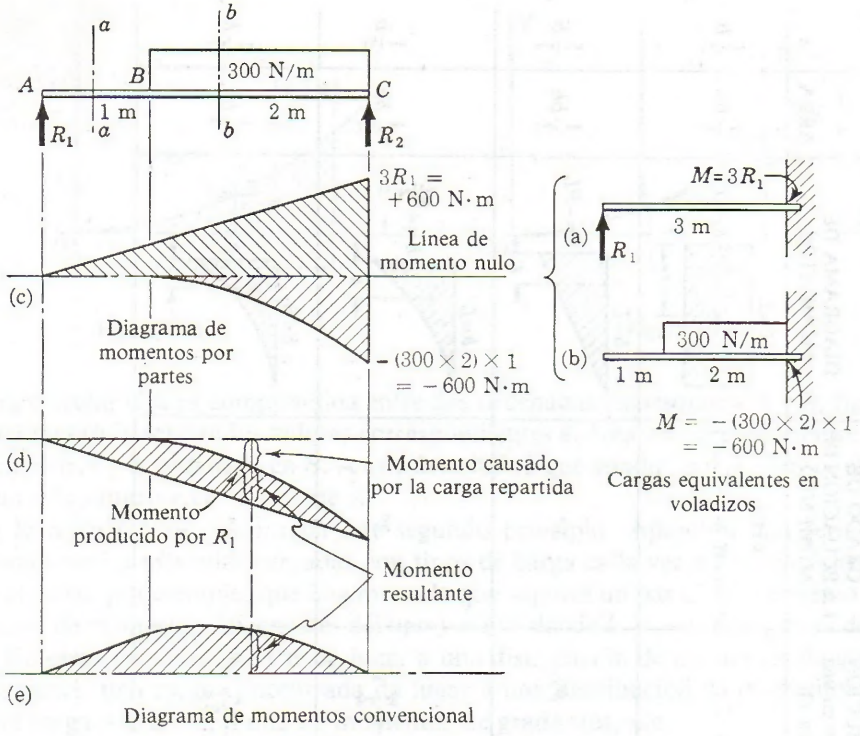


Figura 6-14. Diagramas de momentos por partes.

Para calcular el momento del área del diagrama de momentos, obsérvese que el momento del área del diagrama convencional, figura 6-14e, equivale a la suma de los momentos de las áreas de sus partes componentes, tal como se representan en la figura 6-14c. Por tanto, como cada una de dichas áreas es el producto de un coeficiente de la Tabla 6-1 por las dimensiones del rectángulo circunscrito, y la posición del centro de gravedad de cada parte viene dada por otro coeficiente de la tabla por la base de este rectángulo, se puede obtener muy fácilmente el momento de las áreas con respecto a un punto cualquiera, C por ejemplo, con lo que resulta

$$[(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C = \Sigma ax]$$

$$(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C = \left(\frac{3 \times 600}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 3\right) - \left(\frac{2 \times 600}{3}\right)\left(\frac{1}{4} \times 2\right)$$
$$= 700 \text{ N·m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

La notación $\bar{x}_C$ indica que el brazo de momento ha sido medido desde C. Por el Teorema II del método del área de momentos, este resultado mide el producto $EIt_{C/A}$, siendo $t_{C/A}$ la desviación de C con respecto a la tangente trazada por A a la elástica.

Una última observación. Con frecuencia no es necesario calcular las reacciones del viga. En el ejemplo propuesto, y puesto que el momento flexionante en C ha de ser nulo, el mo-

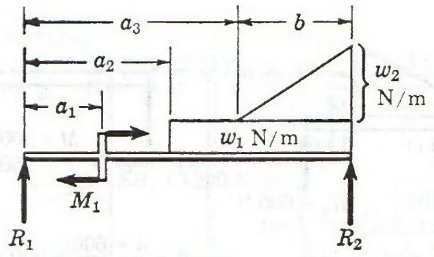


Figura 6-15.

mento de la reacción R_1 en C, igual a $3R_1$, tiene que equilibrar al momento de -600 N • m producido por las cargas.

Se observará cómo la técnica de la representación del diagrama de momentos por partes es realmente una interpretación gráfica del procedimiento que se ha estudiado en la sección 6-2 para expresar la distribución general de momentos en toda la viga mediante una sola ecuación. En efecto, según aquel método, para la viga de la figura 6-15 la ecuación general de momentos es

$$M = R_1x + M_1\langle x - a_1\rangle^0 - \frac{w_1}{2}\langle x - a_2\rangle^2 - \frac{w_2}{6b}\langle x - a_3\rangle^3$$

Si cada término dentro de los paréntesis angulares se sustituye por una nueva variable que tenga su origen en el punto donde empieza la carga, se deduce que cada sumando de la ecuación general de momentos es la distribución de momentos en una viga en ménsula de alguno de los tipos de la Tabla 6-1. Así, pues, sustituyendo $\langle x - a_1\rangle$ por u, $\langle x - a_2\rangle$ por v y $\langle x - a_3\rangle$ por z, resulta

$$M = R_1x + M_1u^0 - \frac{w_1}{2}v^2 - \frac{w_2}{6b}z^3$$

en donde, naturalmente, las variables u, v y z no pueden tener signo negativo.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

622. Calcular el momento con respecto al apoyo izquierdo del área de momentos flexionantes de la viga de la figura 6-16a.

Solución: Las reacciones, calculadas por las ecuaciones del equilibrio estático, son $R_1 = 300$ N y $R_2 = 600$ N. El diagrama de momentos por partes se determina aplicando $M = (\Sigma M)_{\text{izq}}$ a los tramos AB y BC, y $M = (\Sigma M)_{\text{der}}$ al tramo CD, ya que en este caso resulta más sencillo hacerlo así que haciéndolo en todos los tramos por las fuerzas de la izquierda. En general, pues, los momentos flexionantes se determinan por el lado que sea más cómodo.

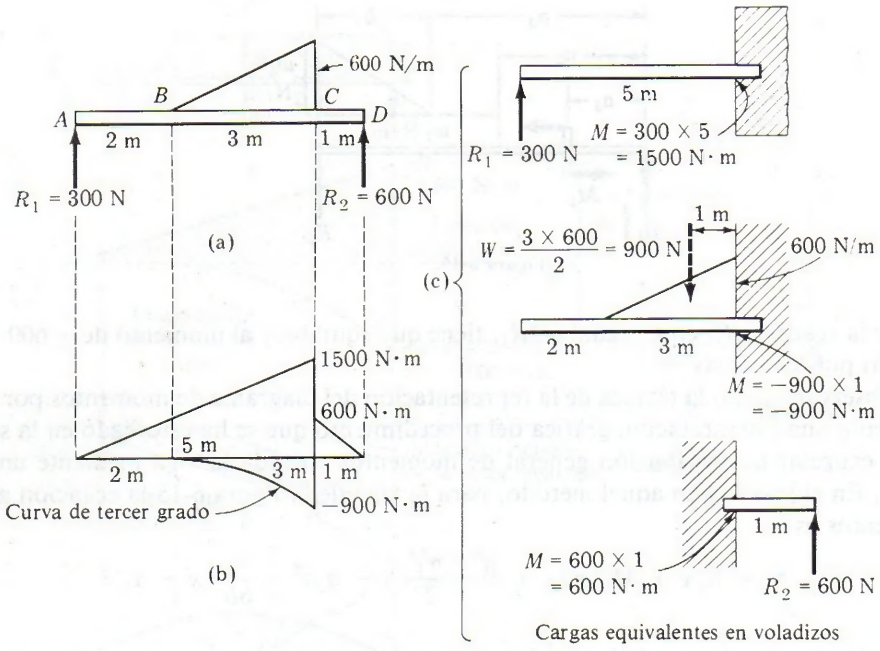


Figura 6-16.

En la figura 6-16c se indican las ménsulas equivalentes. El diagrama de momentos por partes se representa en la figura 6-16b. Conviene comprobar que el momento en C es el mismo considerando las fuerzas de la derecha o las de la izquierda.

El momento del área del diagrama de M respecto del extremo izquierdo A se calcula como la suma de los momentos de las áreas de sus partes componentes. Tomando los coeficientes correspondientes de la Tabla 6-1, para el área y para la posición del centro de gravedad, resulta:

$$\left[(\text{área})_{AD} \cdot \bar{x}_A = \Sigma ax\right]$$

$$(\text{área})_{AD} \cdot \bar{x}_A = \left(\frac{1500 \times 5}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \times 5\right) + \left(\frac{600 \times 1}{2}\right)\left(5 + \frac{1}{3} \times 1\right) - \left(\frac{900 \times 3}{4}\right)\left(2 + \frac{4}{5} \times 3\right)$$

$$= 11.13 \text{ kN·m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

Esta solución representa un valor de EIt. ¿Cuál es?

623. Calcular el momento con respecto a C del área del diagrama de momentos comprendida entre los apoyos en la viga con voladizo de la figura 6-17a.

Solución: En cualquier sección entre A y C el momento flexionante convencional se calcula más fácilmente mediante las fuerzas a la izquierda de la sección, mientras que entre C y D es más sencillo el cálculo mediante las fuerzas de la derecha. El diagrama de momentos por partes de la figura 6-17b se ha trazado combinando los de las ménsulas de la figura 6-17c.

En este problema no es preciso calcular el valor de las reacciones. El momento producido por R_1 en C se halla teniendo en cuenta que debe ser el mismo considerando las fuerzas a

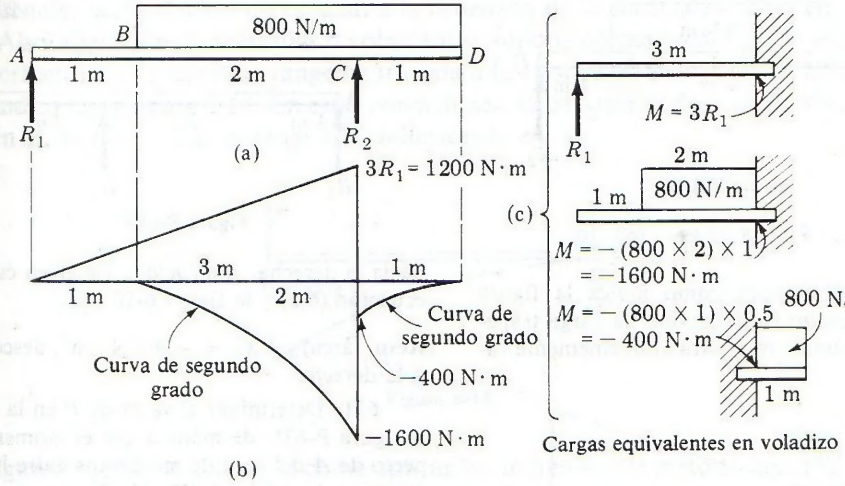


Figura 6-17.

la izquierda que las fuerzas a la derecha. En otras palabras, $3R_1 - 1600 = -400$, de donde $3R_1 = 1200$ N · m.

Para obtener el momento del área del diagrama de M entre A y C con respecto a C, se tiene:

$$[(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C = \Sigma ax]$$

$$(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C = \left(\frac{3 \times 1200}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right) - \left(\frac{2 \times 1600}{3}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = 1270 \text{ N·m}^3$$

PROBLEMAS

Calcular en cada una de las vigas de los problemas 624 a 629 el momento del área del diagrama de momentos flexionantes comprendida entre los apoyos respecto de cada uno de éstos.

624. Viga cargada como indica la figura P-624.

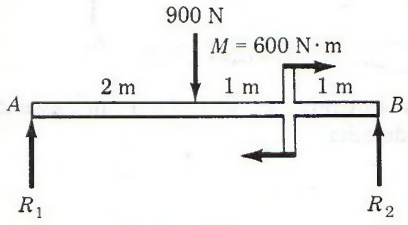


Figura 6-24.

Resp. $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 2500 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

625. Viga cargada como indica la figura P-625. *Indicación:* Trazar el diagrama de momentos por partes, de derecha a izquierda.

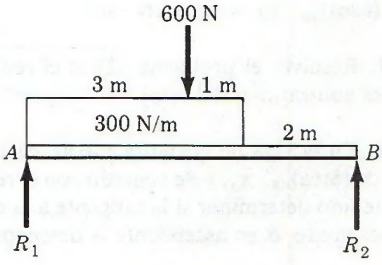


Figura 6-25.

626. Viga cargada como indica la figura P-626.

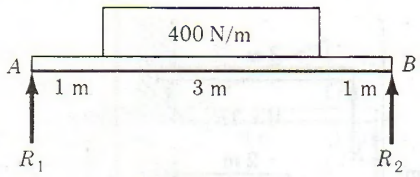


Figura P-626.

Resp. $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_B = 8.25 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$

627. Viga cargada como indica la figura P-627. *Indicación:* Descomponer la carga trapezoidal en una uniforme y otra uniformemente variada.

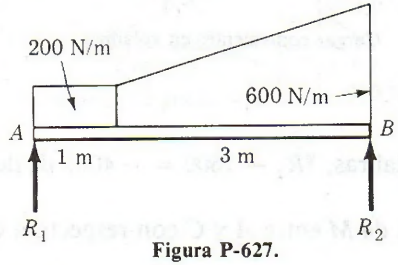


Figura P-627.

628. Viga cargada con una carga uniformemente variada y un par, como indica la figura P-628.

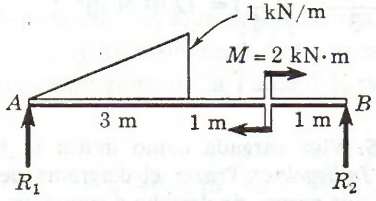


Figura P-628 y P-629.

Resp. $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 2.13 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$

629. Resolver el problema 628 si el sentido del par es contrario al del reloj.

630. En la viga de la figura P-630, calcular el valor de $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$, y de acuerdo con el resultado obtenido determinar si la tangente a la elástica en el punto B es ascendente o descendente hacia la derecha. *Indicación:* Tener en cuenta la ecuación (6-5) y la figura 6-10.

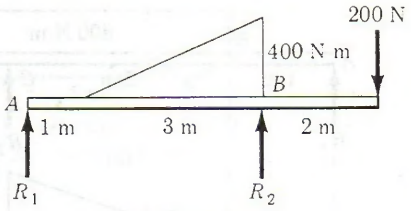


Figura P-630.

Resp. $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = -463 \text{ N} \cdot \text{m}^3$; descendente a la derecha

631. Determinar el valor de P en la viga de la figura P-631, de manera que el momento respecto de A del área de momentos entre los apoyos sea nulo. ¿Qué significado físico tiene este resultado?

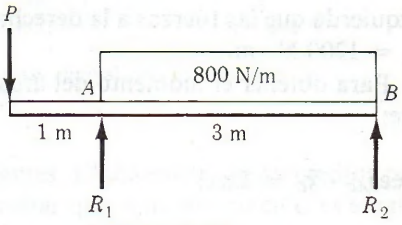


Figura P-631.

632. En la viga de la figura P-632, calcular el valor de $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$. De acuerdo con el resultado obtenido, determinar si la tangente a la elástica en el punto B se dirige hacia arriba o hacia abajo, de izquierda a derecha. *Indicación*: Tener en cuenta la ecuación (6-5) y la figura 6-10.

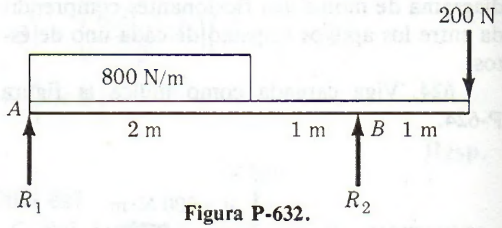


Figura P-632.

Resp. $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 1.27 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$; ascendente a la derecha

6-5. DEFORMACIÓN DE VIGAS EN VOLADIZO

Como ya se dijo, la desviación tangencial de un punto cualquiera es la distancia desde ese punto de la elástica a la tangente trazada a la curva en otro punto (Sec. 6-3, Fig. 6-8). En

consecuencia, la desviación no es igual a la ordenada de la elástica en la generalidad de los casos. Ahora bien, en las ménsulas o voladizos se supone normalmente que el empotramiento es perfecto y, por tanto, la tangente trazada a la elástica en este punto es horizontal, como se indica en la figura 6-18. En estas condiciones, la desviación de A con respecto a la tangente en B, es decir, $t_{A/B}$, es igual a la deflexión δ_A en A.

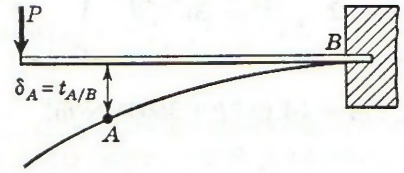


Figura 6-18.

Algunos ejemplos aclararán cómo aplicar los teoremas del método del área de momentos para determinar la pendiente y la deflexión en tales tipos de vigas. Después se considera su aplicación a las vigas simplemente apoyadas, sin voladizos o con ellos.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

633. La viga en ménsula de la figura 6-19 tiene un módulo elástico $E = 12\ \text{GN/m}^2$, $I = 10 \times 10^6\ \text{mm}^4$. Hallar el valor de P tal que la deflexión en el extremo libre sea de 20 mm.

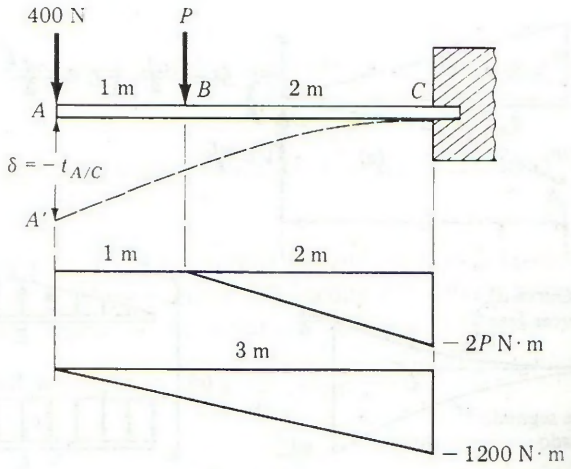


Figura 6-19.

Solución: Se traza, como indica la figura, el diagrama de momentos por partes. La deflexión δ en A es numéricamente igual a la desviación de A con respecto a la tangente en C, ya

que esta desviación es negativa, pues A queda bajo la tangente en C. Por el Teorema II se tiene

$$t_{A/C} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_A$$

$$-\delta = \frac{1}{EI}\left[-\left(\frac{2 \times 2P}{2}\right)\left(1 + \frac{2}{3} \times 2\right) - \left(\frac{3 \times 1200}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \times 3\right)\right]$$

de donde

$$EI\delta = (4.667P + 3600)\ \text{N}\cdot\text{m}^3$$

Como $EI\delta$ se expresa en N · m^3, I debe estar en m^4 y δ en m. Sustituyendo, pues, los valores dados de E, I y δ resulta

$$(12 \times 10^9)(10 \times 10^{-6})(20 \times 10^{-3}) = 4.667P + 3600$$

de donde,

$$P = -257\ \text{N} \qquad \textbf{Resp.}$$

El valor negativo de P indica que su sentido es hacia arriba y no hacia abajo como se había supuesto.

634. Calcular la pendiente y la deflexión máxima en la viga en voladizo de la figura 6-20a que soporta una carga uniformemente variable desde cero en el empotramiento hasta w N/m en el extremo libre.

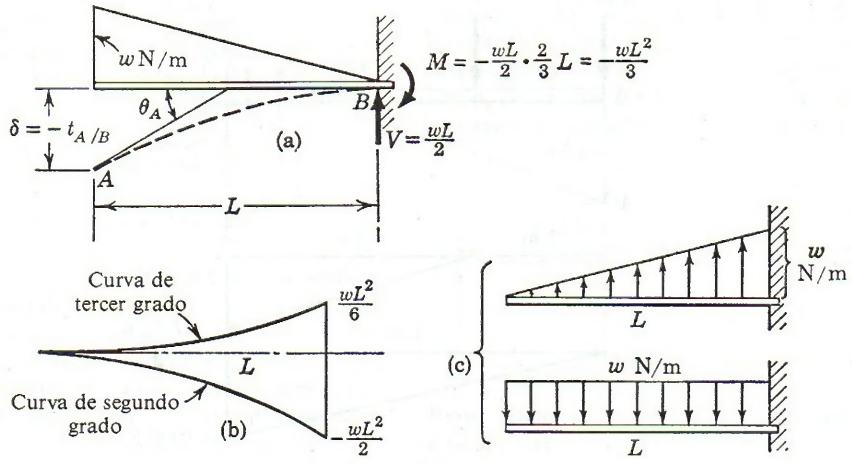


Figura 6-20.

Solución: Aunque la carga dada no responde a ninguno de los tipos de la Tabla 6-1 se puede transformar fácilmente en suma de dos de ellos. Para ello se sustituye por las cargas que indi-

ca la figura 6-20a por las que muestra la figura 6-20c, es decir, superponiendo una carga hacia abajo uniformemente repartida, y una hacia arriba uniformemente variada. En estas condiciones resulta el diagrama de momentos por partes que muestra la figura 6-20b.

De la curva elástica de la figura 6-20a se deduce que la pendiente y la deflexión máximas tienen lugar en el extremo libre A. El ángulo θ_A es igual a la variación de la pendiente entre las tangentes a la elástica en los puntos A y B. Por el Teorema I se tiene:

$$\theta_A = \theta_{AB} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{wL^2}{6}\cdot L - \frac{1}{3}\cdot\frac{wL^2}{2}\cdot L\right] = -\frac{wL^3}{8EI}$$

De acuerdo con la figura 6-11, el signo menos indica que el ángulo se mide en sentido del reloj al pasar de la tangente en A a la tangente en B, por lo que la tangente en A es ascendente hacia la derecha, como se puede observar.

La deflexión máxima δ en A, es numéricamente igual a $t_{A/B}$, esto es, la desviación de A con respecto a la tangente en B. Esta desviación, como en el problema anterior, es negativa, ya que A queda por debajo de la tangente en B. Aplicando el Teorema II se tiene:

$$\left[t_{A/B} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB}\cdot \bar{x}_A\right]$$

$$-\delta = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{wL^2}{6}\cdot L\right)\left(\frac{4}{5}L\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{wL^2}{2}\cdot L\right)\left(\frac{3}{4}L\right)\right]$$

Simplificando,

$$\delta = \frac{11}{120}\frac{wL^4}{EI} \qquad \textbf{Resp.}$$

Recordemos que la notación $\bar{x}_A$ indica que el brazo de momentos de las áreas se mide desde A.

635. Para el voladizo cargado, como indica la figura 6-21a, calcular el valor de $EI\delta$ en A y en B.

Solución: Las deflexiones en A y B son numéricamente iguales a las desviaciones de A y B respecto de la tangente en C. Puesto que A y B quedan por debajo de la tangente, tales desviaciones, $t_{A/C}$ y $t_{B/C}$, son negativas. Aplicando el Teorema II se tiene:

$$-\delta_A = t_{A/C} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AC}\cdot \bar{x}_A \qquad (a)$$

y

$$-\delta_B = t_{B/C} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{BC}\cdot \bar{x}_B \qquad (b)$$

Obsérvese que en la ecuación (a) se utiliza el diagrama de momentos total entre A y C, mientras que en (b) solamente la parte del diagrama entre B y C. Veamos primero distintas

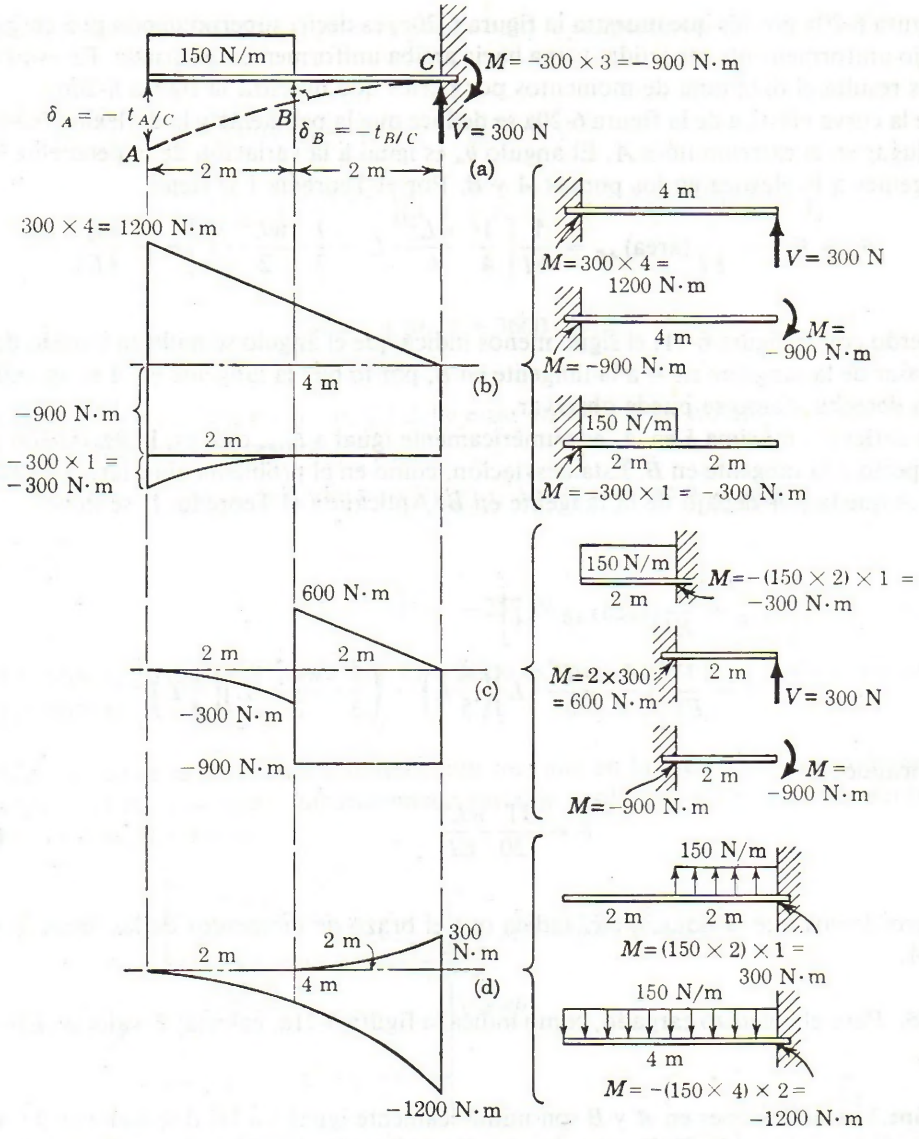


Figura 6-21. Distintas formas de un mismo diagrama de momentos por partes.

formas de determinar el diagrama de momentos por partes para luego emplear la más sencilla.

1.° El diagrama de momentos de la figura 6-21b se ha expresado en función de las fuerzas a la derecha, de acuerdo con $M = (\Sigma M)_{der}$. Las vigas en voladizo equivalentes son las indicadas.

2.° Otra forma de expresar los momentos entre A y B en función de las fuerzas a la izquierda, y los momentos entre B y C en función de las fuerzas a la derecha. La figura 6-21c representa el diagrama de momentos por partes y las vigas en voladizo equivalentes.

3.° Otro procedimiento consiste en sustituir las cargas dadas por las indicadas en la figura 6-21d. Este método da el diagrama de momentos más sencillo.

Aunque se obtendría el mismo resultado utilizando uno cualquiera de los tres diagramas, vamos a aplicar la ecuación (*a*) a este último, figura 6-21d. Recordando que $\bar{x}_A$ indica que se toman momentos respecto de A se tiene

$$-\delta_A = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{2 \times 300}{3}\right)\left(2 + \frac{3}{4} \times 2\right) - \left(\frac{4 \times 1200}{3}\right)\left(\frac{3}{4} \times 4\right)\right]$$

que se reduce a

$$EI\delta_A = 4100 \text{ N·m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

Puesto que la flecha en B viene expresada en función del $(\text{área})_{BC}$ se puede emplear cualquiera de los diagramas (b) o (c) de la figura 6-21, ya que son iguales y además más sencillos que el caso (d) para este tramo BC. Tomando momentos respecto de B, como indica $\bar{x}_B$, de la ecuación (*b*) se obtiene

$$-\delta_B = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{2 \times 600}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 2\right) - (2 \times 900)\left(\frac{1}{2} \times 2\right)\right]$$

de donde se deduce

$$-EI\delta_B = 400 - 1800 \quad \text{o bien,} \quad EI\delta_B = 1400 \text{ N·m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

Aunque no se indica en la figura 6-21, todavía hay un cuarto procedimiento para trazar el diagrama de momentos por partes, aplicando un concepto expuesto en la sección 4-3. Una viga puede cortarse por cualquier sección y sustituir el efecto de las cargas a un lado de ella por la fuerza cortante y el momento flexionante en dicha sección. En B, la carga da lugar a $V = -300$ N y un momento flexionante M de -300 N · m, que darían de B a C un diagrama triangular y otro rectangular. El lector puede trazar también estos diagramas y utilizarlos para calcular δ_B, confrontando luego este resultado con el valor obtenido anteriormente.

PROBLEMAS

636. La viga en voladizo de la figura P-636 tiene una sección de 50 mm de ancho y h mm de altura. Determinar h de manera que la deflexión máxima sea de 10 mm y teniendo $E = 10 \times 10^9 \text{N/m}^2$.

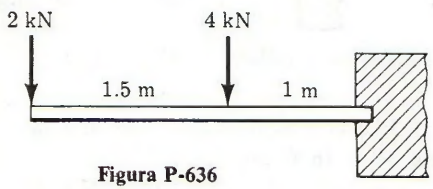


Figura P-636

Resp. $h = 328$ mm

637. Sobre la viga de la figura P-637 actúa una carga repartida hacia abajo. Calcular la deflexión, a 2 m de la pared, si $E = 10 \times 10^9$ N/m² e $I = 20 \times 10^6$ mm⁴.

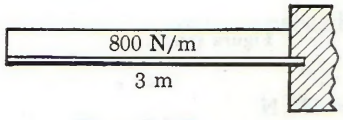


Figura P-637.

Resp. $\delta = 22.7$ mm

638. Calcular el valor de $EI\delta$ en el extremo izquierdo de la viga mostrada en la figura P-638. ¿Qué sentido tiene la deflexión?

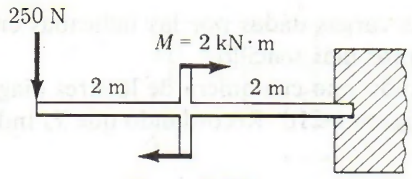


Figura P-638.

Resp. $EI\delta = 6.67$ kN · m^3; hacia arriba

639. En la viga en ménsula de la figura P-639 determinar la deflexión en el extremo libre, dado que $E = 10 \times 10^9$ N/m^2 e $I = 60 \times 10^6$ mm^4.

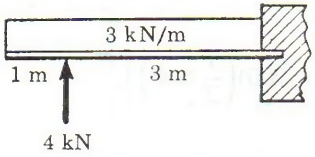


Figura P-639 y P-640.

640. En la viga de la figura P-640 calcular la deflexión en el punto de aplicación de la carga concentrada. ¿Qué sentido tiene?

Resp. $\delta = 46.9$ mm; hacia abajo

641. Dada la viga en voladizo, de la figura P-641, ¿qué valor de P producirá una deflexión nula en A?

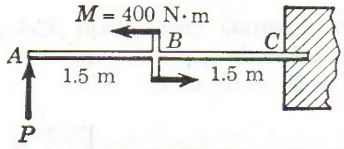


Figura P-641.

Resp. $P = 150$ N

642. Determinar la deflexión máxima en la viga de la figura P-642 cargada como se indica si la sección es rectangular, de 50 mm de ancho por 150 mm de altura y $E = 69$ GN/m^2.

Resp. $\delta = 28$ mm

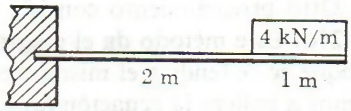


Figura P-642.

643. Hallar el máximo valor de $EI\delta$ en la viga en voladizo de la figura P-643.

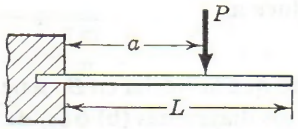


Figura P-643.

Resp. $EI\delta = (Pa^2/6)(3L - a)$

644. Determinar la máxima deflexión para la viga de la figura P-644.

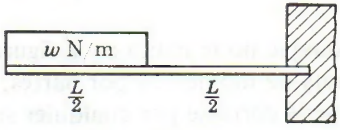


Figura P-644.

645. Calcular la deflexión y la pendiente en un punto a 2 m del empotramiento en la viga cargada como indica la figura P-645. $E = 10$ GN/m^2 e $I = 30 \times 10^6$ mm^4.

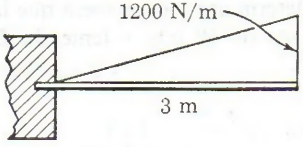


Figura P-645.

Resp. $\delta = 16.4$ mm; $\theta = 0.739°$

646. En la viga de la figura P-646, determinar el valor de I, que limite la deflexión máxima a 20 mm; $E = 10 \times 10^9$ N/m^2.

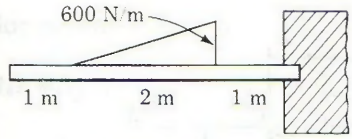


Figura P-646.

647. Determinar el máximo valor de $EI\delta$ en la viga de la figura P-647.

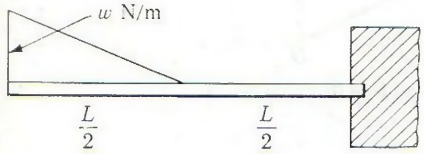


Figura P-647.

Resp. $EI\delta = (121/1920)wL^4$

648. La viga en voladizo de la figura P-648 soporta una carga uniformemente variable de cero en el extremo libre a w N/m en el empotramiento. Determinar la pendiente y la ordenada en una sección cualquiera a una distancia x del empotramiento.

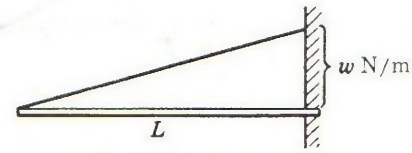


Figura P-648.

Resp. $EI\delta = (wx^2/120L)(10L^3 - 10L^2x + 5LX^2 - x^3)$

6-6. DEFORMACIÓN DE VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS

El cálculo de las deformaciones en las vigas en voladizo se simplifica notablemente debido a que la tangente a la elástica en el empotramiento es horizontal. En las vigas simplemente apoyadas, en general, no se sabe en qué punto la tangente es horizontal y, por tanto, se ha de emplear un método de cálculo diferente. Este método, que a primera vista puede parecer un tanto complicado, es rápido y sencillo. Se representa gráficamente en la figura 6-22, donde se ha trazado la elástica de una viga simplemente apoyada, pero no las cargas ni la ley de momentos.

El problema consiste en la determinación del valor de la deflexión δ en cualquier punto B. Trazando por A la tangente a la elástica, la desviación $t_{B/A}$ del punto B con respecto a esta tangente *no* es evidentemente el valor pedido de δ. Sin embargo, la suma de δ y $t_{B/A}$ es igual a EF, por lo que determinando EF y $t_{B/A}$ se ha resuelto el problema. El valor de EF se calcula estableciendo la semejanza de los triángulos AEF y ACD y, en este último, CD es la desviación $t_{C/A}$ de C con respecto a la tangente en A.

De acuerdo con todo esto e invirtiendo el orden de las operaciones, el procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Calcular $t_{C/A}$ mediante la relación $t_{C/A} = (1/EI)\ (\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_C$.

2. Por la semejanza de triángulos, $EF = x/L \cdot t_{C/A}$.

3. Calcular $t_{B/A}$ por la relación $t_{B/A} = (1/EI)\ (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_B$.

4. Puesto que EF es la suma de δ y $t_{B/A}$, el valor de δ es $EF - t_{B/A}$.

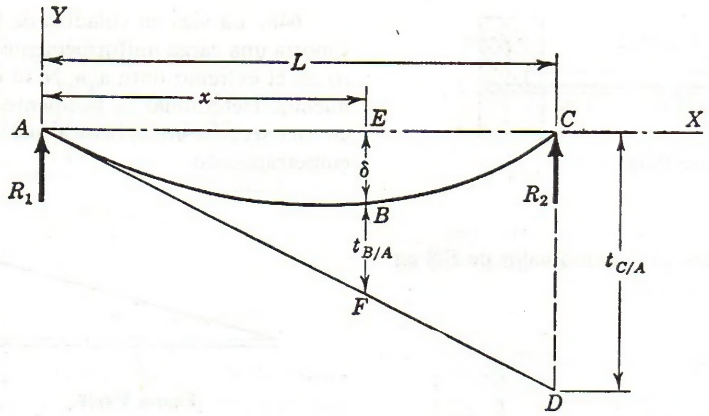


Figura 6-22. Relaciones geométricas en el método del área de momentos aplicado a vigas simplemente apoyadas.

Como se ha dicho, el método puede parecer largo, pero es muy rápido de establecer. Algunos ejemplos aclararán la forma práctica de aplicación del mismo. Consideraremos cargas sencillas para fijar la atención en las ideas fundamentales y no en los cálculos. En el caso de cargas más complicadas, el procedimiento es el mismo, y el diagrama de momentos se hace por partes, de acuerdo con lo indicado en la sección 6-4.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

649. La viga de la figura 6-23 soporta una carga concentrada de 300 N a 2 m del apoyo izquierdo. Calcular el valor de $EI\delta$ en B, a 1 m de este apoyo.

Solución: Se empieza por dibujar la forma aproximada de la elástica, curva punteada, y el diagrama de momentos por partes, de izquierda a derecha. Con el procedimiento indicado se calcula $t_{C/A}$:

$$\left[t_{C/A} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{CA} \cdot \bar{x}_C\right]$$

$$t_{C/A} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{3 \times 300}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 3\right) - \left(\frac{1 \times 300}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 1\right)\right] = \frac{400}{EI} \qquad (a)$$

Por semejanza de los triángulos ABD y ACE:

$$BD = \frac{1}{3} \times t_{C/A} = \frac{400}{3EI} \qquad (b)$$

El valor de $t_{B/A}$ es:

$$\left[t_{B/A} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B\right] \qquad t_{B/A} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1 \times 100}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 1\right)\right] = \frac{100}{6EI} \qquad (c)$$

y el valor pedido de δ es:

$$[\delta = BD = t_{B/A}] \qquad \delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{400}{3} - \frac{100}{6}\right]$$

$$EI\delta = 116.7\ \text{N}\cdot\text{m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

650. Calcular la pendiente de la elástica, en el apoyo izquierdo, en la viga del problema anterior, figura 6-23.

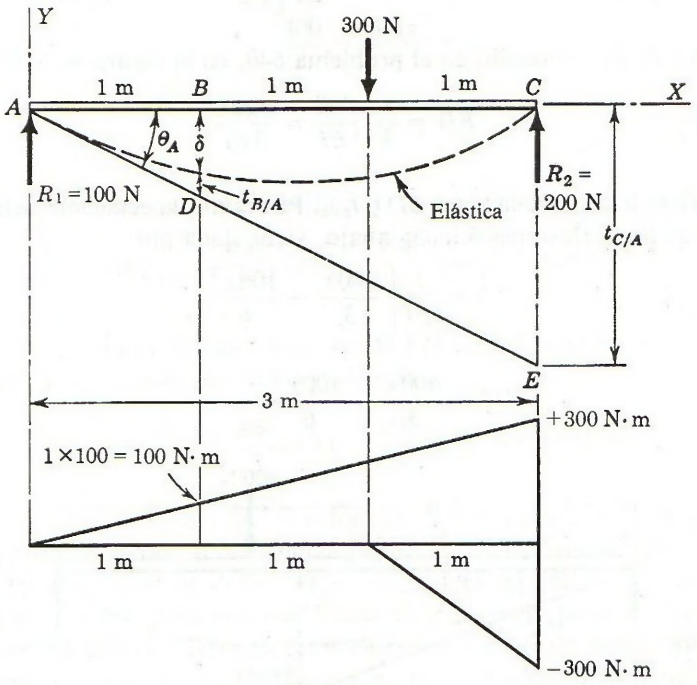


Figura 6-23.

Solución: La pendiente de la elástica en A viene dada por $\tan\theta_A$, siendo θ_A el ángulo entre la horizontal y la tangente en A a la elástica. Como las deflexiones y los ángulos de la elástica son muy pequeños comparados con la longitud de la viga, $\tan\theta_A$ es prácticamente igual a θ_A expresado en radianes. Ahora bien, en la figura 6-23 se tiene:

$$\theta_A \approx \tan\theta_A = \frac{CE}{AC} = \frac{t_{C/A}}{AC}$$

Sustituyendo el valor de $t_{C/A} = 400/EI$, obtenido en el problema anterior,

$$\theta_A = \frac{400/EI}{3} = \frac{400}{3EI} \qquad \textbf{Resp.}$$

651. En la viga del problema 649, determinar la posición y el valor de la deflexión máxima.

Solución: La solución se puede obtener por dos métodos. Ambos deben dominarse perfectamente, ya que conviene aplicar uno u otro según los casos.

Método I. Se comienza calculando la deflexión en un punto cualquiera a distancia x del apoyo izquierdo. Mediante el mismo proceso del problema 649, figura 6-24, se tiene:

$$\left[t_{B/A} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B\right] \qquad t_{B/A} = \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot 100\,x\right)\left(\frac{x}{3}\right)\right] = \frac{100\,x^3}{6\,EI}$$

Con el valor de $t_{C/A}$ obtenido en el problema 649, en la figura 6-24 se tiene:

$$\left[BD = \frac{x}{3} \cdot t_{C/A}\right] \qquad BD = \frac{x}{3} \cdot \frac{400}{EI} = \frac{400x}{3EI}$$

El valor de δ es la diferencia entre BD y $t_{B/A}$. Por tanto, la ecuación de la elástica, considerando positivas las deflexiones δ hacia abajo, viene dada por:

$$\left[\delta = BD - t_{B/A}\right] \qquad \delta = \frac{1}{EI}\left[\frac{400x}{3} - \frac{100x^3}{6}\right]$$

o bien

$$EI\delta = \frac{400x}{3} - \frac{100x^3}{6} \qquad (a)$$

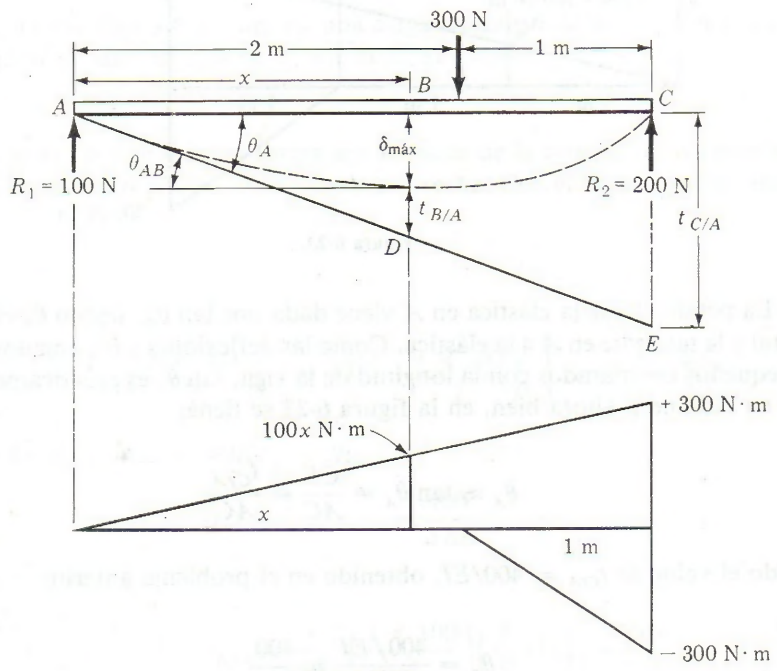


Figura 6-24.

Esta expresión es válida para cualquier punto entre el apoyo izquierdo y la carga, es decir, entre $x = 0$ y $x = 2$ m. La expresión de la pendiente para este tramo de la viga se obtiene derivando la ecuación (*a*)

$$EI\frac{d\delta}{dx} = \frac{400}{3} - \frac{300x^2}{6} \qquad (b)$$

De acuerdo con la teoría de máximos y mínimos, igualando a cero la primera derivada de la expresión (*a*) se obtiene el punto de máxima deflexión. Esto equivale a anular la expresión (*b*), lo cual determina el punto de pendiente nula de la viga. En estas condiciones,

$$\frac{400}{3} - \frac{300x^2}{6} = 0$$

o bien,

$$x = 1.63 \text{ m} \qquad \textbf{Resp.}$$

Sustituyendo este valor de x en la expresión (*a*), resulta el valor de la deflexión máxima:

$$(EI\delta)_{\text{máx}} = \frac{400}{3}(1.63) - \frac{100}{6}(1.63)^3 = 145 \text{ N}\cdot\text{m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

Es interesante comparar el valor máximo de $EI\delta$ con su valor en el centro del viga. Poniendo $x = 1.50$ m en la ecuación (*a*), este último es

$$(EI\delta)_{\text{centro}} = \frac{400}{3}(1.5) - \frac{100}{6}(1.5)^3 = 144 \text{ N}\cdot\text{m}^3$$

que es alrededor de un 1% menor que el valor máximo. Esta diferencia es tan pequeña comparada con los posibles errores o variaciones en los datos que, en cualquier aplicación práctica, se puede suponer que la deflexión en el centro equivale a la deflexión máxima verdadera*. Se demuestra, para una viga sometida a la acción de una carga concentrada en un punto cualquiera, que la diferencia máxima entre la deflexión en el centro y la deflexión máxima es solamente de un 2.6%. En la sección siguiente se estudia un método simplificado para calcular la deflexión en el centro de la luz.

Método II. En el punto de deflexión máxima, la tangente a la elástica es horizontal. Como se observa en la figura 6-24, la variación de la pendiente entre las tangentes en los puntos B y A, es decir, θ_{AB}, es igual a la pendiente θ_A en A. (Puesto que prácticamente $\theta_A = \theta_A$.)

Del Teorema I del área de momentos,

$$\left[\theta_{AB} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB}\right] \qquad \theta_{AB} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot x \cdot 100x\right) = \frac{50x^2}{EI}$$

*N. de T. Aclaremos que esta equivalencia es efectiva en las vigas simplemente apoyadas sometidas a cualquier tipo de cargas (fuerzas negativas o hacia abajo). Cuando las fuerzas aplicadas son unas positivas y otras negativas, o son pares, o se trata de una viga con voladizos, la deflexión en el centro no guarda relación alguna con la deflexión máxima. Por ejemplo, en una viga simplemente apoyada con un par en el centro, la deflexión en el centro es nula, y, sin embargo, existen dos deflexiones máximas, una positiva y otra negativa, simétricamente colocadas respecto del centro.

Igualando con $\theta_A = 400/3EI$ del problema 650,

$$\frac{50x^2}{EI} = \frac{400}{3EI}$$

de donde

$$x = 1.63 \text{ m} \qquad \textbf{Resp.}$$

El cálculo de $EI\delta$ en este punto se hace como en el Método I. Resulta $EI\delta = 145 \text{ N} \cdot \text{m}^3$.

652. Determinar el valor de la deflexión en D en la viga de la figura 6-25a.

Solución: En este problema resalta la importancia de la correcta interpretación del signo positivo o negativo de las desviaciones, en particular cuando afecta a relaciones geométricas en la curva elástica. Aunque el problema se puede resolver trazando las tangentes de referencia en A o en C, resultan valores menores en las operaciones intermedias y, por tanto, mayor garantía de no haber cometido errores si se traza la tangente de referencia en C. Antes de hacerlo, calculemos la desviación de A con respecto a esta tangente. El signo de dicha des-

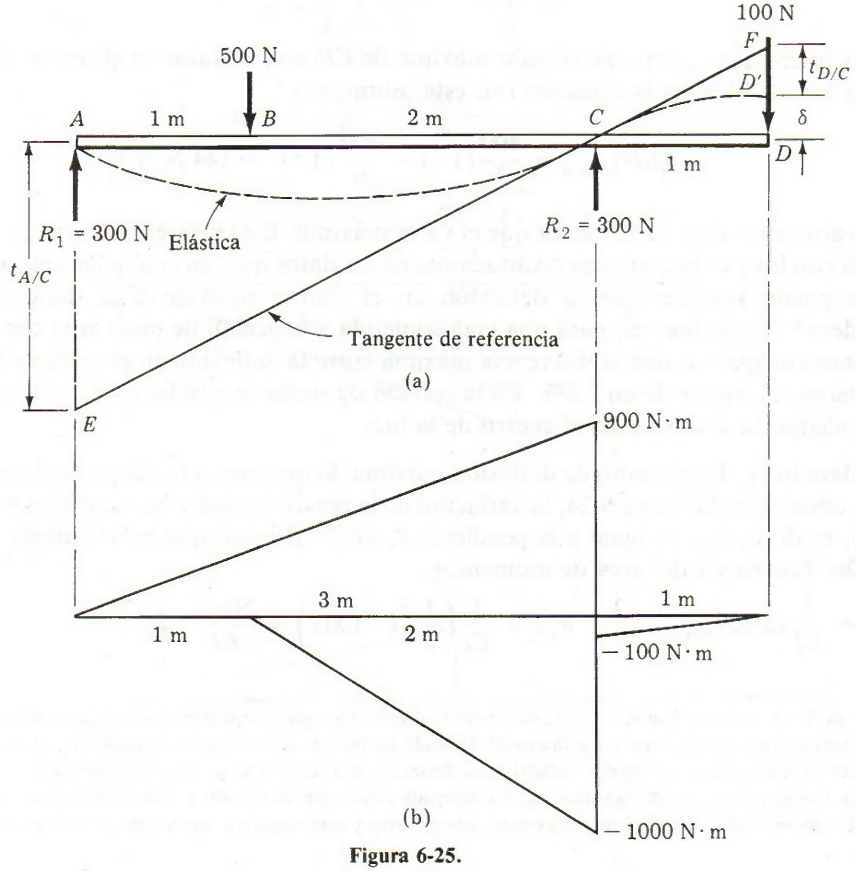


Figura 6-25.

viación indica si A está por debajo o por encima de la tangente y de aquí la dirección en que se inclina la tangente en C. Por consiguiente:

$$t_{A/C} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AC} \cdot \bar{x}_A$$
$$= \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 900\right)\left(\frac{2}{3} \times 3\right) - \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1000\right)\left(1 + \frac{2}{3} \times 2\right)\right] = \frac{367}{EI}$$

El valor positivo de $t_{A/C}$ indica que el punto A de la elástica está por encima de la tangente de referencia en C, con lo que dicha tangente tiene pendiente hacia abajo a la izquierda, como se ha representado en la figura 6-25a.

Por la semejanza de los triángulos ACE y CDF se tiene

$$\frac{DF}{1} = \frac{t_{A/C}}{3}, \text{ o bien, } DF = \frac{t_{A/C}}{3} = \frac{367}{3EI}$$

La desviación de D respecto de la tangente en C es

$$\left[t_{D/C} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{DC} \cdot \bar{x}_D\right] \qquad t_{D/C} = \frac{1}{EI}\left[-\left(\frac{1 \times 100}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \times 1\right)\right] = -\frac{100}{3EI}$$

El signo menos de $t_{D/C}$ indica que el punto D' de la elástica está por debajo de la tangente de referencia. Por tanto, como DF es numéricamente mayor que el valor absoluto de esta desviación, la deflexión en D es hacia arriba. Por eso se ha dibujado la elástica, punteada, entre C y D como en la figura. Para la deflexión δ se deduce

$$\delta = DF - |t_{D/C}| = \frac{367}{3EI} - \frac{100}{3EI} = \frac{89}{EI} \qquad \textbf{Resp.}$$

Si la tangente de referencia se hubiera trazado en A, y se hubiera supuesto que la elástica tenía la forma de la figura 6-26, se habrían obtenido los resultados siguientes:

$$t_{C/A} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{CA} \cdot \bar{x}_C$$
$$= \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{3 \times 900}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 3\right) - \left(\frac{2 \times 1000}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 2\right)\right] = \frac{683}{EI}$$
$$t_{D/A} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{DA} \cdot \bar{x}_D$$
$$= \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{3 \times 900}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3} \times 3\right) - \left(\frac{2 \times 1000}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3} \times 2\right) - \left(\frac{1 \times 100}{2}\right)\left(\frac{2}{3} \times 1\right)\right]$$
$$= \frac{1000}{EI}$$

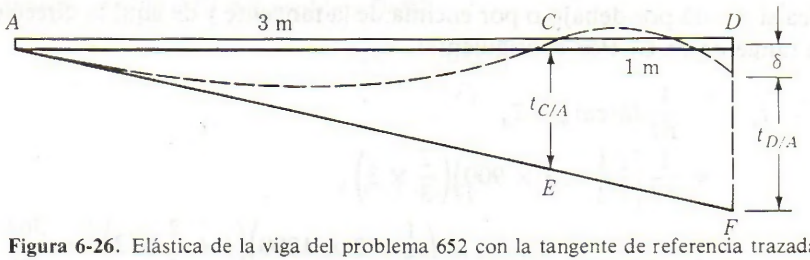


Figura 6-26. Elástica de la viga del problema 652 con la tangente de referencia trazada en A.

Por semejanza de los triángulos ACE y ADF,

$$\frac{DF}{4} = \frac{t_{C/A}}{3} \quad \text{o} \quad DF = \frac{4}{3} t_{C/A} = \frac{4}{3}\left(\frac{683}{EI}\right) = \frac{911}{EI}$$

Por último, según el esquema de la elástica de la figura 6-26, se obtiene para la deflexión el valor

$$\delta = DF - t_{D/A} = \frac{1}{EI}(911 - 1000) = -\frac{89}{EI}$$

que, salvo el signo, coincide con el obtenido anteriormente. El signo menos indica que la deflexión δ tiene sentido contrario al representado, es decir, es hacia arriba. En efecto, $t_{D/A}$ es numéricamente mayor que DF.

La ventaja fundamental de trazar la tangente de referencia en C es que aumenta la garantía de los cálculos, ya que se manejan números más pequeños.

PROBLEMAS

653. Calcular el valor de la deflexión en el punto medio del claro en la viga representada en la figura P-653. *Indicación*: Trazar el diagrama de momentos por partes, empezando por el centro del claro hacia los extremos. Por simetría, la tangente en el centro es horizontal.

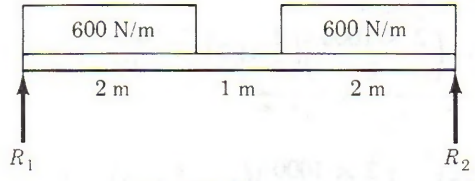


Figura P-653.

Resp. $EI\delta = 3350\ \text{N} \cdot \text{m}^3$

654. Determinar el valor de $EI\delta$ a 1 m de R_2 en la viga de la figura P-654. *Indicación*: Trazar la tangente de referencia en el apoyo derecho.

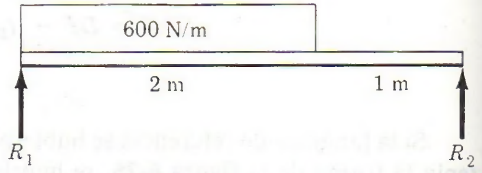


Figura P-654.

655. Obtener el valor de $EI\delta$ bajo la carga concentrada de la viga de la figura P-655.

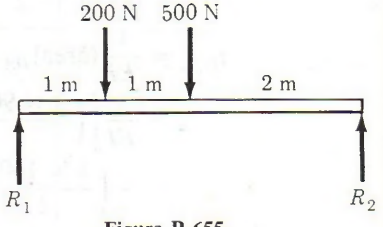


Figura P-655.

Resp. $608\ \text{N} \cdot \text{m}^3$; $850\ \text{N} \cdot \text{m}^3$

656. Calcular el valor de $EI\delta$ bajo la carga concentrada de 100 N · m en la viga representada en la figura P-656.

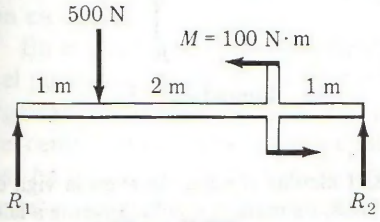


Figura P-656.

Resp. $EI\delta = 342\ \text{N} \cdot \text{m}^3$

657. Calcular la deflexión en el centro de la viga que representa la figura P-657.

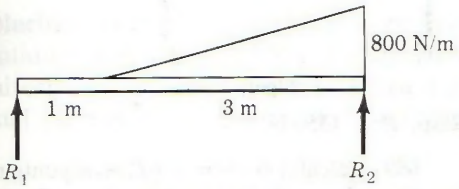


Figura P-657.

658. En la viga que representa la figura P-658, determinar el valor de $EI\delta$ en el punto de aplicación del par M.

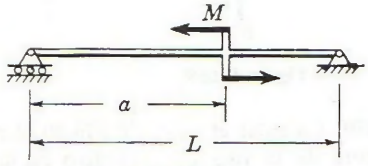


Figura P-658.

Resp. $EI\delta = (Ma/3L)(L^2 - 3La + 2a^2)$

659. Una viga simplemente apoyada soporta una carga concentrada aplicada en un punto cualquiera de su claro, como se indica en la figura P-659. Demostrar que la deflexión máxima tiene lugar a una distancia de A igual a

$$x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

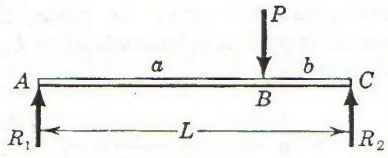


Figura P-659.

660. Una viga simplemente apoyada se somete a la acción de un par M en su extremo derecho, como indica la figura P-660. Demostrar que la deflexión máxima tiene lugar a una distancia $x = 0.577L$ del apoyo izquierdo.

Figura P-660.

661. Calcular la deflexión en el centro del claro de la viga simétricamente cargada representada en la figura P-661. Cotejar el resultado, haciendo $a = L/2$, con el caso 6 de la Tabla 6-2. Compararlo también con la deflexión en el centro para el caso 7 de la Tabla 6-2.

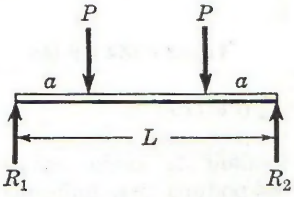


Figura P-661.

662. Determinar la deflexión máxima en la viga representada en la figura P-662. Comparar el resultado obtenido, poniendo $a = L/2$, con el caso 8 de la Tabla 6-2. Utilizar el resultado para comprobar el obtenido en el problema 653.

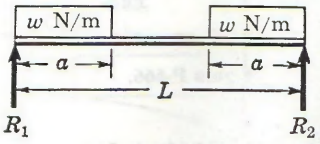


Figura P-662.

663. Calcular la deflexión máxima en la viga de la figura P-663 que soporta una carga uniformemente

memente repartida sobre la parte central. Confrontar el resultado, haciendo $2b = L$, con el caso 8 de la Tabla 6-2.

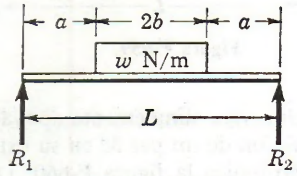


Figura P-663.

Resp. $EI\delta = (wb/24)(L^3 - 2Lb^2 + b^3)$

664. La mitad central de la viga de la figura P-664 tiene un momento de inercia doble que el del resto. Determinar la deflexión en el centro. *Indicación*: Transformar el diagrama de M en diagrama de M/EI.

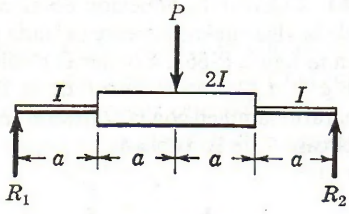


Figura P-664 y P-665.

Resp. $\delta = \frac{3}{4}(Pa^3/EI)$

665. Sustituir la carga concentrada del problema 664 por una carga uniforme de w N/m aplicada sobre la mitad central de la viga. Hallar la deflexión máxima.

666. Calcular $EI\delta$ en el extremo derecho de la viga con voladizo de la figura P-666.

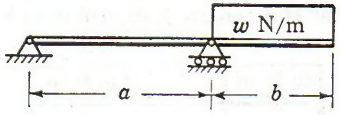


Figura P-666.

Resp. $EI\delta = (wb^3/24)(4a + 3b)$

667. Calcular $EI\delta$ en el extremo derecho de la viga con voladizo de la figura P-667. ¿Qué sentido tiene la deflexión?

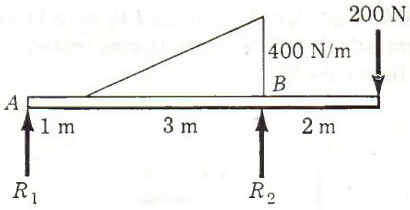


Figura P-667.

668. Calcular el valor de P en la viga de la figura P-668, de manera que la tangente a la elástica en el apoyo derecho sea horizontal.

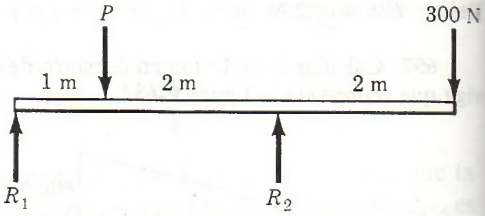


Figura P-668.

Resp. $P = 1350$ N

669. Calcular el valor de $EI\delta$ en el punto medio entre apoyos de la viga de la figura P-669.

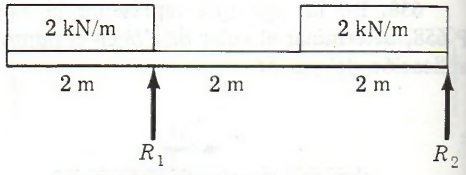


Figura P-669.

670. Calcular el valor de $EI\delta$ en el extremo izquierdo de la viga con voladizo de la figura P-670.

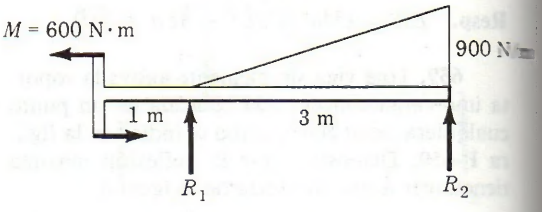


Figura P-670.

Resp. $EI\delta = 428$ N · m^3 descendente

6-7. DEFLEXIONES EN EL CENTRO DEL CLARO

En una viga simplemente apoyada y simétricamente cargada, la tangente a la elástica en el punto medio del claro es horizontal y paralela a la posición de la viga descargada. En tales casos, la desviación de cada extremo apoyado con respecto a esta tangente es igual a la deflexión en el centro.

En el caso de vigas simplemente apoyadas, pero con cargas no simétricas, la deflexión en el punto medio puede calcularse tan fácilmente como en las anteriores. Basta añadir una carga simétricamente colocada con respecto al centro, por cada carga real. La deflexión real en el centro será la mitad de la calculada par la viga transformada. Obsérvese también, como ya se ha dicho, que la diferencia entre la deflexión máxima y la deflexión en el centro es tan pequeña generalmente que ambos valores pueden considerarse prácticamente equivalentes.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

671. Una viga simplemente apoyada de longitud L soporta una carga que varía uniformemente desde cero en el extremo izquierdo hasta w N/m en el apoyo derecho, como indica la figura 6-27a. Calcular la deflexión en el centro del claro.

Solución: Transformemos la carga en simétrica añadiendo otra que varíe uniformemente en sentido inverso, desde cero en el apoyo derecho a w en el izquierdo. El resultado es una carga uniforme en toda la longitud de la viga. La desviación de C con respecto a la tangente en B es igual a 2δ, es decir, el doble de la deflexión real en el centro de la viga de la figura 6-27a.

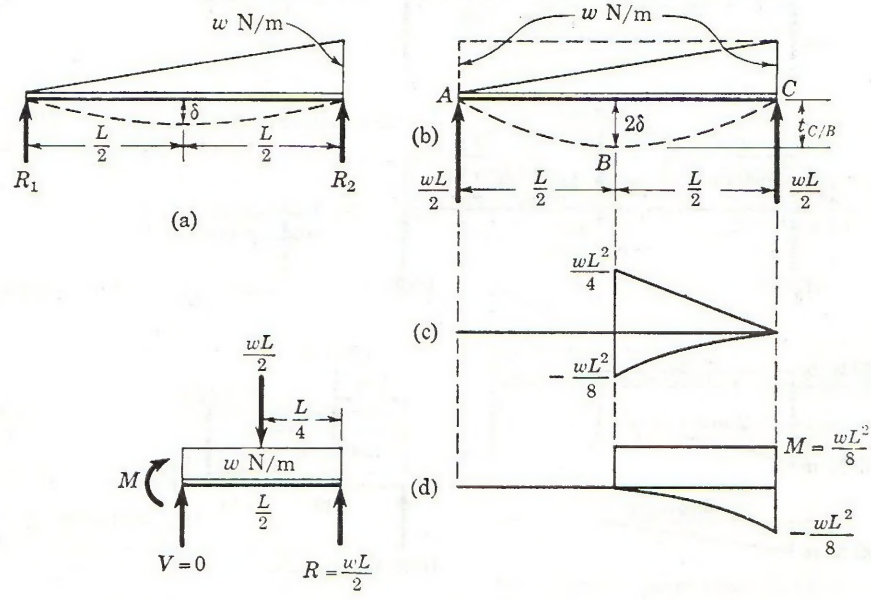


Figura 6-27. Transformación en viga simétricamente cargada.

Puesto que se trata de calcular la desviación de C con respecto a la tangente en B, sólo se necesita el diagrama de momentos de la mitad de la viga. Dicho diagrama se traza por partes, desde C a B, como indica la figura 6-27c, o desde B a C como en la figura 6-27d. Para facilitar la comprensión de esta última figura, a su izquierda se ha dibujado el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la mitad derecha de la viga. Obsérvese que el valor del momento M en el centro se ha determinado teniendo en cuenta que su efecto en el apoyo derecho ha de ser igual y opuesto al de la carga, de manera que resulte momento nulo en dicho apoyo.

Apliquemos, pues, el teorema del área de momentos al diagrama de la figura (d), dejando al lector la comprobación de que, aplicándolo a la figura (c), se obtiene el mismo resultado:

$$\left[EIt_{C/B} = (\text{área})_{CB} \cdot \bar{x}_C\right]$$

$$2EI\delta = \left(\frac{wL^2}{8} \cdot \frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{wL^2}{8} \cdot \frac{L}{2}\right)\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} wL^4$$

de donde resulta:

$$EI\delta = \frac{5}{768} wL^4 \qquad \textbf{Resp.}$$

672. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro del claro de la viga sometida a las cargas indicadas en la figura 6-28a.

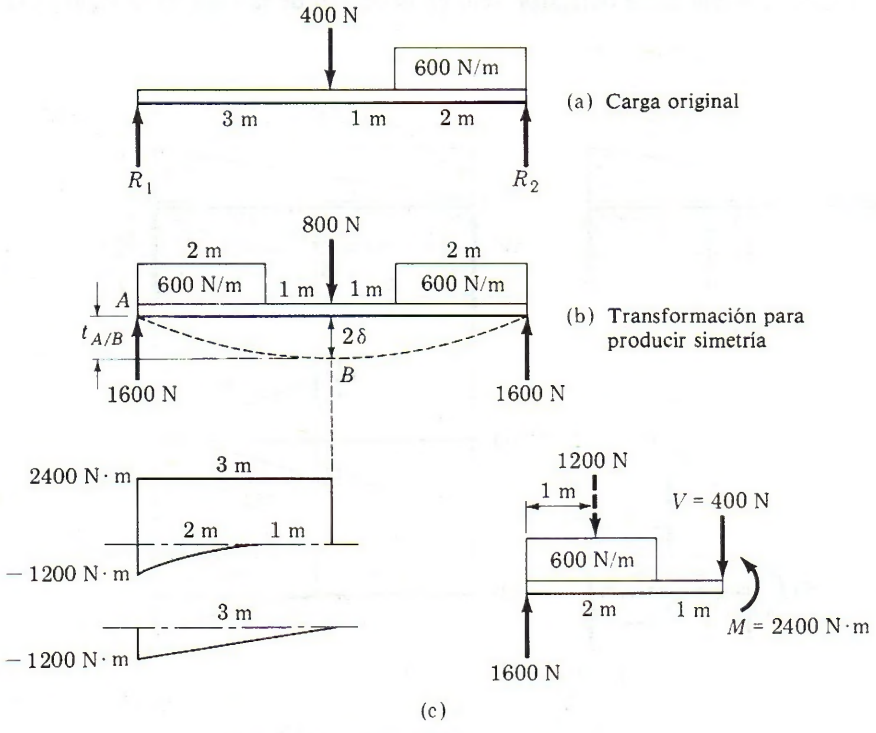


Figura 6-28. Deflexión en el centro del claro.

Solución: La transformación en carga simétrica se indica en la figura 6-28b. Puesto que sólo se va utilizar el diagrama de momento (M) de la mitad de la viga, se ha trazado para la mitad izquierda en la figura 6-28c, junto con el correspondiente diagrama de cuerpo libre. El valor del momento en el centro se ha obtenido como en el problema anterior. Obsérvese también que la reacción en la viga transformada es la mitad de la carga simétrica es decir, que equivale a la suma de las cargas reales iniciales.

La desviación $t_{A/B}$ de A respecto de la tangente horizontal en B es igual al doble de la deflexión pedida de la viga inicial. Se tiene:

$$[EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A]$$

$$2EI\delta = (2400 \times 3)\left(\frac{1}{2} \times 3\right) - \left(\frac{2 \times 1200}{3}\right)\left(\frac{1}{4} \times 2\right) - \left(\frac{3 \times 1200}{2}\right)\left(\frac{1}{3} \times 3\right)$$

de donde

$$EI\delta = 4300 \text{ N} \cdot \text{m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

673. Demostrar que la deflexión en el centro del claro de la viga de la figura P-673 es $\delta = (Pb/48EI)(3L^2 - 4b^2)$.

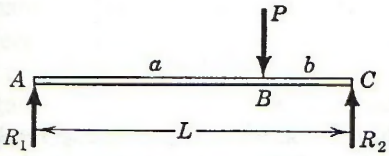


Figura P-673.

674. Determinar la deflexión en el centro del claro de la viga de la figura P-674.

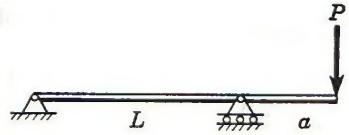


Figura P-674.

675. Repetir el problema anterior en el caso de la figura P-675.

Resp. $\delta = wa^2L^2/32EI$

Figura P-675.

676. Calcular la deflexión en el centro del claro en el caso de una viga con un par aplicado como se indica en la figura P-676.

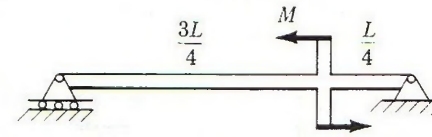


Figura P-676.

677. Determinar la deflexión en el centro del claro en la viga cargada como indica la figura P-677.

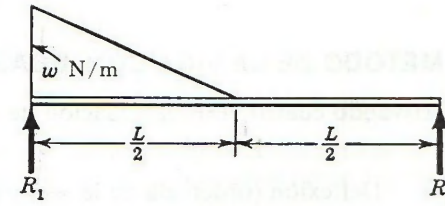


Figura P-677.

678. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga de la figura P-678.

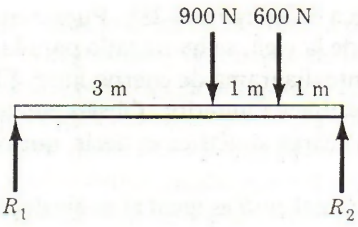


Figura P-678.

Resp. $EI\delta = 3\,100\ \text{N} \cdot \text{m}^3$

679. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga de la figura P-679.

Resp. $EI\delta = 2940\ \text{N} \cdot \text{m}^3$

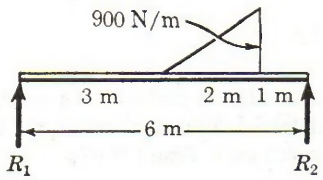


Figura P-679.

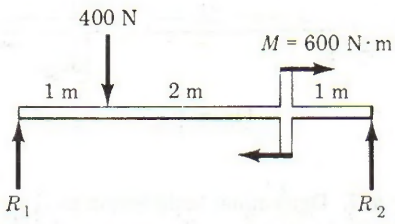
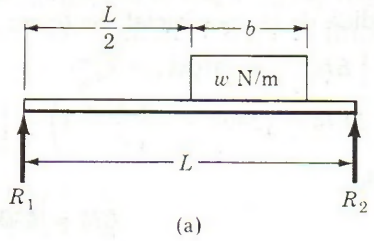


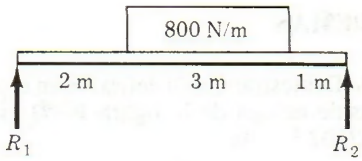
Figura P-680.

680. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga cargada como indica la figura P-680.

681. Demostrar que el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga de la figura P-681, parte (a), es



(a)



(b)

Figura P-681.

$(wb/48)(L^3 - 2Lb^2 + b^3)$. Aplicar el resultado obtenido para hallar el valor del claro en el centro de la viga de la figura (b), descomponiendo la carga dada en dos partes, a partir del centro de la viga, a uno y otro lado, y sumando los resultados.

Resp. $EI\delta = 9280\ \text{N} \cdot \text{m}^3$

6-8. MÉTODO DE LA VIGA CONJUGADA

Derivando cuatro veces la ecuación de la elástica se obtienen las siguientes relaciones:

EIy : Deflexión (ordenada de la elástica)

$EI\dfrac{dy}{dx}$: Pendiente (θ)

$EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = \text{Momento} = M$

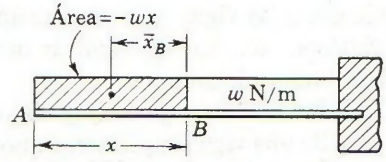


Figura 6-29.

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = \text{Fuerza cortante} = V = \frac{dM}{dx}$$

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \text{Carga} = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$

Resulta evidente que las relaciones entre deflexión, pendiente y momento son las mismas que las que existen entre momento, fuerza cortante y carga. Esto sugiere que puede aplicarse el método del área de momentos para determinar el momento flexionante, partiendo del diagrama de cargas, de la misma manera que se ha empleado determinar para las deflexiones a partir del diagrama de momentos. Por ejemplo, en el diagrama de cargas de la figura 6-29, es $(-wx)(\frac{1}{2}x) = -\frac{wx^2}{2}$. Por tanto, se podría aplicar el método del área de momentos, que ahora sería de área de cargas, para determinar el momento flexionante, aunque no es práctico.

Sin embargo, la analogía de las relaciones entre carga-fuerza cortante-momento flexionante, y entre momento-pendiente-deflexión, sugiere que estas últimas se pueden establecer mediante los métodos desarrollados en el Capítulo 4 para calcular la fuerza cortante y el momento flexionante a partir de las cargas. Para ello, hay que suponer que la viga está cargada, no con las cargas reales, sino con el diagrama de M/EI correspondiente a dichas cargas. Considerando entonces este diagrama de M/EI como una carga ficticia, se calcula la fuerza cortante y el momento flexionante ficticios, en un punto cualquiera, que se corresponden con la pendiente y las ordenadas de la elástica en los mismos puntos de la viga inicial. El procedimiento se llama *método de la viga conjugada*. También se denomina a veces método de las cargas elásticas.

Aplicando, pues, a una viga* cargada con el diagrama de M/EI los principios estudiados para la determinación de la fuerza cortante y momento flexionante se tiene:

1. Pendiente real = fuerza cortante ficticia (6-6)

2. Deflexión real = momento flexionante ficticio (6-7)

---

* **N. de T.** Analíticamente, la doble integración momento-pendiente-deflexión de la viga principal introduce dos constantes y la doble integración carga ficticia (M/EI)-fuerza cortante ficticia-momento ficticio de la viga conjugada, introduce otras dos constantes de integración.

Para que los resultados sean equivalentes, las condiciones aplicadas para la determinación de las constantes tienen que ser forzosamente las mismas en las dos integraciones. De aquí que, en general, la viga principal y la conjugada no podrán tener las mismas condiciones de apoyo. En las vigas estáticamente determinadas, en las que la viga conjugada también lo es, las reglas de transformación de apoyos son las siguientes:

1. Un apoyo extremo en la viga principal (deflexión, o sea, segunda integración, nula) ha de transformarse en un apoyo (M ficticio, o sea, segunda integración, nulo) en la viga conjugada.

El método es directamente aplicable a las vigas simplemente apoyadas. En otros casos, tales como ménsulas, vigas con voladizos, etc., hay que aplicar otras condiciones artificiales de sujeción o apoyos y se estudiarán más adelante.

Para valorar la utilidad del método de la viga conjugada, comparémoslo con el método del área de momentos para el caso de una viga simplemente apoyada, ya que solamente en este tipo de vigas se puede aplicar directamente el método de la viga cojugada sin cambiar las condiciones de sujeción. Esto quiere decir que en las vigas simplemente apoyadas en sus extremos, la viga conjugada es otra viga igual.

En la figura 6-30a se tiene una viga apoyada en sus extremos, con una carga uniformemente repartida. El diagrama de momentos para esta carga, wN/m, dibujado por partes en la figura 6-30b, se multiplica por $1/EI$ y se aplica como carga a la viga conjugada, otra viga simplemente apoyada y del mismo claro L, como se indica en la figura 6-30c. Para determinar la reacción R_1 a la viga conjugada, se toman momentos de las cargas ficticias con respecto de B,

$$[\Sigma M_B = 0] \qquad R_1 L = \left(\frac{wL^2}{2EI} \cdot \frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{3}\right) - \left(\frac{wL^2}{2EI} \cdot \frac{L}{3}\right)\left(\frac{L}{4}\right) \qquad (a)$$

El segundo miembro de esta ecuación es, precisamente, $1/EI$ (área)$_{BA} \cdot \bar{x}_B$, es decir, $t_{B/A}$. Naturalmente, al despejar R_1 el resultado es $t_{B/A}/L$, que es la pendiente en A. Esto es geométricamente evidente, como se deduce de la figura 6.30a. Queda, pues, confirmada la regla 1 del método de la viga conjugada, es decir, que la fuerza cortante ficticia es igual a la pendiente de la elástica de la viga original, en el mismo punto.

Para obtener la ordenada de la elástica en un punto cualquiera de la viga original se aplica la definición de momento flexionante a la viga conjugada:

$$\text{Deflexión } y = (\Sigma M)_{\text{izq}} = R_1 x - A_1 \frac{x}{3} + A_2 \frac{x}{4}$$

$$= R_1 x - \left(A_1 \frac{x}{3} - A_2 \frac{x}{4}\right) \qquad (b)$$

2. Un apoyo intermedio en la viga principal (deflexión, o sea, segunda integración, nula; y pendiente, o primera integración, cualquiera, pero igual a ambos lados) ha de transformarse en una articulación de la viga conjugada (M ficticio, o sea, segunda integración, nulo; V ficticia, o sea, primera integración, cualquiera, pero igual a ambos lados).

3. Un extremo empotrado de la viga principal (pendiente y deflexión, o sea, primera y segunda integración, nulas) ha de transformarse en un extremo libre en la viga conjugada (V ficticia y M ficticio, o sea, primera y segunda integración, nulas).

4. Un extremo libre en la viga principal (pendiente y deflexión, o sea, primera y segunda integración, lo que corresponda por las restantes condiciones de sujeción y momentos flexionantes) ha de transformarse en un extremo empotrado en la viga conjugada (V ficticia y M ficticio, o sea, primera y segunda integración, lo que corresponda por las restantes condiciones de sujeción y cargas ficticias).

5. Una articulación en la viga principal (pendiente o primera integración distinta a cada lado, y deflexión, o segunda integración, igual a ambos lados, dependiendo sus valores de las demás condiciones de sujeción y momentos flexionantes) ha de transformarse en un apoyo intermedio de la viga conjugada (V ficticia, o sea, primera integración, distinta a cada lado, y M ficticio, o sea segunda integración, igual a ambos lados, dependiendo sus valores de las restantes condiciones de sujeción y cargas ficticias).

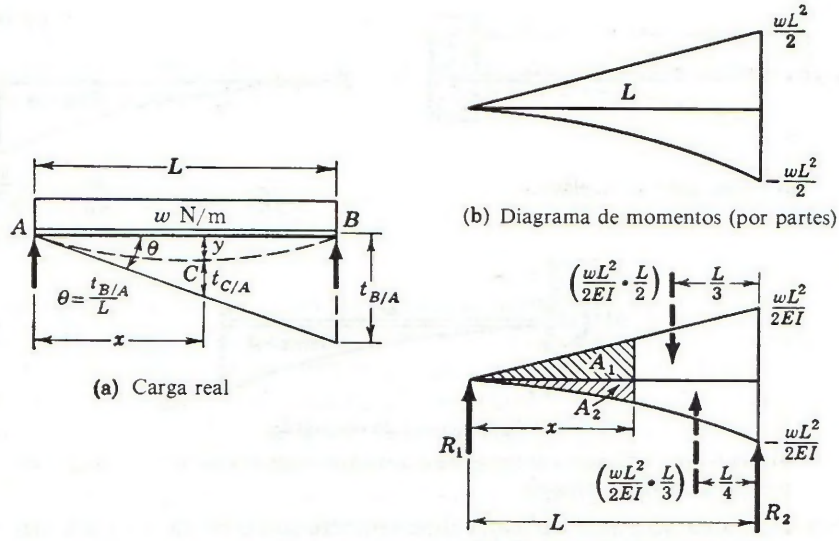


Figura 6-30. Comparación entre los métodos de la viga conjugada y del área de momentos.

Ahora bien, en función del diagrama de momentos de la figura 6-30b, $[A_1 \cdot (x/3) - A_2 \cdot (x/4)]$ es igual precisamente a $(1/EI)$ $(\text{área})_{CA} \cdot x_C$, es decir, $t_{C/A}$ de la elástica de la figura 6-30a. Por lo que la ecuación (b) se puede escribir en la forma

$$y = R_1 x - t_{C/A} \tag{c}$$

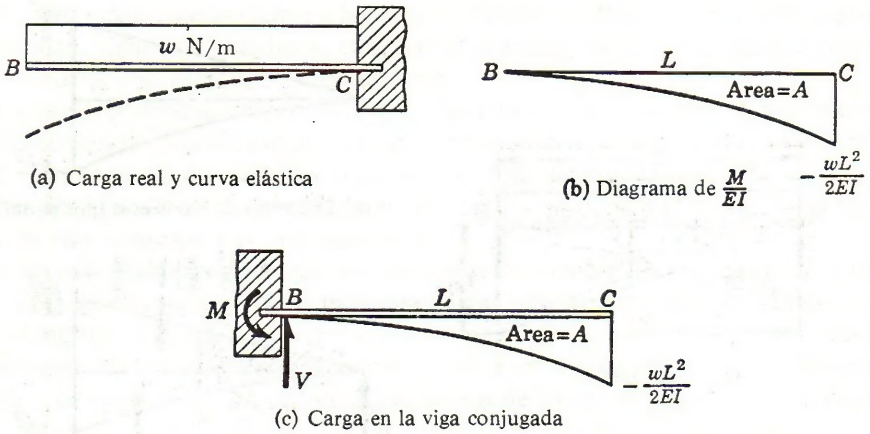
que, como $R_1 x = \theta x = (t_{B/A}/L)x$, equivale a la siguiente relación del método del área de momentos:

$$y = t_{B/A}\left(\frac{x}{L}\right) - t_{C/A} \tag{d}$$

Este es precisamente el resultado que se obtuvo en la sección 6-6 para la deflexión en un punto de una viga simplemente apoyada por el método del área de momentos.

Así, pues, el método de la viga conjugada, utilizando la fuerza cortante y el momento flexionante de una carga ficticia M/EI para determinar la pendiente y la ordenada de la elástica, aplica realmente los mismos cálculos que el método del área de momentos, pero con el inconveniente de no poner de manifiesto el significado físico de dichos cálculos. Este inconveniente es aún mayor cuando se aplica a las ménsulas y a las vigas con voladizos, en las que hay que cambiar las condiciones de sujeción de la viga conjugada. No obstante, tiene la ventaja de poderse aplicar mecánicamente, lo que es muy interesante para trabajos de rutina, en los que permite la aplicación directa de las definiciones de fuerza cortante y momento flexionante a la carga ficticia, sin necesidad de pensar, ni de ayudarse con dibujos de la elástica para ver qué relaciones geométricas hay que aplicar, ni de tener en cuenta el signo de las desviaciones, ni el sentido de la inclinación de las tangentes a la elástica, etc.

Vamos a ver algo sobre la necesidad de cambiar las condiciones de apoyo o sujeción en ciertos casos. Para la viga en voladizo de la figura 6-31a se ha trazado en (b) el diagrama de



(a) Carga real y curva elástica

(b) Diagrama de $\frac{M}{EI}$

(c) Carga en la viga conjugada

Figura 6-31. Condiciones de apoyo necesarias para resolver vigas en voladizo por el método de la viga conjugada.

M/EI. Este diagrama no puede aplicarse directamente como carga ficticia a otra viga igual, con su empotramiento en el extremo derecho C, ya que la fuerza cortante y el momento flexionante ficticios en B serían nulos, mientras que la pendiente y la ordenada en B de la viga original no lo son. Por ello, la viga conjugada no puede ser igual que la original, sino modificada, como se observa en la figura 6-31c, de manera que en B exista una fuerza cortante y un momento flexionante ficticios que se correspondan con la pendiente y la deflexión reales.

Ahora bien, la pendiente y la deflexión de la viga principal en C son nulas. Por tanto, la fuerza cortante ficticia debe ser nula, es decir,

$$[V = (\Sigma Y)_{izq}] \qquad 0 = V - A$$

de donde se deduce que la fuerza cortante en B de la viga conjugada debe ser igual al área del diagrama de carga ficticia M/EI. Además, para tener momento ficticio nulo en C, tiene que existir en B un momento ficticio M tal que

$$[M_C = (\Sigma M)_{izq}] \qquad 0 = M + VL - A\frac{L}{4}$$

de donde, como $V = A$, se tiene

$$M = -AL + A\frac{L}{4} = -A(L - \frac{L}{4})$$

y como $L - L/4$ es precisamente $\bar{x}_B$ del área de momentos, se deduce que M y V son las reacciones de empotramiento de una viga empotrada en B y libre en C y, por tanto, la viga conjugada en el caso de tal viga es otra de la misma longitud, pero con el empotramiento en el extremo libre, y viceversa.

Sólo después de esto pueden calcularse la fuerza cortante y el momento flexionante ficticios correspondientes a la pendiente y ordenadas de la elástica real. En realidad, los problemas del tipo de vigas en voladizo se pueden resolver de forma más directa aplicando el método del área de momentos, aunque el método de la viga conjugada, después del cambio de la sección de empotramiento que se ha indicado, viene a ser exactamente lo mismo y con el que se llega a los mismos cálculos.

PROBLEMAS

Resolver los problemas 653 a 665, ambos inclusive, y los casos 6 a 12 de la Tabla 6-2 mediante el método de la viga conjugada.

6-9. DEFLEXIONES POR EL MÉTODO DE SUPERPOSICIÓN

Como método suplementario para la evaluación de pendientes y ordenadas de la elástica se pueden utilizar los resultados de algunos tipos sencillos de cargas, para obtener, por suma de efectos, las soluciones correspondientes a cargas más complicadas. Este procedimiento, llamado *método de superposición,* determina la pendiente y la deflexión en un punto de una viga por suma de las pendientes o de las deflexiones producidas, en ese mismo punto, por cada una de las cargas cuando éstas actúan por separado. La única restricción o condición impuesta para poder aplicar este método es que cada carga aislada no debe producir un cambio apreciable en la forma inicial o en la longitud de la viga, esto es, la actuación de cada carga no debe influir en la forma de actuar de las demás.

La aplicación del método de superposición presenta notables ventajas, sobre todo cuando las cargas son una combinación de los tipos que aparecen en la Tabla 6-2. Para cargas parcialmente distribuidas, el método requiere una integración (véase fig. P-683). En tales casos, es preferible el método de la doble integración. Si de lo que se trata es de calcular la deflexión o la pendiente en un punto determinado, lo mejor es el método del área de momentos.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

682. Mediante el método de superposición, calcular el valor de $EI\delta$ en el centro de la viga de la figura 6-32a con dos cargas concentradas.

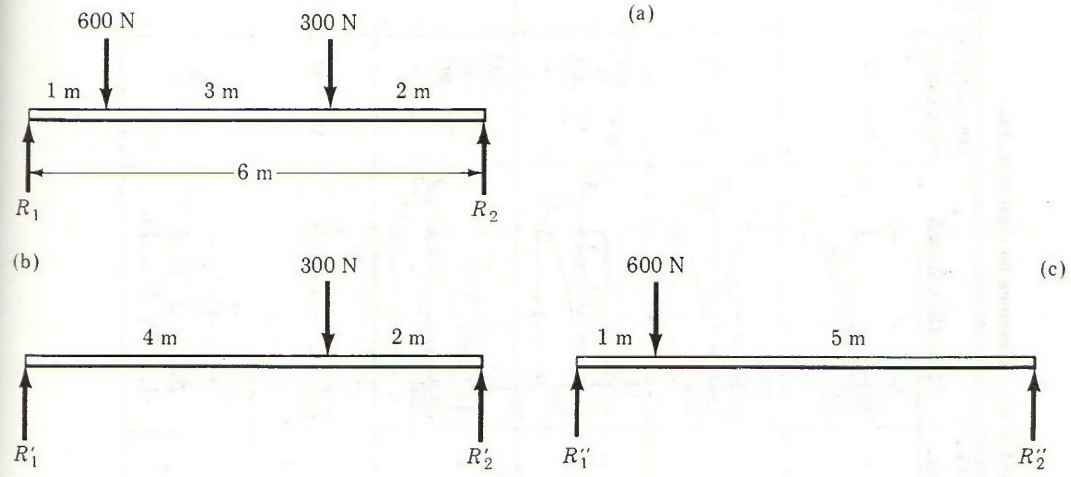
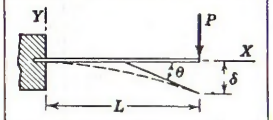
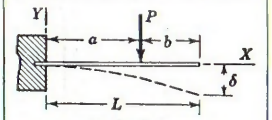
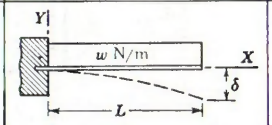
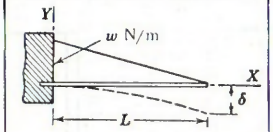
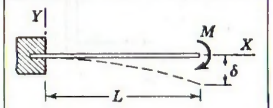
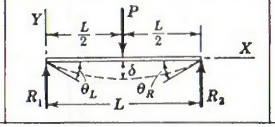
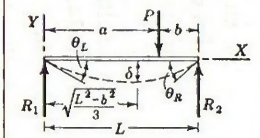
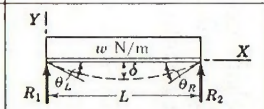
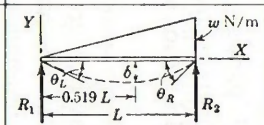
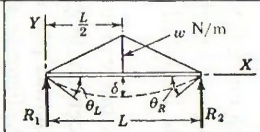
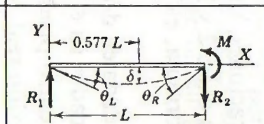
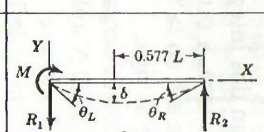


Figura 6-32.

TABLA 6-2. Resumen de vigas cargadas

CASO No.	TIPO DE CARGA	MOMENTO MÁXIMO	PENDIENTE EN EL EXTREMO	ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA (y es positiva hacia abajo)	DEFLEXIÓN MÁXIMA
1		$M = -PL$	$\theta = \frac{PL^2}{2EI}$	$EIy = \frac{Px^2}{6}(3L - x)$	$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$
2		$M = -Pa$	$\theta = \frac{Pa^2}{2EI}$	$EIy = \frac{Px^2}{6}(3a - x)$ para $0 < x < a$ $EIy = \frac{Pa^2}{6}(3x - a)$ para $a < x < L$	$\delta = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a)$
3		$M = -\frac{wL^2}{2} = -\frac{WL}{2}$	$\theta = \frac{wL^3}{6EI} = \frac{WL^2}{6EI}$	$EIy = \frac{wx^2}{24}(6L^2 - 4Lx + x^2)$	$\delta = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{WL^3}{8EI}$
4		$M = -\frac{wL^2}{6} = -\frac{WL}{3}$	$\theta = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{WL^2}{12EI}$	$EIy = \frac{wx^2}{120L}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$	$\delta = \frac{wL^4}{30EI} = \frac{WL^3}{15EI}$
5		$M = -M$	$\theta = \frac{ML}{EI}$	$EIy = \frac{Mx^2}{2}$	$\delta = \frac{ML^2}{2EI}$
6		$M = \frac{PL}{4}$	$\theta_L = \theta_R = \frac{PL^2}{16EI}$	$EIy = \frac{Px}{12}\left(\frac{3}{4}L^2 - x^2\right)$ para $0 < x < \frac{L}{2}$	$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$

7		$M=\frac{Pab}{L}$ en $x=a$	$\theta_L=\frac{Pb(L^2-b^2)}{6EIL}$ $\theta_R=\frac{Pa(L^2-a^2)}{6EIL}$	$Ely=\frac{Pbx}{6L}(L^2-x^2-b^2)$ para $0<x<a$ $Ely=\frac{Pb}{6L}\left[\frac{L}{b}(x-a)^3+(L^2-b^2)x-x^3\right]$ para $a<x<L$	$\delta=\frac{Pb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\,EIL}$ en $x=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$ En el centro (no la máx.) $\delta=\frac{Pb}{48EI}(3L^2-4b^2)$ cuando $a>b$
8		$M=\frac{wL^2}{8}=\frac{WL}{8}$	$\theta_L=\theta_R=\frac{wL^3}{24EI}$	$Ely=\frac{wx}{24}(L^3-2Lx^2+x^3)$	$\delta=\frac{5wL^4}{384EI}=\frac{5WL^3}{384EI}$
9		$M=\frac{wL^2}{9\sqrt{3}}=\frac{2WL}{9\sqrt{3}}$	$\theta_L=\frac{7wL^3}{360EI}$ $\theta_R=\frac{8wL^3}{360EI}$	$Ely=\frac{wx}{360L}(7L^4-10L^2x^2+3x^4)$	$\delta=\frac{2.5wL^4}{384EI}=\frac{5WL^3}{384EI}$ en $x=0.519L$
10		$M=\frac{wL^2}{12}=\frac{WL}{6}$	$\theta_L=\theta_R=\frac{5wL^3}{192EI}$	$Ely=\frac{wx}{960L}(25L^4-40L^2x^2+16x^4)$ para $0<x<\frac{L}{2}$	$\delta=\frac{wL^4}{120EI}=\frac{WL^3}{60EI}$
11		$M=M$	$\theta_L=\frac{ML}{6EI}$ $\theta_R=\frac{ML}{3EI}$	$Ely=\frac{MLx}{6}\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)$	$\delta=\frac{ML^2}{9\sqrt{3}\,EI}$ en $x=\frac{L}{\sqrt{3}}$ En el centro (no la máx.) $\delta=\frac{ML^2}{16EI}$
12		$M=M$	$\theta_L=\frac{ML}{3EI}$ $\theta_R=\frac{ML}{6EI}$	$Ely=\frac{Mx}{6L}(L-x)(2L-x)$	$\delta=\frac{ML^2}{9\sqrt{3}\,EI}$ en $x=\left(L-\frac{L}{\sqrt{3}}\right)$ En el centro (no la máx.) $\delta=\frac{ML^2}{16EI}$

Solución: Según el caso 7 de la Tabla 6-2, la deflexión en el centro del claro para una carga concentrada aplicada excéntricamente vale $EI\delta = (Pb/48)(3L^2 - 4b^2)$, en donde b es el menor de los segmentos que determina la carga sobre la viga. Descomponiendo el sistema de cargas en las dos indicadas en las figuras 6-32(b) y (c), la deflexión en el centro de (a) es la suma de las deflexiones en el centro de (b) y de (c). Por tanto,

$$EI\delta = \sum \frac{Pb}{48}(3L^2 - 4b^2)$$

$$= \frac{300(2)}{48}\left[3(6)^2 - 4(2)^2\right] + \frac{600(1)}{48}\left[3(6)^2 - 4(1)^2\right]$$

$$= 2450 \text{ N}\cdot\text{m}^3$$ **Resp.**

683. Una viga simplemente apoyada soporta una carga uniforme sobre parte de su longitud, como se indica en la figura 6-33. Calcular el valor de $EI\delta$ en el centro.

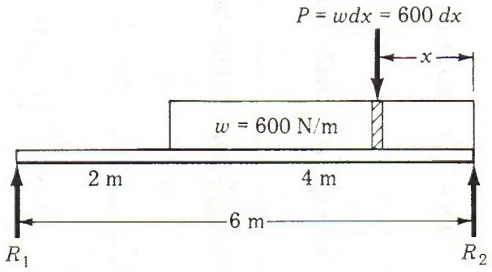


Figura 6-33.

Solución: La carga uniforme se puede considerar como una serie de cargas concentradas elementales de valor $P = w\,dx = 600\,dx$ cada una, situadas a distancia x del extremo. Aplicando el caso 7 de la Tabla 6-2, la deflexión en el centro es:

$$EI\delta = \sum \frac{Pb}{48}(3L^2 - 4b^2)$$

$$= \int_0^3 \frac{(600\,dx)(x)}{48}\left[3(6)^2 - 4x^2\right] + \int_2^3 \frac{(600\,dx)(x)}{48}\left[3(6)^2 - 4x^2\right]$$

$$= 5063 + 2562 = 7625 \text{ N}\cdot\text{m}^3$$ **Resp.**

Se necesitan dos integraciones, una entre 0 y 3, para los elementos que están en la mitad derecha de la viga, y otra entre 2 y 3 para los elementos en la mitad izquierda. En efecto, x, que sustituye a b en la fórmula, es la longitud del menor segmento que determina la carga $600\,dx$ sobre la viga.

Dividiendo la carga dada en dos partes iguales, y sustituyendo cada una de ellas por su resultante de 1200 N aplicados en el centro de gravedad, como indica la figura 6-34, la suma de las deflexiones en el centro producidas por estas dos cargas concentradas da una buena aproximación de la deflexión real. Aplicando el resultado del caso 7 de la tabla, se tiene:

$$EI\delta = \frac{1200(1)}{48}\left[3(6)^2 - 4(1)^2\right] + \frac{1200(3)}{48}\left[3(6)^2 - 4(3)^2\right] = 8000 \text{ N}\cdot\text{m}^3$$

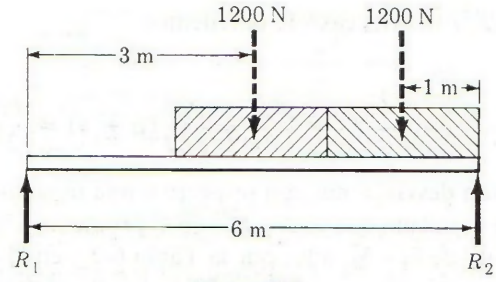


Figura 6-34.

Se consigue mayor aproximación dividiendo la carga en tres o más partes iguales. Sin embargo, como se ha podido comprobar, aun con sólo una división en dos, la deflexión obtenida es únicamente un 5% mayor que el valor correcto de 7625 N · m³.

684. La viga con voladizo de la figura 6-35 soporta una carga concentrada P en su extremo libre. Calcular la deflexión en el punto de aplicación de la carga.

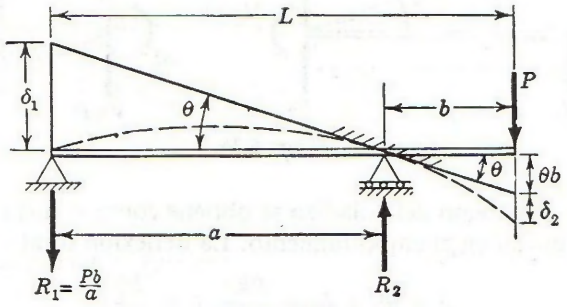


Figura 6-35.

Solución: La tangente a la elástica en el punto R_2 forma un ángulo muy pequeño con la horizontal. Imaginemos que la viga, en su posición inicial, coincidiera con esta tangente y estuviera sujeta de manera que su inclinación en R_2 no pudiera modificarse. La aplicación de R_1 y P reproducirían la elástica verdadera. Las deflexiones δ_1 y δ_2 producidas por estas cargas son del forma del caso 1 de la Tabla 6-2. Teóricamente estas deflexiones serían perpendiculares a la posición inicial ficticia de la viga, pero, como siempre, y por tratarse de ángulos muy pequeños, las proyecciones sobre la vertical $\delta \cos \theta$ son prácticamente iguales a δ, es decir, que no existe diferencia alguna salvo un infinitésimo de orden superior, entre las deflexiones perpendiculares a la tangente y las verticales.

Geométricamente se tiene

$$\delta_1 = \theta a; \quad \text{de donde} \quad \theta = \frac{\delta_1}{a}$$

por lo que la deflexión en P es

$$y = \theta b + \delta_2 = \delta_1 \frac{b}{a} + \delta_2$$

donde, al sustituir $\delta = PL^3/3EI$ del caso 1, obtenemos

$$y = \frac{\frac{Pb}{a}(a^3)}{3EI} \cdot \frac{b}{a} + \frac{Pb^3}{3EI} = \frac{Pb^2}{3EI}(a + b) = \frac{Pb^2L}{3EI} \qquad \textbf{Resp.}$$

En realidad, δ_1 y δ_2 son desviaciones con respecto a una tangente trazada por R_2, por lo que este procedimiento es el mismo que el descrito en el problema 652. La única diferencia es el procedimiento de cálculo de δ_1 y δ_2, aquí por la Tabla 6-2 y en el otro por el diagrama de momentos.

Otra solución: La pendiente de la elástica en R_2 también se puede calcular dividiendo ésta en las dos partes que indica la figura 6-36. La acción del voladizo sobre la porción de viga entre apoyos se puede sustituir por la fuerza cortante P y el momento Pb. La fuerza cortante se trasmite directamente a la reacción R_2, y el par produce el efecto del caso 11 de la Tabla 6-2. En estas condiciones, la inclinación de la viga en R_2 es $\theta = ML/3EI = (Pb)a/3EI$.

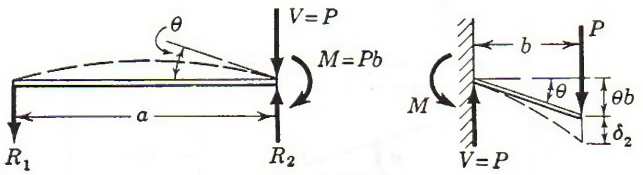


Figura 6-36.

La deflexión en el extremo del voladizo se obtiene como si fuera una ménsula, caso 1, con una inclinación inicial en el empotramiento. La deflexión total viene dada por:

$$y = \theta b + \delta_2 = \frac{Pba}{3EI} \cdot b + \frac{Pb^3}{3EI}$$

que, como antes, se reduce a

$$y = \frac{Pb^2}{3EI}(a + b) = \frac{Pb^2L}{3EI}$$

La ecuación de la elástica entre los apoyos es, según el caso 11,

$$y = \frac{Pbax}{6EI}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

y en función de x, medido desde R_2, la ecuación de la elástica de la parte volada viene expresada por:

$$y = \frac{Pba}{3EI}x + \frac{Px^2}{6EI}(3b - x)$$

685. Dos vigas en voladizo, del mismo material y de la misma sección, soportan conjuntamente una carga uniformemente repartida de w N/m, como indica la figura 6-37. Determinar la fuerza P trasmitida por el rodillo colocado entre ambas.

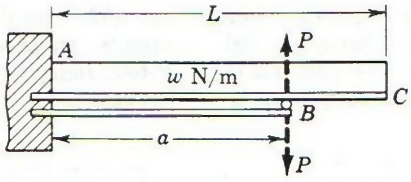


Figura 6-37.

Solución: La fuerza P se determina por la condición de que en B ambas vigas han de tener la misma deflexión. Para la viga inferior, por el caso 1, se tiene:

$$\delta = \frac{Pa^3}{3EI}$$

Para la viga superior, cargada con una combinación de las cargas de los casos 3 y 2, la deflexión resultante en B es

$$\delta = \frac{wa^2}{24EI}(6L^2 + a^2 - 4La) - \frac{Pa^3}{3EI}$$

Igualando estas deflexiones se obtiene para P,

$$P = \frac{w}{16a}(6L^2 + a^2 - 4La) \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

Para resolver los problemas siguientes utilícese la Tabla 6-2.

686. Determinar el valor de $EI\delta$ bajo cada carga concentrada de la figura P-686.

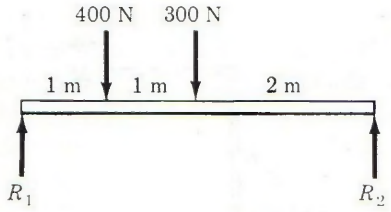


Figura P-686.

Resp. 575 N · m³; 767 N · m³

687. Calcular la deflexión en el centro del claro, en la viga de la figura P-687, con $E = 10 \times 10^9$ N/m² e $I = 20 \times 10^6$ mm⁴.

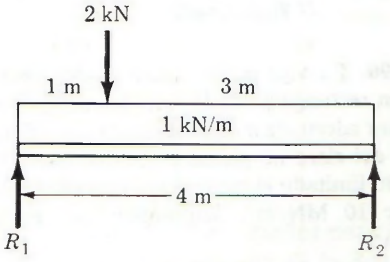


Figura P-687.

Resp. 25.8 mm

688. Determinar el valor de $EI\delta$ en el punto central entre apoyos de la viga de la figura P-688.

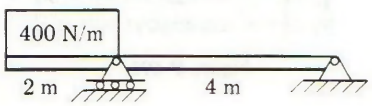


Figura P-688.

689. La viga de la figura P-689 tiene una sección rectangular de 100 mm de ancho por 200 mm de altura. Calcular el valor de P para que la deflexión en el centro valga 40 mm. $E = 10 \times 10^9$ N/m^2.

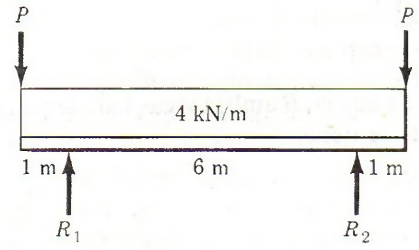


Figura P-689.

Resp. $P = 7.07$ kN

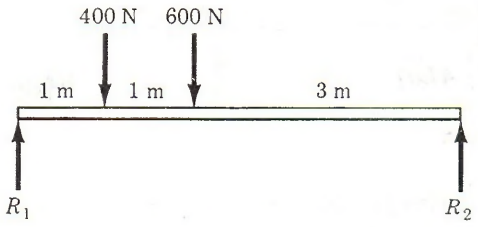


Figura P-690.

690. La viga de la figura P-690 tiene una sección rectangular de 50 mm de ancho. Calcule la altura adecuada d de la viga si la deflexión, a la mitad del claro no puede ser mayor que 20 mm, estando limitado el esfuerzo por flexión a un valor de 10 MN/m^2. Supóngase que $E = 10$ GN/m^2.

691. Determinar la deflexión en el centro del claro en la viga de la figura P-691. *Indicación*: Aplicar el caso 7 e integrar.

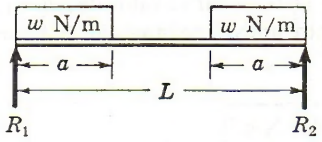


Figura P-691.

Resp. $EI\delta = (wa^2/48)(3L^2 - 2a^2)$

692. Calcular $EI\delta$ en el punto medio entre apoyos, en la viga con voladizo de la figura P-692. *Indicación:* Combinar el caso 11 y parte del caso 8.

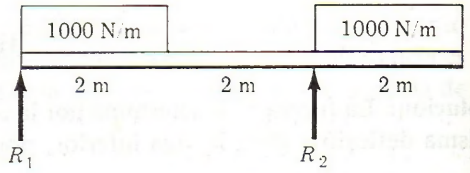


Figura P-692.

693. En la figura P-693 calcular el valor de $EI\delta$ en el extremo derecho de la viga mostrada.

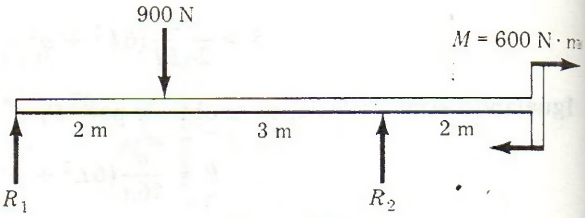


Figura P-693.

Resp. $EI\delta = 680$ N · m^3, descendente

694. La estructura de la figura P-694 es de sección constante y está perfectamente empotrada en su extremo inferior. Calcular la deflexión vertical producida en su punto de aplicación por el par M.

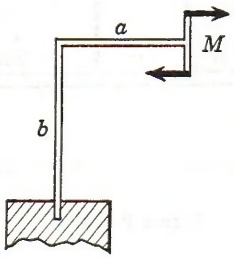


Figura P-694 y P-695.

Resp. $\delta = \dfrac{Ma}{EI}\left(b + \dfrac{a}{2}\right)$

695. Resolver el problema anterior si se sustituye el par por una fuerza P vertical y hacia abajo.

Resp. $\delta = \dfrac{Pa^2}{EI}\left(b + \dfrac{a}{3}\right)$

696. En la figura P-696, calcular el valor de P para el cual la deflexión debajo de esta fuerza sea nula.

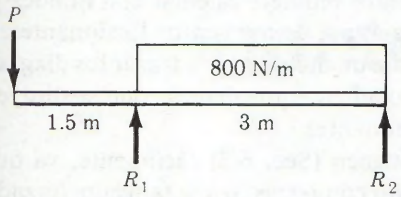


Figura P-696.

Resp. $P = 400$ N

697. Dos vigas idénticas, conectadas en sus extremos, soportan una carga repartida sobre una de ellas, como se indica en la figura P-697. Determinar los momentos en el empotramiento.

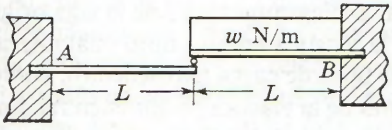


Figura P-697.

Resp. $M_A = -3wL^2/16$; $M_B = -5wL^2/16$

698. La viga de la figura P-698 está apoyada en su extremo izquierdo en un resorte de constante $k = 60$ kN/m. En la viga, $E = 10 \times 10^9$ N/m^2 e $I = 60 \times 10^6$ mm^4. Calcular la deflexión en el extremo.

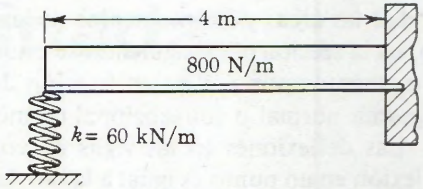


Figura P-698.

Resp. $\delta = 13.6$ mm

699. Dos vigas de madera están colocadas en ángulo recto y en contacto en su punto medio. La viga superior A tiene una sección de 50 mm de ancho por 200 mm de alto y un claro de 3 m. Está simplemente apoyada en sus extremos. La viga inferior B tiene una sección de 80 mm de ancho por 200 mm de altura y está simplemente apoyada sobre un claro de 4 m. En el cruce, el conjunto soporta una carga de 10 kN. Determinar el esfuerzo normal máximo en cada viga.

RESUMEN

Partiendo de la relación $1/\rho = M/EI$ (sección 5-2) se estudian dos métodos para la determinación de pendientes y ordenadas de la elástica. El primero, el método de la doble integración, es fundamentalmente analítico. Para determinar la deformación en un punto dado hay que obtener primero la ecuación completa de la elástica y de las pendientes. El procedimiento es sencillo partiendo de la ecuación general de momentos, como se explica en la sección 6-2. Las constantes de integración se anulan si se considera el origen del sistema de ejes en un punto en que la pendiente y la deflexión sean nulas, como en un empotramiento, o en el centro de una viga simétricamente cargada.

El método del área de momentos es más directo, especialmente cuando lo que se trata es de calcular la deflexión o la pendiente en un punto dado. Los dos teoremas fundamentales de este método, desarrollado en la sección 6-3, son:

$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{AB} \qquad (6\text{–}4)$$

y

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B \qquad (6\text{–}5)$$

La desviación tangencial en cualquier punto es positiva si éste queda por encima de la tangente de referencia, desde la que se mide. Un valor positivo en la desviación angular o variación de pendiente indica que la tangente en el punto de la derecha ha girado en sentido contrario al del reloj respecto de la tangente en el punto izquierdo.

La aplicación de los teoremas del área de momentos requiere calcular con rapidez y seguridad las áreas y los momentos de las áreas del diagrama de momentos flexionantes. Por ello, en la sección 6-4 y siguientes se estudia y desarrolla un método para trazar los diagramas de momentos por partes, en función de vigas en voladizo equivalentes, que sustituyen al diagrama normal o convencional de momentos flexionantes.

Las deflexiones en las vigas en voladizo se obtienen (Sec. 6-5) fácilmente, ya que la deflexión en un punto es igual a la desviación del punto con respecto a la tangente trazada en el empotramiento.

Las deflexiones en vigas simplemente apoyadas se determinan trazando una tangente de referencia en uno cualquiera de los apoyos. El procedimiento completo se resume en los cuatro puntos que expone la sección 6-6. Como las deflexiones en el centro del claro son prácticamente equivalentes a las deflexiones máximas, es muy útil disponer de un método rápido y sencillo para calcular aquéllas; en la sección 6-7 se desarrolla este método.

El método de la viga conjugada (Sec. 6-8) aplica las definiciones de fuerza cortante y momento flexionante a una viga con una carga ficticia, el diagrama M/EI de la viga original, a la determinación de la pendiente y la ordenada de la elástica en un punto cualquiera.

Cuando las cargas en una viga son combinación de tipos de carga más sencillos, como los indicados en la Tabla 6-2, las ordenadas y las pendientes de la elástica se obtienen fácilmente por superposición de los resultados que figuran en dicha tabla. En la sección 6-9 se dan amplios detalles sobre este método de superposición

7

vigas estáticamente indeterminadas

7-1. INTRODUCCIÓN

Al estudiar el esfuerzo simple y la torsión se observó que en los problemas estáticamente indeterminados, en los que las ecuaciones de equilibrio estático son insuficientes, es preciso añadir otras ecuaciones de relación entre las deformaciones elásticas. De la misma manera, en el estudio de las vigas estáticamente indeterminadas o hiperestáticas hay que añadir a las ecuaciones de la estática otras relaciones adicionales basadas en la deformación de las vigas. Dichas relaciones se obtienen a partir del estudio de la elástica de una viga estáticamente determinada que se hizo en el capítulo anterior.

Se examinan tres procedimientos: (1) doble integración, (2) método de superposición, que utiliza las soluciones de las Tablas 6-2 y 7-1, y (3) método del área de momentos, en el que se trabaja directamente con la forma de la elástica. Como veremos, a veces es preciso hallar la ordenada en un cierto punto, otras veces es una relación entre las pendientes entre dos puntos, y en ciertos casos ambas cosas.

7-2. APOYOS REDUNDANTES

Una viga en voladizo está soportada por dos reacciones, la vertical o fuerza cortante resistente y el momento resistente o de empotramiento, como se indica en la figura 7-1a. Como estos dos elementos de reacción se calculan mediante las ecuaciones de la estática, $\Sigma Y = 0$ y $\Sigma M = 0$, la viga en voladizo es estáticamente determinada. Ahora bien, si se coloca otro apoyo en cualquier punto, como en la figura 7-1b, se introduce una reacción adicional, y como no se aumenta el número de ecuaciones de la estática, la viga tiene una apoyo redundante, es decir, un exceso de restricciones.

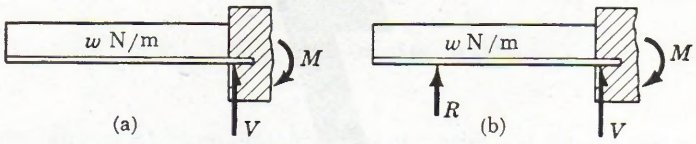


Figura 7-1. Vigas estáticamente determinada e indeterminada.

Dicho de otra manera, para cada valor arbitrario de R se pueden calcular unos valores de M y V que satisfacen las condiciones de equilibrio estático, por lo que la determinación de los valores apropiados de la terna R, V, M requiere añadir una condición más a las ecuaciones de equilibrio estático. En estos casos se suele tomar como condición que la deflexión en el apoyo redundante, R por ejemplo, sea nula o tenga cualquier otro valor. Otras veces, y considerando como restricción redundante el momento de empotramiento, por ejemplo al aplicar el método de superposición, se pone como condición que la pendiente de la elástica en este punto sea nula.

Una viga empotrada en sus dos extremos, como la representada en la figura 7-2, tiene cuatro elementos de reacción, pero como sólo se dispone de dos ecuaciones de la estática $\Sigma Y = 0$ y $\Sigma M = 0$, la viga tiene dos restricciones redundantes. A veces se toman como redundantes o hiperestáticas las dos del mismo extremo, es decir, V_A y M_A. Otras veces (véase la Sec. 7-5), los dos momentos de empotramiento.

7-3. APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS DE LA DOBLE INTEGRACIÓN Y DE LA SUPERPOSICIÓN

El método de la doble integración se aplica exactamente igual que en las vigas estáticamente determinadas, sólo que allí todas las fuerzas eran conocidas y aquí intervendrán además unas desconocidas, las reacciones redundantes. Al aplicarlo, consideremos el origen de ejes, con preferencia, en un extremo empotrado, con lo que las dos constantes de integración que aparecen serán nulas. Ahora bien, en la ecuación general de momentos y en las obtenidas al integrar ésta sucesivamente aparecen, además, los valores desconocidos de las reacciones hiperestáticas. Para determinar estos valores se han de aplicar a la ecuación de la elástica o de la pendiente las condiciones existentes en el otro apoyo. En una viga estáticamente determinada existen siempre dos condiciones de sujeción, ordenadas o pendientes, que permiten deducir las dos constantes de integración, y cada restricción sobrante introduce en las ecuaciones una incógnita, pero añade también una condición más a la elástica, por lo que el sistema será siempre determinado.

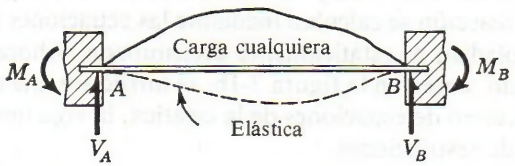
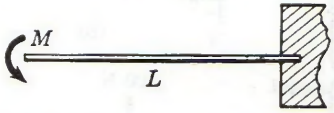
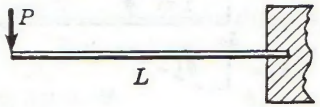
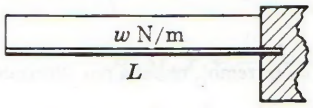
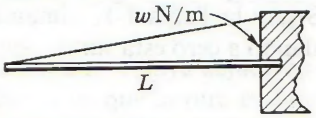


Figura 7-2. Viga perfectamente empotrada en sus extremos.

TABLA 7-1. Pendiente y deflexión en el extremo libre.

$EI\theta = \frac{ML}{n+1}$; $EI\delta = \frac{ML^2}{n+2}$; M= Momento en el empotramiento

CARGA	n	$EI\theta$	$EI\delta$
	0	$\frac{ML}{1}$	$\frac{ML^2}{2}$
	1	$\frac{ML}{2}$	$\frac{ML^2}{3}$
	2	$\frac{ML}{3}$	$\frac{ML^2}{4}$
	3	$\frac{ML}{4}$	$\frac{ML^2}{5}$

El método de superposición se aplica utilizando los resultados de los distintos casos de carga que aparecen en la Tabla 6-2, aunque conviene utilizar el resumen dado en la Tabla 7-1, en que aparecen los valores de la pendiente y la deflexión en el extremo libre de una viga en voladizo sometida a varios tipos de carga en función del momento M en su extremo empotrado. Obsérvese que los coeficientes son exactamente los mismos que los encontrados para el área y la abscisa del centro de gravedad en la Tabla 6-1. Es fácil comprobar que las soluciones generales son de la forma

$$EI\theta = ML/(n + 1) \text{ y } EI\delta = ML^2/(n + 2),$$

siendo n el grado de la curva de momento flexionante.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

701. Determinar las reacciones en la viga de la figura 7-3a por los dos métodos: (1) método de superposición, considerando a R_A como reacción sobrante, y (2) método de la doble integración.

Solución: **Método de superposición.** Las condiciones de apoyo de la viga se pueden reproducir superponiendo los efectos de los dos estados de carga que se aplican a la ménsula de las figuras 7-3b y 7-3c, con la condición de que la deflexión total en A sea nula, es decir, $\delta_1 = \delta_2 + \delta_3$. Obsérvese que δ_2 es la deflexión bajo la carga de 400 N y δ_3 la deflexión producida por el giro de la sección en este punto en un ángulo θ, que produce la inclinación del último seg-

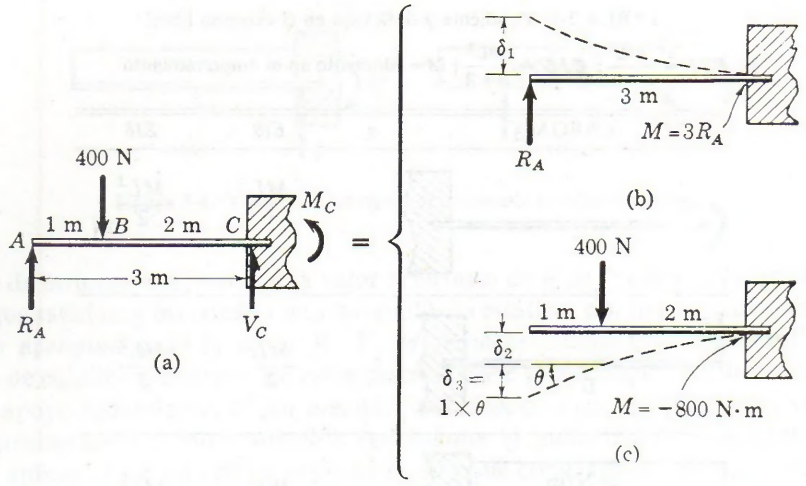


Figura 7-3. Viga empotrada (con apoyo en un extremo), resuelta por superposición.

mento de 1 m de longitud de la viga (Fig. c). Según la Tabla 7-1, sumando las deflexiones producidas por cada carga en el extremo, e igualando a cero esta suma, como lo es en la viga original, se tiene:

$$[\Sigma EI\delta = 0] \qquad \frac{(3R_A)(3)^2}{3} - \frac{(800)(2)^2}{3} - 1 \times \frac{(800)(2)}{2} = 0$$

de donde

$$R_A = 207 \text{ N}$$

Conocida R_A, la suma de fuerzas verticales determina V_C.

$$[\Sigma Y = 0] \qquad V_C + 207 - 400 = 0 \qquad V_C = 193 \text{ N}$$

Por definición de momento flexionante en C, que es equivalente a $\Sigma M_C = 0$ pero más fácil de aplicar, se tiene:

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_C = 3(207) - 2(400) = -179 \text{ N·m}$$

Otro método es considerar a M_C como reacción hiperestática y sustituir la viga por una simplemente apoyada con los dos estados de carga de los casos 7 y 11 de la Tabla 6-2, y determinar el valor de M_C por la condición de que la pendiente total en el apoyo derecho sea nula, como en la viga original. Compruébese que se obtiene el mismo resultado.

Método de la doble integración. Volviendo a la figura 7-3a, consideremos como origen de ejes coordenados el extremo empotrado C. Por conveniencia de cálculo se da la vuelta a la viga, de manera que el extremo empotrado quede a la izquierda, como en la figura 7-4. En este extremo fijo, la deflexión y la pendiente son nulas, por lo que las dos constantes de integración C_1 y C_2, que físicamente representan la tangente y la deflexión en el origen, tam-

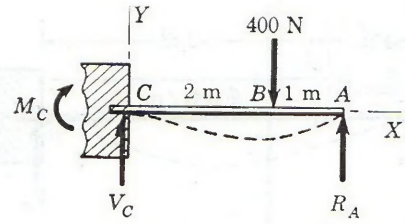


Figura 7-4.

bién lo serán. Escribiendo la ecuación diferencial de la elástica en función de la ecuación general de momentos e integrando dos veces se obtiene:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_C + V_C x - 400\langle x-2\rangle \qquad (a)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = M_C x + \frac{V_C x^2}{2} - 200\langle x-2\rangle^2 + C_1 \quad (C_1 = 0) \qquad (b)$$

$$EIy = \frac{M_C x^2}{2} + \frac{V_C x^3}{6} - \frac{200}{3}\langle x-2\rangle^3 + C_2 \quad (C_2 = 0) \qquad (c)$$

Obsérvese que aunque se haya dejado en la ecuación V_C y M_C como incógnitas, sólo una de ellas es redundante, ya que la otra es función de la primera según el equilibrio estático. Como ya se han aplicado las dos condiciones en C, se aplican ahora las condiciones en A, es decir, que el momento sea cero (ecuación de la estática), y que la flecha también sea nula (ecuación de deformación). Así, pues, poniendo en (a) y (c) $x = 3$ resulta:

$$M_C + 3V_C - 400(1) = 0$$

$$\frac{M_C}{2}(3)^2 + \frac{V_C}{6}(3)^3 - \frac{200}{3}(1)^3 = 0$$

De este sistema se obtiene, como antes,

$$V_C = 193\ \text{N} \quad \text{y} \quad M_C = -179\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Resp.}$$

Un aspecto importante de este procedimiento, aplicado precisamente en esta forma, es que si la viga hubiera sido doblemente empotrada servirían las ecuaciones (a), (b) y (c); únicamente se tendrían que variar las condiciones en A, ya que entonces lo nulo sería la pendiente y la deflexión, es decir, (b) y (c) para $x = 3$. Sustituyendo y resolviendo el sistema, se obtendrían $V_C = 104$ N y $M_C = -89$ N · m.

702. Una viga de 4 m de longitud, doblemente empotrada, soporta una carga uniformemente distribuida sobre parte de su longitud, como se indica en la figura 7-5. Aplicar el método de la doble integración para calcular las reacciones y comprobar la solución que se obtiene aplicando el método de superposición.

Solución: Aunque por la forma que va a tomar la elástica se deduce que el momento en A ha de ser negativo, se trazará como positivo, para ver de qué manera la solución proporciona el valor y el signo del mismo.

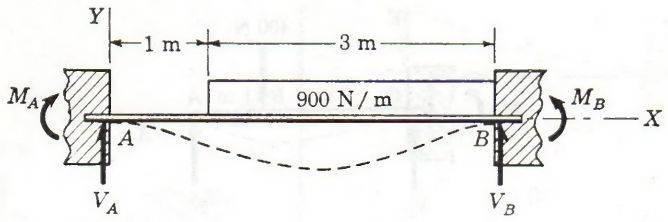


Figura 7-5.

La forma de la elástica, tal como se ha dibujado en la figura 7-5, indica que la pendiente y la deflexión en A son nulas. Por tanto, considerando el origen de ejes en este punto, las constantes C_1 y C_2 son nulas. Escribiendo la ecuación diferencial de la elástica en función de la ecuación general de momentos, e integrando dos veces, se tiene:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_A + V_A x - \frac{900}{2}\langle x-1\rangle^2 \qquad (a)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = M_A x + \frac{V_A x^2}{2} - 150\langle x-1\rangle^3 + \overbrace{C_1}^{=0} \qquad (b)$$

$$EIy = \frac{M_A x^2}{2} + \frac{V_A x^3}{6} - \frac{150}{4}\langle x-1\rangle^4 + \overbrace{C_2}^{=0} \qquad (c)$$

Ahora existen dos reacciones desconocidas o sobrantes en las ecuaciones de la elástica y de la pendiente, V_A y M_A. Para determinarlas se aplican otras dos condiciones de deformación. Como se observa en B, o sea para $x = 4$, la deflexión y la pendiente también son nulas, por lo que sustituyendo en las ecuaciones (b) y (c) se obtiene:

$$4M_A + (4)^2\frac{V_A}{2} - 150(3)^3 = 0 \qquad (d)$$

$$(4)^2\frac{M_A}{2} + (4)^3\frac{V_A}{6} - \frac{150}{4}(3)^4 = 0 \qquad (e)$$

cuya solución es

$$V_A = 949\ \text{N} \quad \text{y} \quad M_A = -886\ \text{N·m} \qquad \textbf{Resp.}$$

El signo negativo de M_A indica que, efectivamente tiene sentido opuesto al que se supuso. Como el momento flexionante en este punto es negativo, con este proceder no se comete error, si luego se ha de utilizar M_A en algún otro cálculo.

Determinados V_A y M_A, se aplican las condiciones de equilibrio estático al diagrama de cuerpo libre de la figura 7-5 y se obtienen las reacciones en B. La suma de las componentes verticales de las fuerzas proporciona

$$[\Sigma Y = 0] \qquad V_B + 949 - 900(3) = 0 \qquad V_B = 1750\ \text{N} \qquad \textbf{Resp.}$$

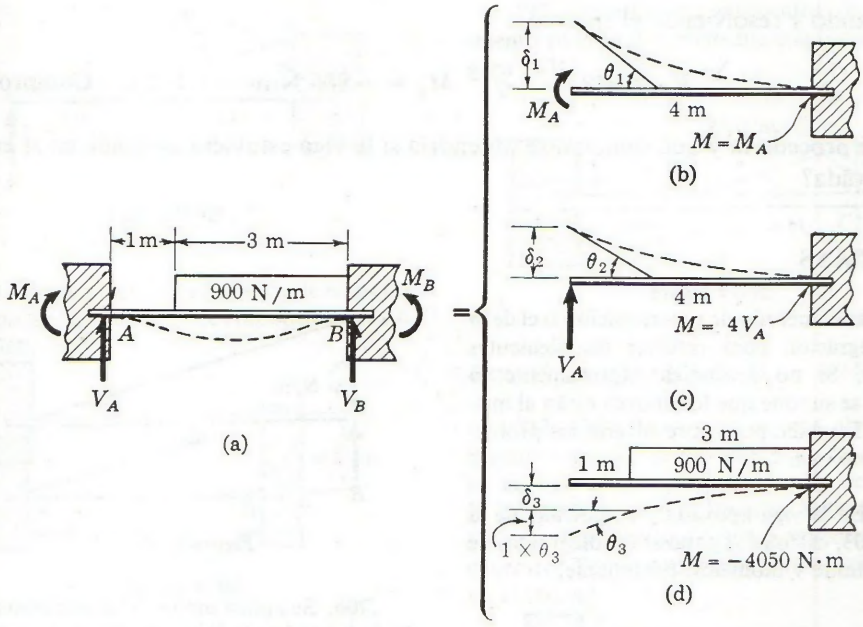


Figura 7-6. Solución por el método de superposición.

y en cuanto a M_B se puede calcular por $\Sigma M_B = 0$, pero es preferible, y así se evita cualquier confusión en los signos, aplicar la definición de momento flexionante:

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_B = 4V_A + M_A - (900 \times 3)\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= 4(949) - 886 - 4050$$
$$= -1140 \text{ N·m} \qquad \textbf{Resp.}$$

Este procedimiento de solución puede adaptarse al caso de que la viga estuviera apoyada en B en lugar de estar empotrada, sin más que cambiar las condiciones impuestas en B por las de deflexión y momento nulos. Se tendría entonces que igualar a cero las ecuaciones (a) y (c) para $x = 4$, y se obtendrían los valores de V_A y M_A correspondientes al apoyo en B.

Para aplicar el método de superposición, se sustituye la viga doblemente empotrada por la viga en voladizo que aparece en las figuras 7-6b, c y d, con tres distintos estados de carga, y donde V_A y M_A son desconocidos y se aplica a la deformación total producida por estos tres estados de carga conjuntamente, las condiciones de sujeción que tenía la viga original, figura 7-6a, es decir, que la deflexión y la pendiente sean nulas en A. Por tanto, tal como se ha dibujado, $\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 = 0$ y $\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - (1 \times \theta_3) = 0$. Aplicando ahora a las deflexiones y ángulos parciales los valores de la Tabla 7-1 se obtiene:

$$[\Sigma EI\theta = 0] \qquad M_A(4) + \frac{(4V_A)(4)}{2} - \frac{(4050)(3)}{3} = 0$$

y

$$[\Sigma EI\delta = 0] \qquad \frac{M_A(4)^2}{2} + \frac{(4V_A)(4)^2}{3} - \frac{(4050)(3)^2}{4} - 1 \times \frac{(4050)(3)}{3} = 0$$

Simplificando y resolviendo el sistema,

$$V_A = 949 \text{ N} \quad \text{y} \quad M_A = -886 \text{ N·m}$$ **Comprobación**

¿Cómo se procedería y qué solución se obtendría si la viga estuviera apoyada en A en lugar de empotrada?

PROBLEMAS

Aplicar el método de superposición o el de la doble integración para resolver los siguientes problemas. Si no se indica expresamente lo contrario, se supone que los apoyos están al mismo nivel. También pueden resolverse los problemas de la sección 7-4.

703. En la viga apoyada y empotrada de la figura P-703, calcular R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

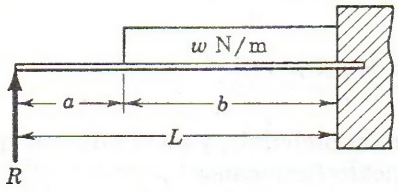


Figura P-703.

Resp. $R = (wb^3/8L^3)(4L - b)$

704. Calcular el valor de R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga apoyada y empotrada de la figura P-704.

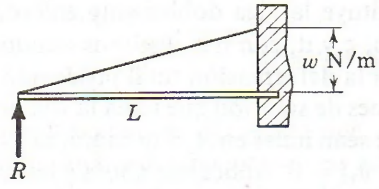


Figura P-704.

Resp. $R = wL/10$

705. En la viga de la figura P-705, determinar la reacción R en el apoyo redundante y trazar los diagramas de cortante y de momento.

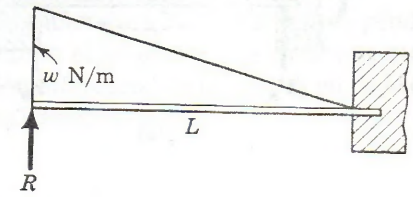


Figura P-705.

706. Se aplica un par M al extremo articulado de la viga de la figura P-706. Calcular la reacción en este extremo y el momento de empotramiento.

Figura P-706.

Resp. $R = 3M/2L$

707. Determinar la reacción R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga estáticamente indeterminada de la figura P-707.

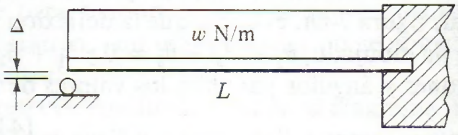


Figura P-707.

708. Calcular la reacción R en la viga de la figura P-708.

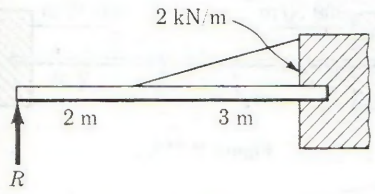


Figura P-708.

709. Determinar los momentos de empotramiento en la viga doblemente empotrada de la figura P-709.

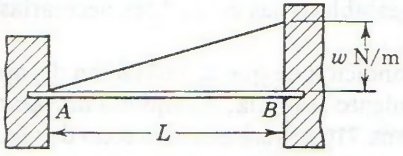


Figura P-709.

Resp. $M_A = -wL^2/30$; $M_B = -wL^2/20$

710. Calcular los momentos de empotramiento en la viga de la figura P-710.

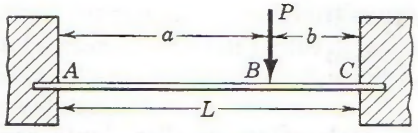


Figura P-710.

Resp. $M_A = -Pab^2/L^2$; $M_C = -Pa^2b/L^2$

711. En la viga mostrada en la figura P-711 hay inicialmente un espacio libre Δ entre el extremo izquierdo y el rodillo indicado. Calcular la reacción en este apoyo después de aplicar la carga w uniformemente distribuida.

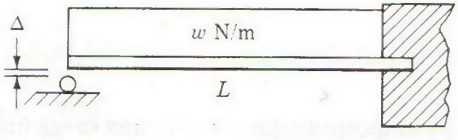


Figura P-711.

712. Calcular los momentos de empotramiento en la viga doblemente empotrada de la figura P-712.

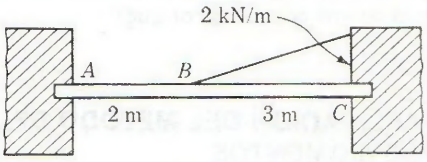


Figura P-712.

Rep. $M_A = -575$ N • m; $M_C = -1525$ N • m

713. Calcular los momentos de empotramiento y el valor de $EI\delta$ en el centro del claro para la viga doblemente empotrada de la figura P-713. *Indicación*: Por simetría, las reacciones en los extremos son iguales y la pendiente es nula en el centro. Tomar como hiperestático el momento en el centro.

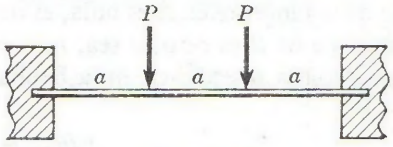


Figura P-713.

Resp. $M = -(2/3)Pa$; $EI\delta = (5/24)Pa^3$

714. En la viga doblemente empotrada de la figura P-714 calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima. *Indicación*: Emplear vigas en voladizo equivalentes con el empotramiento en el centro y voladas hacia los extremos.

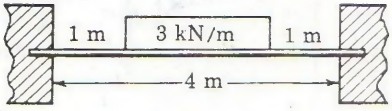


Figura P-714.

Resp. $M = -2750$ N · m

715. Calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima en la viga doble-

mente empotrada de la figura P-715. *Indicación*: Considerar como magnitudes hiperestáticas la fuerza cortante y el momento flexionante en el centro. Obsérvese que la fuerza cortante que actúa en el centro es nula. ¿Por qué?

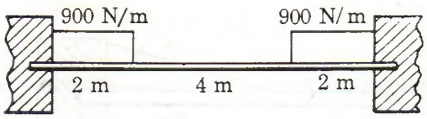


Figura P-715.

7-4. APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS

El método de superposición que se acaba de discribir requiere el empleo de la Tabla 6-2 o de la Tabla 7-1, que dan los valores de las deflexiones y pendientes para distintos tipos de cargas y vigas. En lugar de aplicar estas tablas, o por que no se tengan a mano, es preferible a veces aplicar los teoremas del área de momentos para establecer las ecuaciones necesarias para la determinación de las magnitudes hiperestáticas.

En una viga empotrada y apoyada, se aplica la condición de que la desviación del apoyo con respecto a la tangente a la elástica en el empotramiento sea nula, o adquiera un valor conocido si el apoyo no está al mismo nivel. En el problema 716 se verá esto con todo detalle. En las vigas doblemente empotradas, como se observa en la figura 7-7, dado que las tangentes a la elástica en los extremos son horizontales, la variación total de la pendiente entre los extremos es nula, o sea $\theta_{AB} = 0$. Además, si los extremos están al mismo nivel, la desviación de B respecto de la tangente en A es nula, es decir, $t_{B/A} = 0$. También, la desviación de A respecto de la tangente en B es cero, o sea, $t_{A/B} = 0$. Aplicando los teoremas del área de momentos estas condiciones se escriben en la forma:

$$EI\theta_{AB} = (\text{área})_{AB} = 0 \qquad (a)$$

$$EIt_{B/A} = (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B = 0 \qquad (b)$$

$$EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 0 \qquad (c)$$

Las tres ecuaciones no son independientes; dos cualesquiera de ellas, junto con las ecuaciones de la estática, determinan las cuatro reacciones. Como norma práctica, lo mejor es utilizar la ecuación (*a*) y una de las otras, según lo que convenga por facilidad de cálculo. En el problema 717 se verá cómo elegir una u otra.

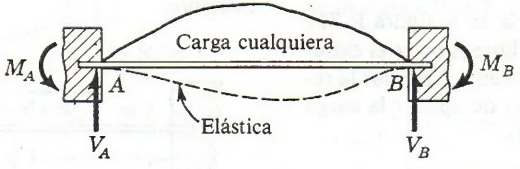


Figura 7-7.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

716. La figura 7-8 representa una viga apoyada y empotrada que soporta una carga uniformemente repartida de w N/m sobre toda su longitud. El apoyo izquierdo es indefor-

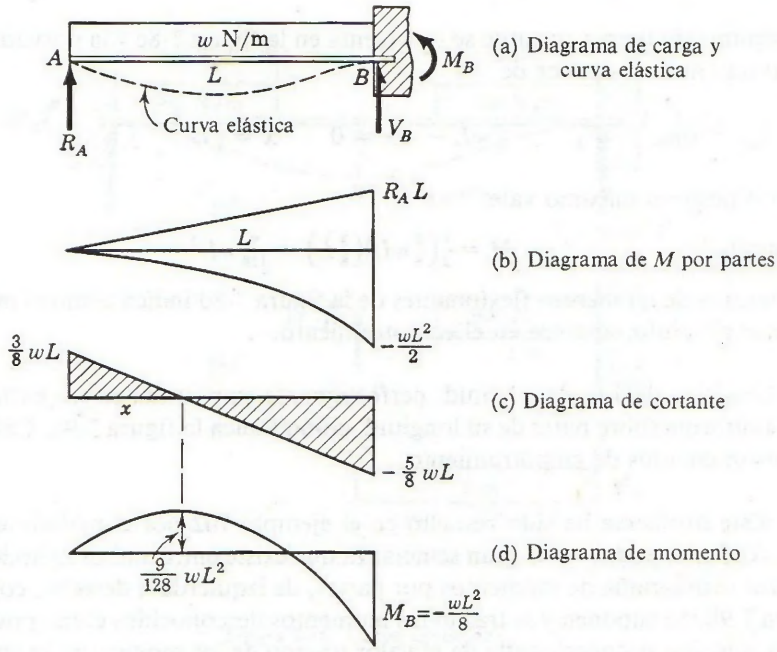


Figura 7-8. Viga empotrada y apoyada, resuelta por el método del área del diagrama de momentos.

mable. Calcular las reacciones y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Solución: Suponiendo que el empotramiento es perfecto, la tangente a la elástica en B es horizontal y pasa por A. Por tanto, la desviación de A con respecto a la tangente en B es nula. Expresando esta condición en función del diagrama de momentos por partes de la figura 7-8b se obtiene:

$$[EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 0] \qquad \frac{(L)(R_A L)}{2}\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{(L)}{3}\left(\frac{wL^2}{2}\right)\left(\frac{3}{4}L\right) = 0$$

Por tanto,

$$R_A = \tfrac{3}{8}wL$$

Para determinar la reacción vertical en el empotramiento se tiene:

$$[\Sigma Y = 0] \qquad R_A + V - wL = 0$$

Sustituyendo R_A por su valor,

$$V = wL - \tfrac{3}{8}wL = \tfrac{5}{8}wL$$

Por definición de momento flexionante en B:

$$[M = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_B = R_A L - \frac{wL^2}{2} = \left(\frac{3}{8}wL\right)L - \frac{wL^2}{2} \qquad M_B = -\frac{wL^2}{8}$$

El diagrama de fuerza cortante se representa en la figura 7-8c y la posición del punto de fuerza cortante nula se deduce de

$$[V = (\Sigma Y)_{izq} = 0] \qquad \tfrac{3}{8}wL - wx = 0 \qquad x = \tfrac{3}{8}L$$

El momento positivo máximo vale

$$[\Delta M = (\text{área})_V] \qquad M = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{8}wL\right)\left(\tfrac{3}{8}L\right) = \tfrac{9}{128}wL^2$$

El diagrama de momentos flexionantes de la figura 7-8d indica cómo el momento máximo, en valor absoluto, aparece en el empotramiento.

717. Una viga de 4 m de longitud, perfectamente empotrada en sus extremos, soporta una carga uniforme sobre parte de su longitud, como indica la figura 7-9a. Calcular las reacciones y los momentos de empotramiento.

Solución: Este problema ha sido resuelto en el ejemplo 702 por el método de la doble integración. Ahora se podrá ver la gran semejanza que existe entre ambos métodos. Se comienza por trazar el diagrama de momentos por partes, de izquierda a derecha, como se observa en la figura 7-9b. Se suponen y se trazan los momentos desconocidos como positivos. De esta manera, la solución proporcionada da el valor y signo de los momentos de empotramiento.

En la elástica de la figura 7-9a se observa que la variación total de pendiente entre A y B es nula, por lo que aplicando el Teorema I de las áreas de momentos se tiene:

$$[EI\theta_{AB} = (\text{área})_{AB} = 0] \qquad \frac{4(4V_A)}{2} + 4M_A - \frac{3(4050)}{3} = 0 \qquad (a)$$

La desviación de B con respecto a la tangente en A es nula y, por tanto, por el Teorema II de las áreas de momentos:

$$[EIt_{B/A} = (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B = 0]$$

$$\frac{4(4V_A)}{2}\left(\frac{4}{3}\right) + 4M_A\left(\frac{4}{2}\right) - \frac{3(4050)}{3}\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \qquad (b)$$

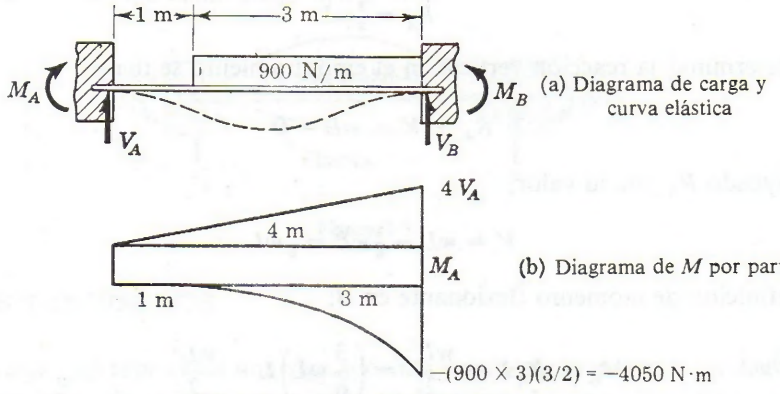


Figura 7-9. Viga doblemente empotrada.

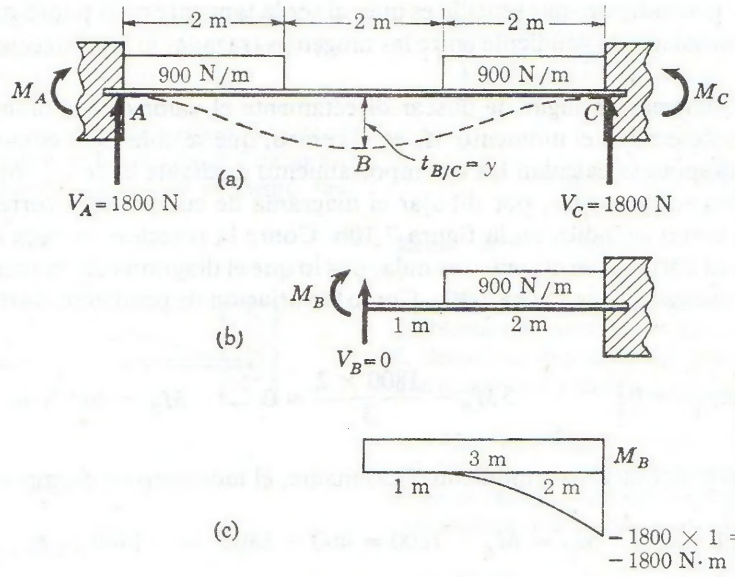


Figura 7-10. Carga simétrica.

Resolviendo el sistema (*a*) y (*b*) se tiene finalmente

$$V_A = 949 \text{ N} \quad \text{y} \quad M_A = -886 \text{ N·m} \qquad \textbf{Resp.}$$

El signo negativo de M_A confirma que su sentido es opuesto al dibujado, lo que ya se sabía, pero de esta manera no puede haber confusión o error en los signos en una posterior utilización.

La desviación de A con respecto a la tangente en B también es nula, por lo que podíamos haber utilizado $EIt_{A/B} = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A = 0$. Ahora bien, observando el diagrama de momentos por partes de la figura 7-9b se deduce que es más sencillo el cálculo tomando momentos de las áreas respecto de B, razón por la cual se ha empleado $EIt_{B/A} = 0$.

Comparando el procedimiento con la solución mediante la doble integración se desprende que las ecuaciones (*a*) y (*e*) obtenidas allí son idénticas a las (*a*) y (*b*) de este método. Por otra parte, comparando con el método de superposición se observa que la segunda ecuación allí obtenida equivale a $EIt_{A/B} = 0$, que se podía haber empleado aquí en lugar de $EIt_{B/A} = 0$.

Determinados V_A y M_A se calculan las demás reacciones de la misma manera que por los otros procedimientos, o sea, aplicando las ecuaciones de la elástica, por lo que no es preciso repetir el cálculo.

718. Calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima en la viga simétricamente cargada y doblemente empotrada de la figura 7-10a.

Solución: Debido a la simetría, las reacciones verticales son iguales a la mitad de la carga total aplicada. Los momentos de empotramiento también son iguales, pero desconocidos. Para

determinarlos, la condición más sencilla es que, al ser la tangente en el punto medio horizontal, es nula la variación de pendiente entre las tangentes trazadas en un extremo y en el punto medio.

En este problema, en lugar de buscar directamente el valor de los momentos de empotramiento se determina el momento M_B en el centro, que se considera como incógnita hiperestática, y después se calculan los de empotramiento mediante la definición de momento flexionante. Empecemos pues, por dibujar el diagrama de cuerpo libre correspondiente al segmento BC, como se indica en la figura 7-10b. Como la reacción en cada extremo es de 1800 N, la fuerza cortante en el centro es nula, por lo que el diagrama de momento por partes tiene la forma indicada en la figura 7-10c. Como la variación de pendiente entre B y C es nula se tiene:

$$[EI\theta_{BC} = (\text{área})_{BC} = 0] \qquad 3M_B - \frac{1800 \times 2}{3} = 0 \qquad M_B = 400 \text{ N·m}$$

Aplicando la definición de momento flexionante, el momento en el empotramiento vale

$$[M_C = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_C = M_B - 1800 = 400 - 1800 = -1400 \text{ N·m} \qquad \textbf{Resp.}$$

La ordenada máxima se produce en el centro del claro y es numéricamente igual a la desviación de B con respecto a la tangente trazada en C. Con el valor ya conocido de $M_B = 400$ N · m, resulta

$$[EIt_{B/C} = (\text{área})_{BC} \cdot \bar{x}_B]$$

$$EIy = (400 \times 3)\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1800 \times 2}{3}\right)\left(1 + \frac{3}{4} \times 2\right)$$

$$= -1200 \text{ N·m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

El signo menos indica que la deflexión y tiene sentido hacia abajo.

PROBLEMAS

A menos que se diga lo contrario, se supone que los apoyos y empotramientos son indeformables. Pueden resolverse también, por el método del área de momentos, los problemas de la sección 7-3.

719. En la viga de la figura P-719 determinar la reacción R y el valor de $EI\delta$ en el centro.

Resp. $R = (5/16)P$; $EI\delta = (7/768)PL^3$

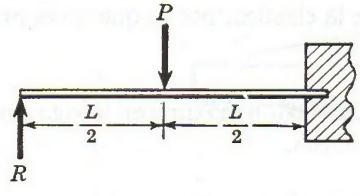


Figura P-719.

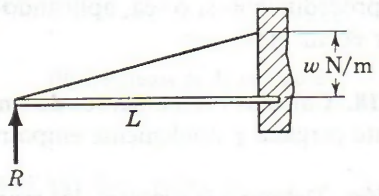


Figura P-720.

720. Calcular la reacción R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante en la viga de la figura P-720.

721. En la viga apoyada y empotrada de la figura P-721 determinar la reacción R y trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

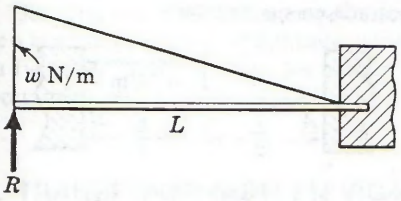


Figura P-721.

Resp. $R = (11/40)wL$

722. En la viga de la figura P-722 calcular la reacción R en el extremo apoyado y el momento de empotramiento. Comprobar el resultado obtenido haciendo $b = L$ y compararlo con el resultado del problema 706.

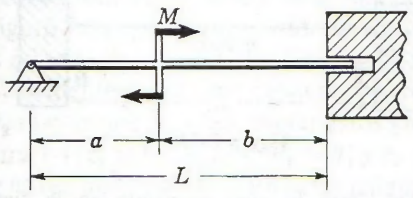


Figura P-722.

723. Hallar la reacción R y el momento de empotramiento en la viga de la figura P-723.

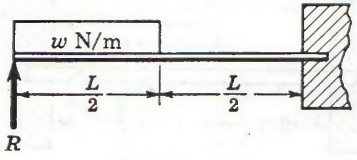


Figura P-723.

724. El empotramiento de la viga de la figura P-724 no es perfecto, de manera que el aplicar la carga uniforme w permite un cierto giro $wL^3/48EI$ de la sección empotrada. Si los apoyos están al mismo nivel, determinar R.

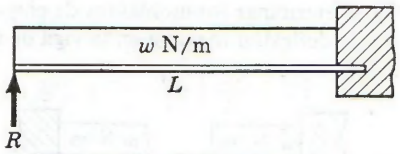


Figura P-724 y P-725.

Resp. $R = (7/16)wL$

725. Si el apoyo izquierdo de la viga del problema anterior sufre un asentamiento de valor δ, demostrar que la reacción en él experimenta una disminución igual a $3EI\delta/L^3$.

726. Una viga de longitud L, empotrada en sus dos extremos, soporta una carga concentrada P en el centro. Calcular los momentos de empotramiento y la deflexión máxima.

727. Repetir el problema 726 si en lugar de la carga concentrada se aplica una carga uniforme de w N/m sobre toda su longitud.

Resp. $M = -wL^2/12$; $EI\delta = wL^4/384$

728. Determinar los momentos de empotramiento y la deflexión en el centro en la viga doblemente empotrada de la figura P-728.

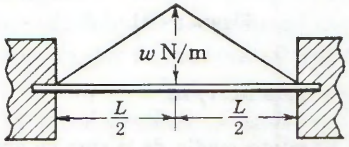


Figura P-728.

729. En la viga doblemente empotrada de la figura P-729 calcular los momentos de empotramiento y el máximo valor de $EI\delta$.

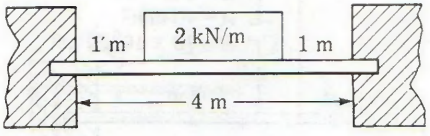


Figura P-729.

Resp. $M = -1830\ \text{N}\cdot\text{m}$;

$EI\delta = 1080\ \text{N}\cdot\text{m}^3$

730. Determinar los momentos de empotramiento y la deflexión máxima en la viga de la figura P-730.

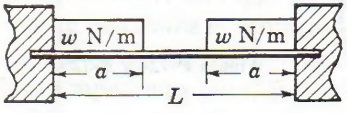


Figura P-730.

Resp. $M = -(wa^2/6L)(3L - 2a)$;
$EIy = -(wa^3/24)(L - a)$

731. La viga mostrada en la figura P-731 está conectada a una barra vertical. Si la viga se mantiene horizontal a una cierta temperatura determinar el incremento del esfuerzo en la barra si la temperatura en éste se abate 50°C. Tanto la viga como la barra están construidas de acero con $E = 200 \times 10^9$ N/m^2. Para la viga use $I = 60 \times 10^6$ mm^4.

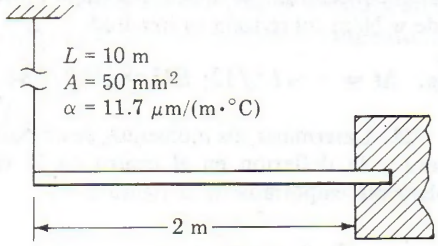


Figura P-731.

Resp. $\sigma = 95.8$ MN/m^2

732. El punto medio de la viga de acero de la figura P-732 está conectado a la barra vertical de aluminio. Determinar el valor máximo de P si el esfuerzo en la barra no ha de ser mayor que 150 MN/m^2.

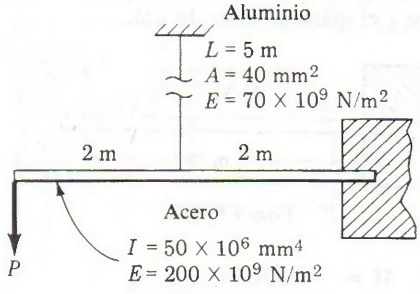


Figura P-732 y P-733.

733. Si se reemplaza la carga P del problema 732 por un par M en sentido contrario al del reloj, determinar el valor máximo de M si el esfuerzo en la barra vertical no ha de ser mayor que 100 MN/m^2.

Resp. $M = 41.1$ kN·m

734. Determinar los momentos de empotramiento en la viga de la figura P-734 perfectamente empotrada en sus extremos.

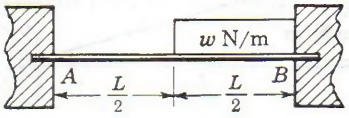


Figura P-734.

Resp. $M_A = -(5/192)wL^2$;
$M_B = -(11/192)wL^2$

735. La viga de la figura P-735 está perfectamente empotrada en A, pero sólo parcialmente empotrada en B, donde la pendiente vale $wL^3/48EI$, dirigida hacia arriba a la derecha. Calcular los momentos de empotramiento.

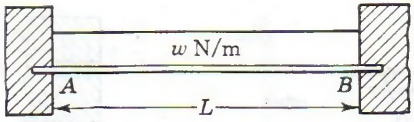


Figura P-735.

736. Para la viga mostrada en la figura P-736 calcular los valores de la fuerza cortante y del momento flexionante en los empotramientos, y bosqueje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

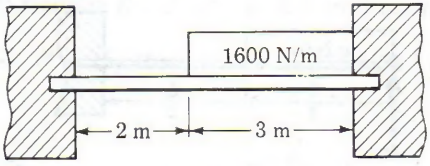


Figura P-736.

737. En la viga perfectamente empotrada de la figura P-737 el empotramiento B ha tenido un asentamiento vertical de valor Δ. Comprobar que $M_B = -M_A = 6EI\Delta/L^2$.

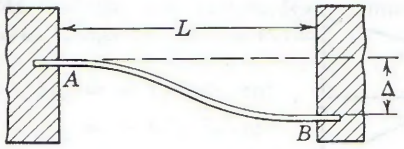


Figura P-737.

Resp. $M_A = \frac{Mb}{L}\left(\frac{3a}{L} - 1\right)$;

$M_B = -\frac{Ma}{L}\left(\frac{3b}{L} - 1\right)$

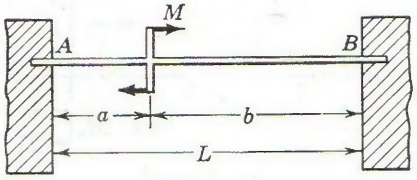


Figura P-738.

738. Una viga doblemente empotrada se somete a la acción de un par M aplicado como indica la figura P-738. Determinar los momentos de empotramiento.

7-5. TRANSFORMACIÓN EN VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON MOMENTOS EN LOS EXTREMOS

En general, en una viga doblemente empotrada se calculan fácilmente las reacciones tomando como hiperestáticas o redundantes la reacción vertical y el momento correspondiente a uno de los extremos. Sin embargo, a veces interesa considerar como hiperestáticos los dos momentos de empotramiento. Para ello, se considera la viga como simplemente apoyada en sus extremos y se somete no sólo a las cargas reales aplicadas, sino también a unos momentos desconocidos en sus extremos. Estos momentos han de tener un valor tal que produzcan en los extremos unos giros que, superpuestos a los que producen las cargas reales, reproduzcan las condiciones de sujeción de la viga primitiva. Así, pues, la viga doblemente empotrada de la figura 7-11a se puede considerar equivalente a la viga simplemente apoyada sometida a los dos estados de carga de las figuras 7-11b y c.

Evidentemente, una carga asimétrica como la de la figura 7-11b, da lugar a una pendiente θ_2 mayor que θ_1. Para anular estos giros al superponer los debidos al estado de carga de la figura 7-11c, se ha de tener $\theta_1 = \theta'_1$ y $\theta_2 = \theta'_2$, lo que requerirá que M_B sea mayor que M_A para que θ'_2 sea mayor que θ'_1. En otras palabras, *el momento de empotramiento mayor aparece en el extremo más próximo a la resultante de la carga, cuando ésta es de un solo tipo.*

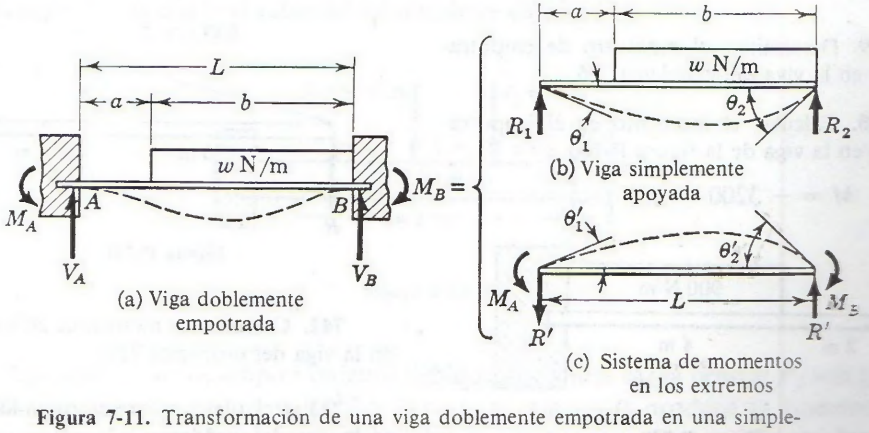


Figura 7-11. Transformación de una viga doblemente empotrada en una simplemente apoyada con la carga distribuida, y en otra con momentos en los extremos.

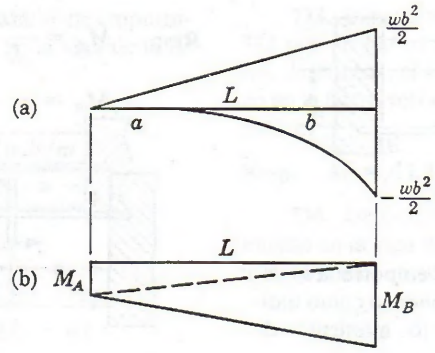


Figura 7-12. Diagramas de momentos para las vigas de las figuras 7-11b y 7-11c.

La diferencia entre los momentos M_B y M_A se equilibra por el par $R'L$ producido por las reacciones R' en los extremos de la viga en el sistema de cargas de la figura 7-11c. Superponiendo las reacciones de las figuras 7-11b y 7-11c se obtienen $V_A = R_1 - R'$ y $V_B = R_2 + R'$, como reacciones totales. Si la carga fuera simétrica, los ángulos θ_1 y θ_2 serían iguales, por lo que M_A y M_B también lo serían. En este caso no habrá par de reacciones R', por lo que las reacciones serán las mismas que las de la viga simplemente apoyada. Esto coincide con la observación hecha en el problema 718 con carga simétrica.

Al considerar como redundantes o hiperestáticos los momentos en los extremos, para trazar el diagrama de momentos por partes de la viga de la figura 7-11a hay que tener en cuenta los dos sistemas de carga de las figuras 7-11b y c, el diagrama adquiere la forma de la figura 7-12a y b. Aplicando $EI\theta_{AB} = 0$ y $EIt_{B/A} = 0$ se obtienen directamente M_A y M_B, mientras que V_A y V_B se determinan después por las ecuaciones de equilibrio estático.

PROBLEMAS

Considerar como reacciones hipérestáticas o redundantes los momentos en los empotramientos.

739. Determinar el momento de empotramiento en la viga del problema 705.

740. Calcular el momento en el empotra miento en la viga de la figura P-740.

Resp. $M = -3200$ N·m

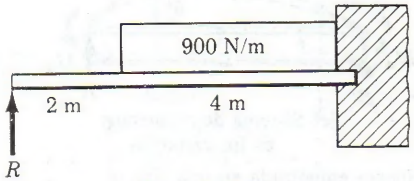


Figura P-740.

741. Determinar el momento en el empotramiento en la viga de la figura P-741.

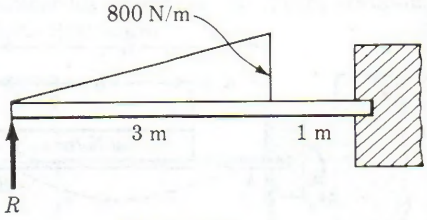


Figura P-741.

742. Calcular los momentos en los extremos en la viga del problema 710.

743. Calcular los momentos en los extremos en la viga del problema 712.

744. Calcular los momentos de empotramiento en la viga de la figura P-744.

Resp. $M_A = -1380\ \text{N}\cdot\text{m}$;
$M_B = -1820\ \text{N}\cdot\text{m}$

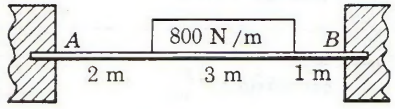


Figura P-744.

745. La viga doblemente empotrada de la figura P-745 soporta la carga uniformemente distribuida sobre parte de su claro, además del par indicado. Determinar los momentos de empotramiento.

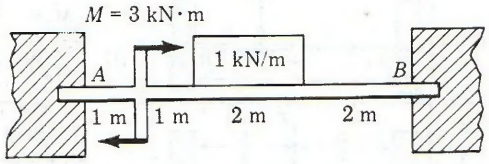


Figura P-745.

Resp. $M_A = -2700\ \text{N}\cdot\text{m}$;
$M_B = -2190\ \text{N}\cdot\text{m}$

7-6. DISEÑO DE VIGAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Aplicando los métodos estudiados en las secciones anteriores, se determinan los valores de los momentos de empotramiento y de las deflexiones máximas, en vigas doblemente empotradas sometidas a diversos tipos de cargas. Estos valores aparecen resumidos en la Tabla 7-2. En los problemas siguientes se verá cómo se aplica el método de superposición en la solución de problemas en los que intervengan otras cargas que sean combinaciones de los tipos que figuran en la tabla.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

746. Determinar el módulo resistente que ha de tener la viga de la figura 7-13 para soportar las cargas indicadas si el esfuerzo admisible es de $80\ \text{MN/m}^2$.

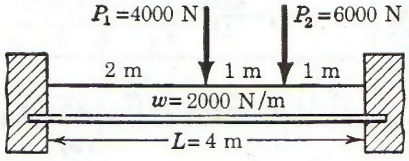
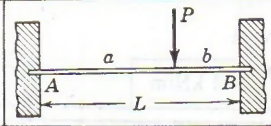
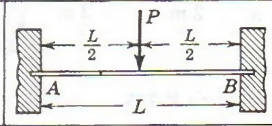
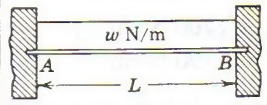
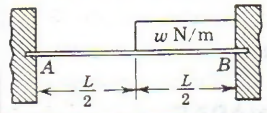
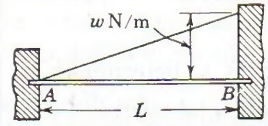
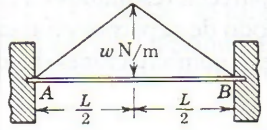
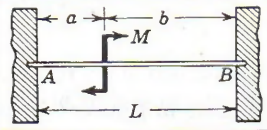
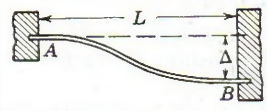


Figura 7-13.

Solución: Los momentos de empotramiento debidos a w y a la carga central P_1 son iguales por simetría y, como se vio en la sección 7-5, la carga excéntrica P_2 produce un momento mayor en el empotramiento más próximo, el derecho en nuestro caso. De acuerdo con los datos

TABLA 7-2. Vigas doblemente empotradas con diversos tipos de carga

CASO No.	TIPO DE CARGA	MOMENTOS EN LOS EXTREMOS	VALOR DE EIy (y es positiva hacia abajo)
1		$M_A = -\frac{Pab^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$	EIy en el centro $= \frac{Pb^2}{48}(3L-4b)$ Nota: sólo para $a>b$
2		$M_A = M_B = -\frac{PL}{8}$	EIy máximo $= \frac{PL^3}{192}$
3		$M_A = M_B = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{WL}{12}$	EIy máximo $= \frac{wL^4}{384} = \frac{WL^3}{384}$
4		$M_A = -\frac{5}{192}wL^2 = -\frac{5}{96}WL$ $M_B = -\frac{11}{192}wL^2 = -\frac{11}{96}WL$	EIy en el centro $= \frac{wL^4}{768} = \frac{WL^3}{384}$
5		$M_A = -\frac{wL^2}{30} = -\frac{WL}{15}$ $M_B = -\frac{wL^2}{20} = -\frac{WL}{10}$	EIy en el centro $= \frac{wL^4}{768} = \frac{WL^3}{384}$
6		$M_A = M_B = -\frac{5wL^2}{96} = -\frac{5WL}{48}$	EIy máximo $= \frac{7wL^4}{3840} = \frac{7WL^3}{1920}$
7		$M_A = \frac{Mb}{L}\left(\frac{3a}{L}-1\right)$ $M_B = -\frac{Ma}{L}\left(\frac{3b}{L}-1\right)$	
8		$M_A = -\frac{6EI\Delta}{L^2}$ $M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2}$	

de la Tabla 7-2, el máximo momento flexionante que tiene lugar en el empotramiento derecho es:

$$M_{\text{máx}} = -\frac{wL^2}{12} - \frac{P_1 L}{8} - \frac{P_2 a^2 b}{L^2}$$

$$= -\frac{2000(4)^2}{12} - \frac{4000(4)}{8} - \frac{6000(3)^2(1)}{(4)^2}$$

$$M_{\text{máx}} = -8040 \text{ N·m}$$

El signo negativo del momento indica que las fibras del borde superior de la sección están sometidas a tensión, lo que en una sección asimétrica, una T por ejemplo, tiene gran importancia. En una sección simétrica solamente interesa el valor numérico o absoluto del momento máximo. Por la fórmula de la flexión, el módulo resistente necesario es:

$$\left[S = \frac{M}{\sigma} \right] \qquad S = \frac{8040}{80 \times 10^6} = 100.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$= 100.5 \times 10^3\ \text{mm}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

747. Seleccionar un perfil laminado para soportar las cargas de la viga de la figura 7-14 sin sobrepasar un esfuerzo admisible de 120 MPa. Calcular la deflexión máxima siendo E = 200 GPa.

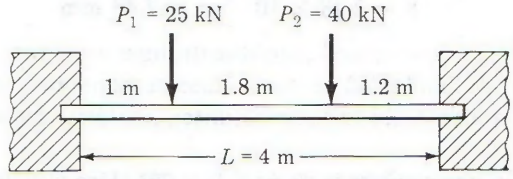


Figura 7-14

Solución: Como la carga es asimétrica y compuesta no se sabe a priori en qué extremo aparecerá el momento máximo, por lo que se han de calcular los momentos de los dos empotramientos. En el extremo izquierdo se tiene:

$$M_{\text{izq}} = -\frac{P_1 ab^2}{L^2} - \frac{P_2 ab^2}{L^2}$$

$$= -\frac{(25)(1)(3)^2}{(4)^2} - \frac{(40)(2.8)(1.2)^2}{(4)^2} = -24.14\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

y en el extremo derecho,

$$M_{\text{der}} = -\frac{P_1 a^2 b}{L^2} - \frac{P_2 a^2 b}{L^2}$$

$$= -\frac{(25)(1)^2(3)}{(4)^2} - \frac{(40)(2.8)^2(1.2)}{(4)^2} = -28.21\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Sustituyendo el mayor valor hallado en la fórmula de la flexión resulta:

$$\left[S = \frac{M}{\sigma} \right] \qquad S = \frac{28.21 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 235 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 = 235 \times 10^3\ \text{mm}^3$$

Una sección apropiada puede ser un perfil W200 × 27 con $S = 249 \times 10^3$ mm^3 e $I = 25.8 \times 10^6$ mm^4 $= 25.8 \times 10^{-6}$ m^4. Según la tabla 7-2, el valor de la deflexión en el centro* es

$$EIy = \sum \frac{Pb^2}{48}(3L - 4b)$$

$$EIy = \frac{(25)(1)^2}{48}[3(4) - 4(1)] + \frac{(40)(1.2)^2}{48}[3(4) - 4(1.2)]$$

$$EIy = 12.81 \text{ kN}\cdot\text{m}^3$$

Sustituyendo los valores de E e I resulta:

$$(200 \times 10^9)(25.8 \times 10^{-6})y = (12.81 \times 10^3)$$

de donde

$$y = 2.48 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.48 \text{ mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

748. Una viga doblemente empotrada de 6 m de longitud soporta una carga concentrada de 30 kN a 2 m del extremo izquierdo y otra de 50 kN a 1.5 m del derecho. Elegir un perfil apropiado para soportar estas cargas sin exceder un esfuerzo de 120 MPa. Calcular la deflexión en el centro si $E = 200$ GN/m^2.

Resp. W360 × 33; $\delta = 3.21$ mm

749. Una viga de madera de 150 mm de ancho por 300 mm de altura y 6 m de longitud está perfectamente empotrada en sus extremos. Soporta una carga uniforme de 4 kN/m sobre todo su claro y una carga concentrada P a 2.5 m del extremo izquierdo. Calcular P si el esfuerzo admisible es de 10 MN/m^2 y la deflexión en el centro no debe sobrepasar 1/360 del claro. $E = 10$ GN/m^2.

750. Una viga de acero W200 × 36 de 5 m de longitud y empotrada en sus extremos, soporta una carga concentrada de 20 kN a 1 m del extremo izquierdo y otra de 30 kN a 2 m del extremo derecho. Calcular el máximo esfuerzo normal y la deflexión en el centro. Despreciar el peso propio de la viga y emplear $E = 200$ GPa.

751. Una viga de madera de sección rectangular soporta las cargas indicadas en la figura P-751. Determinar la sección necesaria si el esfuerzo admisible es de 10 MN/m^2. Calcular el valor del esfuerzo cortante máximo.

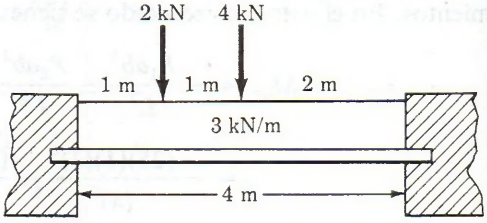


Figura P-751.

752. Con los datos de la tabla 7-2 comprobar los valores de los momentos de empotramiento y la deflexión en el centro de la viga del problema 713.

753. Una viga de madera de 100 mm de ancho por 150 mm de altura soporta las cargas de la figura P-753. Calcular el esfuerzo cortante máximo.

* Al calcular la deflexión en el centro producida por una carga concentrada, el término b es el menor de los segmentos que la carga determina sobre la viga.

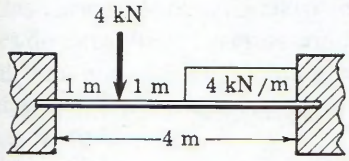


Figura P-753 y P-754

754. En el problema anterior, calcular el esfuerzo normal máximo si el empotramiento derecho sufre un asentamiento de 20 mm con respecto al extremo izquierdo, pero sin rotación alguna. $E = 10 \times 10^9$ N/m^2.

Resp. $\sigma = 16.1$ MN/m^2

755. Una viga de acero, *S*130 × 22, la cual tiene 4 m de longitud, soporta una carga uniformemente variable desde cero, en el extremo izquierdo, hasta 15 kN/m en el derecho. La viga está perfectamente empotrada, pero el extremo derecho se asienta 10 mm respecto del izquierdo. Calcular la relación entre los esfuerzos máximos de flexión en esta situación con respecto a aquella en que los empotramientos estuvieron al mismo nivel. Utilice $E = 200$ GPa.

Resp. 1.06

RESUMEN

Los principios estudiados en el capítulo anterior, relativos a la deformación de vigas, se aplican en este capítulo para obtener las ecuaciones de deformación adicionales que, junto con las ecuaciones de equilibrio estático, permiten resolver los problemas estáticamente indeterminados.

En vigas con un extremo empotrado y el otro apoyado se suele aplicar la condición de que la deflexión en el apoyo, restricción redundante, es nula si el apoyo no puede ceder, o de valor conocido si el apoyo puede hacerlo. Para vigas empotradas en sus dos extremos la variación de pendiente de la elástica, de extremo a extremo, es nula, y la deflexión de cada apoyo, respecto del otro, también lo es.

El método de superposición suele ser el más fácil de aplicar en la determinación de la reacción sobrante en el apoyo en el caso de vigas empotradas y apoyadas. Es también el mejor método para el cálculo de los momentos de empotramiento (restricciones hiperestáticas) en el caso de que las cargas sean de los tipos que indica la Tabla 7-2, o combinaciones de ellas.

Para aplicar el método de la doble integración o el de las áreas de momentos se suelen tomar como reacciones redundantes o hiperestáticas la fuerza cortante y el momento flexionante, en uno de los empotramientos. Ambos métodos son igualmente sencillos de aplicar. El método de la doble integración es puramente analítico y proporciona tanto la ecuación de la elástica como los valores de las magnitudes hiperestáticas. El método de las áreas de momentos es de más rápida aplicación para el cálculo de las reacciones, pero requiere un cálculo adicional para determinar los valores de las deflexiones.

En la sección 7-5 se estudia la transformación de una viga doblemente empotrada en una simplemente apoyada con dos estados de carga, el de las cargas aplicadas y otro con los dos momentos en los extremos (momentos desconocidos), transformación que resulta interesante para ver a priori en qué empotramiento aparecerá el momento máximo. Esto es muy útil para aplicar el método de las áreas de momentos a las vigas continuas, como se verá en el próximo capítulo. También servirá de base para un procedimiento muy rápido de trazar el diagrama de fuerzas cortantes, que también se estudia en el siguiente capítulo.

8
vigas continuas

8-1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudian en detalle las vigas continuas con tres o más apoyos, dos o más tramos o claros, y que, por tanto, disponen de uno o más apoyos redundantes en los que las reacciones no pueden determinarse por las ecuaciones de la estática. Es posible calcular los valores de estas reacciones hiperestáticas aplicando las condiciones de deformación existentes, de acuerdo con las ecuaciones de deformación del Capítulo 6, por ejemplo, deflexión nula en los apoyos cuyas reacciones son desconocidas. Estas condiciones dan las ecuaciones necesarias adicionales a las del equilibrio estático. Sin embargo, es más conveniente considerar como desconocidos o hiperestáticos, los momentos flexionantes en los apoyos. Una vez determinados estos momentos, que se suelen llamar *momentos de continuidad*, es sumamente sencillo el cálculo de las reacciones, como se verá en la sección 8-5.

Se explican dos métodos de cálculo de tales momentos. En el primer método se comienza obteniendo una relación de tipo general entre los momentos flexionantes en tres secciones cualesquiera de la viga, relación que se llama *ecuación de los tres momentos,* y que se escribe fácilmente aplicando los teoremas de las áreas de momentos. Las aplicaciones de esta ecuación son numerosas; con ella pueden resolverse todos los problemas de los Capítulos 6 y 7, así como determinar las deformaciones y reacciones redundantes en cualquier tipo de vigas, en particular en las vigas continuas. En muchos casos se puede aplicar junto con los teoremas de las áreas de momentos o con el método de la doble integración, como se tendrá ocasión de ver y aplicar.

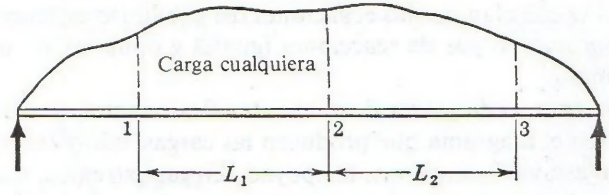
El segundo método es el de la *distribución de momentos*, que se explica y desarrolla en la sección 8-8. Este método es independiente del anterior, aunque la determinación del diagrama de fuerza cortante y de las reacciones sea común para ambos. Para aplicar este método se empieza suponiendo que cada tramo o claro está perfectamente empotrado en sus extremos y se determinan los momentos de empotramiento perfecto. En la mayoría de los ca-

sos, las cargas sobre cada claro son de los tipos que aparecen en la Tabla 7-2 o combinaciones de estos tipos. En estas condiciones, los momentos de empotramiento perfecto (*MEP*) se calculan por superposición o se toman directamente de la tabla. Para tipos más complejos de cargas, y si no se dispone de una tabla que contenga más casos, es preferible emplear el primer método.

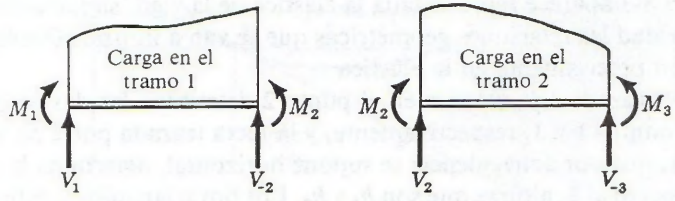
8-2. FORMA GENERALIZADA DE LA ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

En la figura 8-1a se representa parte de una viga sometida a una carga cualquiera y soportada de forma arbitraria. Cortemos la viga por tres puntos cualesquiera 1, 2 y 3 y sustituyamos el efecto de las cargas y fuerzas a la derecha o a la izquierda de cada sección de corte por la fuerza cortante y momento flexionante (Sec. 4-3). En la figura 8-1b se representan los diagramas de cuerpo libre correspondientes a los tramos o segmentos de viga entre las secciones 1 y 2 y entre las 2 y 3 que, en adelante, se llamarán tramo 1 y tramo 2, respectivamente. Las longitudes de los tramos son L_1 y L_2 y los momentos flexionantes en 1, 2 y 3 son M_1, M_2 y M_3, que, según la sección 4-3 y tal como están dibujados, son los tres positivos, de donde el sentido de las flechas es el indicado (del reloj, a la izquierda, y contrario al del reloj, a la derecha del tramo). Las fuerzas cortantes en estos puntos son V_1, V_{-2} (justo a la izquierda del punto 2), V_2 (justo a la derecha del punto 2) y V_{-3} (justo a la izquierda del punto 3). Las fuerzas V_{-2} y V_2 no tienen que ser iguales en general, pues sus valores dependen naturalmente de lo que haya en el punto 2. De acuerdo con la sección 4-3, y puesto que en un extremo izquierdo se ha de poner la fuerza cortante real y en el derecho la resistente, tal como están dibujadas las flechas, V_1 y V_2 son fuerzas cortantes positivas, mientras que V_{-2} y V_{-3} son fuerzas cortantes negativas.

El procedimiento estudiado en la sección 7-5 proporciona el medio para transformar cada uno de estos tramos en una viga simplemente apoyada con dos estados de carga; por un lado la carga real del tramo y por otro los pares aplicados en sus extremos. En las figuras



(a) Diagrama de cargas



(b) Diagramas de cuerpo libre de cada tramo

Figura 8-1. Carga general en una viga cualquiera.

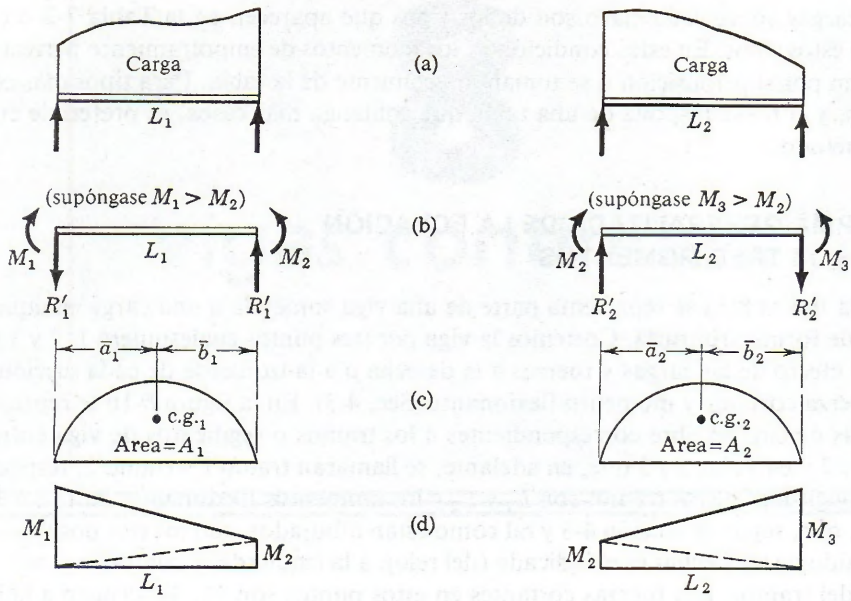


Figura 8-2. Análisis del estado inicial de carga. (a) Las cargas sobre una viga simplemente apoyada. (b) Estado de cargas producido por los momentos de continuidad en la misma viga (a). (c) Diagrama de momentos del estado de cargas (a). (d) Diagrama de momentos del estado de cargas (b).

8-2a y 8-2b se representan estos dos estados de carga, para los dos tramos, cuya superposición reproduce el estado supuesto en los diagramas de cuerpo libre de la figura 8-1b. Las fuerzas cortantes en los extremos de cada tramo serán, para el extremo izquierdo, igual a la suma de las reacciones de los dos estados, y para el extremo derecho igual numéricamente, pero de signo contrario. Las reacciones del primer estado (cargas reales sobre el claro, que se considera apoyado) se calculan por las ecuaciones del equilibrio estático, y lo mismo para las del segundo, que forman un par de reacciones iguales y opuestas R' que equilibran el par $M_1 - M_2$, por ejemplo.

En estas condiciones, el diagrama de momentos flexionantes en cada tramo de la viga se resuelve por partes en el diagrama que producen las cargas existentes sobre el tramo, suponiendo que el tramo estuviera simplemente apoyado en sus extremos, más el diagrama trapezoidal producido por los pares aplicados en los extremos de la misma viga, tal como se indica perfectamente en las figuras 8-2c y 8-2d.

En la figura 8-3 aparece representada la elástica de la viga, sumamente exagerada, para ver con más claridad las relaciones geométricas que se van a utilizar. Obsérvese que los puntos 1, 2 y 3 están precisamente en la elástica.

La tangente trazada a la elástica en el punto 2 determina las desviaciones tangenciales $t_{1/2}$ y $t_{3/2}$ de los puntos 1 y 3, respectivamente, y la recta trazada por 2 paralela a la posición inicial de la viga, que por conveniencia se supone horizontal, determina la altura de los puntos 1 y 3 con respecto al 2, alturas que son h_1 y h_3. Los dos triángulos sombreados en la figura tienen por bases L_1 y L_2 y por alturas $(h_1 - t_{1/2})$ y $(t_{3/2} - h_3)$, y por ser semejantes resulta obvio que:

$$\frac{h_1 - t_{1/2}}{L_1} = \frac{t_{3/2} - h_3}{L_2}$$

lo que se reduce a

$$\frac{t_{1/2}}{L_1} + \frac{t_{3/2}}{L_2} = \frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \qquad (a)$$

Los valores de las desviaciones tangenciales vienen dados por:

$$t_{1/2} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{1-2} \cdot \bar{x}_1$$

y

$$t_{3/2} = \frac{1}{EI}(\text{área})_{3-2} \cdot \bar{x}_3$$

siendo $(\text{área})_{1-2} \cdot \bar{x}_1$ el momento del área del diagrama de momentos flexionantes entre los puntos 1 y 2 respecto del punto 1. Como se estableció previamente, el diagrama de momentos flexionantes se había descompuesto en el área A_1 (Fig. 8-2c) y las dos áreas triangulares en que se descompone el área trapezoidal producida por los dos pares extremos (Fig 8-2d). Lo mismo pasa con $(\text{área})_{3-2} \cdot \bar{x}_3$, que es el momento del área de momentos entre los puntos 2 y 3 respecto del punto 3, y que se descompone de forma similar.

En estas condiciones ya se puede expresar el valor de la desviación del punto 1 con respecto a la tangente en 2; viene dada por:

$$t_{1/2} = \frac{1}{EI}\left[A_1\bar{a}_1 + \frac{1}{2}M_1L_1 \times \frac{1}{3}L_1 + \frac{1}{2}M_2L_1 \times \frac{2}{3}L_1\right] \qquad (b)$$

y la desviación tangencial de 3 respecto de la misma tangente en 2,

$$t_{3/2} = \frac{1}{EI}\left[A_2\bar{b}_2 + \frac{1}{2}M_2L_2 \times \frac{2}{3}L_2 + \frac{1}{2}M_3L_2 \times \frac{1}{3}L_2\right] \qquad (c)$$

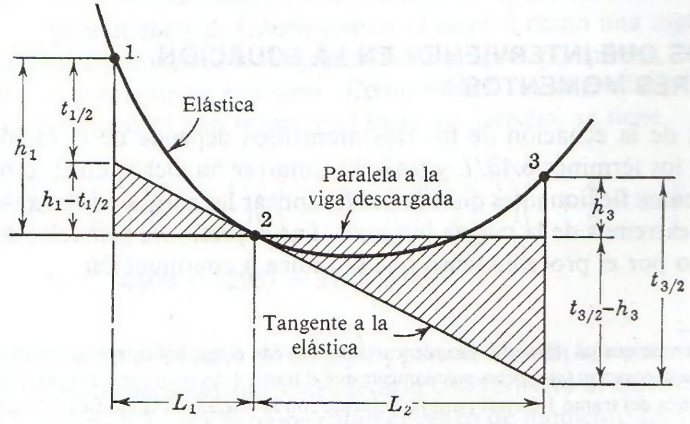


Figura 8-3. Elástica de una viga cualquiera.

Sustituyendo estos valores en la ecuación (*a*) y simplificando,

$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}\right) \tag{8-1}$$

Esta ecuación expresa una relación general entre los momentos flexionantes en tres puntos cualesquiera de la viga, razón por la cual se llama *ecuación de los tres momentos.**

Si los puntos 1, 2 y 3 están al mismo nivel en la viga deformada, las alturas h_1 y h_3 de la figura 8-3 se anulan, y lo mismo ocurre en el segundo miembro de la ecuación (8-1). Esta suele ser la condición normal de aplicación de la ecuación de los tres momentos a la determinación de los momentos de continuidad. Los tres puntos que se escogen para aplicar la ecuación a una viga continua son tres apoyos, que se suelen suponer rígidos o situados a la misma altura, y entonces mediante la ecuación se determinan los momentos en dichos apoyos.

Si se quiere aplicar la ecuación de los tres momentos para calcular las ordenadas de la elástica, se consideran dos de los puntos sobre dos apoyos y el tercero en el punto donde se quiere hallar la ordenada. En este caso, evidentemente, es necesario calcular de antemano los valores de los momentos en los tres puntos. En la sección 8-7 se verá con más detalle esta forma de aplicación de la ecuación de los tres momentos.

Regla de signos

En la deducción de la ecuación (8-1) se ha hecho la hipótesis de que los momentos flexionantes en los tres puntos son positivos y que los puntos 1 y 3 estaban situados por encima del punto 2. Si el momento flexionante en cualquiera de los puntos es negativo habrá que considerarlo con signo menos al sustituir su valor en la ecuación. Recíprocamente, si al resolver la ecuación sale un valor negativo para cualquiera de los momentos, es que en realidad es negativo. Las alturas h_1 y h_3 son positivas si los puntos 1 y 3 quedan por encima del 2, y son negativos, o se obtendrán con signo menos, si el punto 1 o el 3 está por debajo del punto 2.

8-3. TÉRMINOS QUE INTERVIENEN EN LA ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

La utilidad de la ecuación de los tres momentos depende de la facilidad con que se puedan calcular los términos $6A\bar{a}/L$ y $6A\bar{b}/L$. Como se ha dicho, estos términos se refieren al área de momentos flexionantes que resulta de aplicar las cargas en el tramo sobre una viga apoyada en sus extremos de la misma longitud. Las expresiones generales de la Tabla 8-1 se han determinado por el procedimiento que se indica a continuación.

---

* **N. de T.** Obsérvese que las relaciones geométricas utilizadas dan el nombre de *momentos de continuidad* citado en la sección 8-1, ya que la ecuación (*a*) expresa precisamente que el tramo 1-2 y el tramo 2-3 tienen el punto 2 común, y que la tangente a la elástica del tramo 1-2 en el punto 2 coincide con la tangente a la elástica del tramo 2-3 trazada por 2 también. Estas dos condiciones de igual ordenada e igual pendiente son las condiciones de continuidad de la curva elástica en un punto.

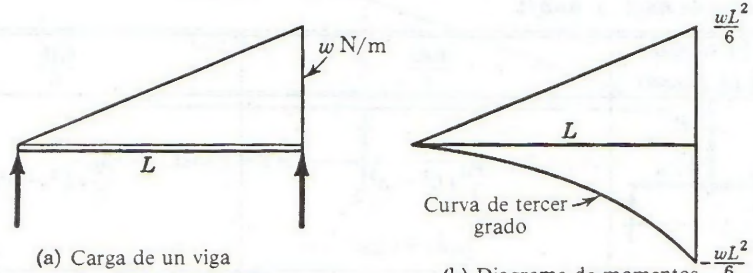


Figura 8-4. Carga uniformemente variable.

Caso 3. Carga uniformemente variada

La carga sobre un tramo de la viga continua varía uniformemente. Suponiendo el tramo apoyado en sus extremos, en la figura 8-4b se tiene el diagrama de momentos por partes, trazado de izquierda a derecha. El momento del área de este diagrama de momentos con respecto al extremo derecho viene dado por

$$A\bar{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{wL^2}{6}\cdot L\right)\left(\frac{1}{3}L\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{wL^2}{6}\cdot L\right)\left(\frac{1}{5}L\right) = \frac{wL^4}{6}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{20}\right) = \frac{7}{360}wL^4$$

Multiplicando por $6/L$ se obtiene el siguiente valor general para este tipo de carga,

$$\frac{6A\bar{b}}{L} = \frac{7}{60}wL^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

Cargas especiales

Para casos que no figuren en la Tabla 8-1, o cuando no se dispone de la tabla, el siguiente ejemplo puede servir de guía.

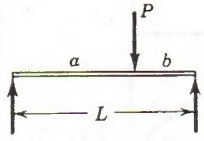
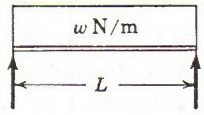
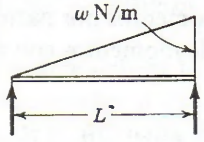
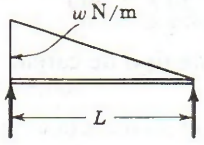
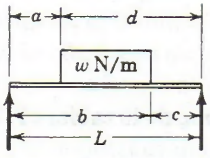
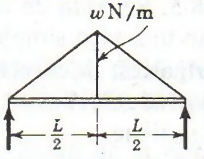
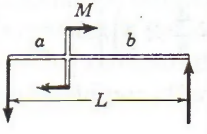
Supóngase una viga continua cargada como indica la figura 8-5. Se trata de calcular el valor de $6A_2\bar{b}_2/L_2$ para el claro 2. Consideremos el claro 2 como una viga simplemente apoyada en sus extremos, y tracemos el diagrama de momentos por partes, de derecha a izquierda, por ser más conveniente en este caso. Como $6A\bar{b}/L$ es el producto de $6/L$ por el momento del área de momentos con respecto al extremo derecho, se tiene

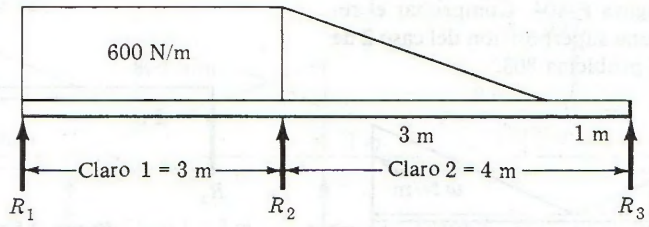
$$\frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = \frac{6}{4}\left[\left(\frac{900\times 4}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times 4\right) - \left(\frac{900\times 3}{4}\right)\left(1 + \frac{4}{5}\times 3\right)\right]$$

$$= \frac{6}{4}(4800 - 2295) = 3758\ \text{N}\cdot\text{m}^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

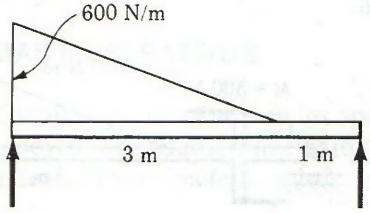
Si fuera necesario calcular el valor de $6A_2\bar{a}_2/L_2$ para el claro 2, la notación indica que el momento del área de momentos hay que considerarlo con respecto al extremo izquierdo ya que, como indica la figura 8-2c, $\bar{a}$ y $\bar{b}$ representan el brazo de momento medido respectivamente desde los extremos izquierdo y derecho del claro, respectivamente.

TABLA 8-1. Valores de $A\bar{a}/L$ y $6A\bar{b}/L$

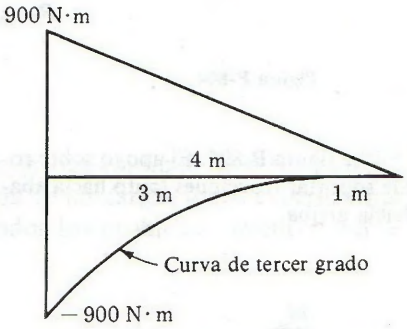
CASO No.	TIPO DE CARGA SOBRE EL TRAMO	$\frac{6A\bar{a}}{L}$	$\frac{6A\bar{b}}{L}$
1		$\frac{Pa}{L}(L^2 - a^2)$	$\frac{Pb}{L}(L^2 - b^2)$
2		$\frac{wL^3}{4} = \frac{WL^2}{4}$	$\frac{wL^3}{4} = \frac{WL^2}{4}$
3		$\frac{8}{60}wL^3 = \frac{8}{30}WL^2$	$\frac{7}{60}wL^3 = \frac{7}{30}WL^2$
4		$\frac{7}{60}wL^3 = \frac{7}{30}WL^2$	$\frac{8}{60}wL^3 = \frac{8}{30}WL^2$
5		$\frac{w}{4L}[b^2(2L^2 - b^2) - a^2(2L^2 - a^2)]$	$\frac{w}{4L}[d^2(2L^2 - d^2) - c^2(2L^2 - c^2)]$
6		$\frac{5}{32}wL^3 = \frac{5}{16}WL^2$	$\frac{5}{32}wL^3 = \frac{5}{16}WL^2$
7		$-\frac{M}{L}(3a^2 - L^2)$	$+\frac{M}{L}(3b^2 - L^2)$



(a) Viga continua



(b) Carga sobre el tramo 2 simplemente apoyado



(c) Diagrama de momentos por partes

Figura 8-5. Cálculo de $6A_2\bar{b}_2/L_2$ para una carga especial.

PROBLEMAS

Calcular los valores de $6A\bar{a}/L$ y $6A\bar{b}/L$ en cada uno de los problemas 801 a 810 que representan claros de una viga continua con diferentes condiciones de carga.

801. Véase figura P-801. Confrontar el resultado obtenido poniendo $a = L/2$ y compararlo con el caso 2 de la Tabla 8-1.

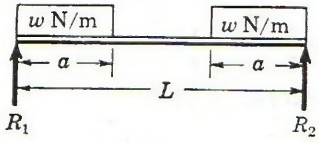


Figura P-801.

Resp. $\frac{1}{2}wa^2(3L - 2a)$

802. Véase figura P-802. Para $b = L/2$, comparar con el resultado del caso 2 de la Tabla 8-1.

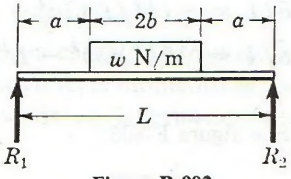


Figura P-802.

803. Véase figura P-803.

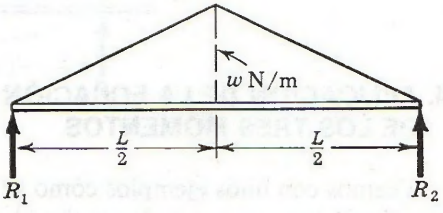


Figura P-803.

Resp. $\frac{5}{32}wL^3$

804. Véase figura P-804. Comprobar el resultado mediante una superposición del caso 2 de la Tabla 8-1 y del problema 803.

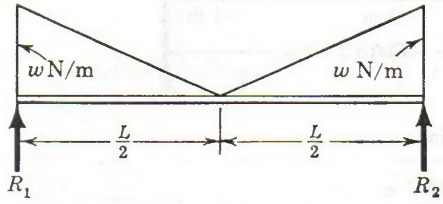


Figura P-804.

805. Véase figura P-805. El apoyo sobre rodillos puede soportar reacciones tanto hacia abajo como hacia arriba.

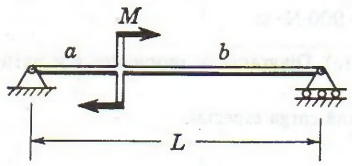


Figura P-805.

Resp. $6A\bar{a}/L = -(M/L)(3a^2 - L^2)$;
$6A\bar{b}/L = (M/L)(3b^2 - L^2)$

806. Véase figura P-806.

Resp. $6A\bar{a}/L = 5436\ \text{N} \cdot \text{m}^2$;
$6A\bar{b}/L = 4014\ \text{N} \cdot \text{m}^2$

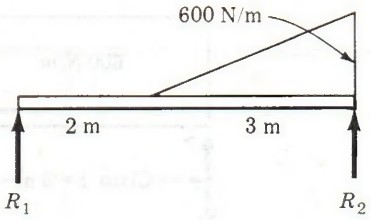


Figura P-806.

807. Véase figura P-807. Resolverlo por superposición de los casos de los problemas 805 y 806.

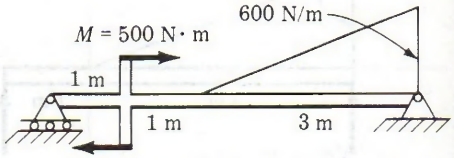


Figura P-807 y **P-808.**

808. Resolver el problema anterior si el par se aplica en sentido inverso.

809. Véase figura P-809.

Resp. $6A\bar{a}/L = 6648\ \text{N} \cdot \text{m}^2$

810. Resolver el problema anterior si el par se aplica en sentido contrario al del reloj.

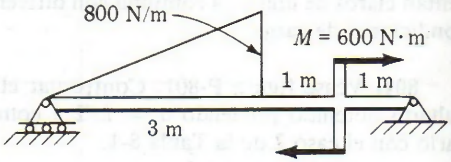


Figura P-809 y **P-810.**

8-4. APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

Veamos con unos ejemplos cómo se aplica la ecuación de los tres momentos a la determinación de los momentos de continuidad en los apoyos de una viga continua. En secciones siguientes se muestra la determinación de las reacciones a partir de los momentos hallados. Por último, se indica un método muy rápido para trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

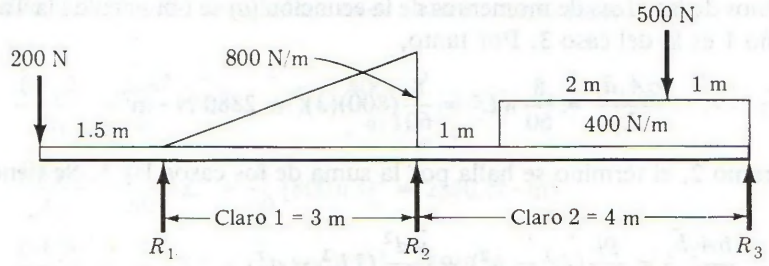


Figura 8-6.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

811. Calcular los momentos en los apoyos en la viga continua de la figura 8-6. Se supone que los apoyos son rígidos, o que bajo la acción de las cargas todos experimentan el mismo asentamiento. Esta hipótesis se aplicará a todos los problemas mientras no se diga lo contrario.

Solución: Apliquemos la ecuación de los tres momentos a los puntos sobre los apoyos. Como los tres están al mismo nivel, las alturas h_1 y h_3 son nulas, y la ecuación (8-1) se escribe en la forma:

$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = 0 \qquad (a)$$

El momento flexionante en el apoyo 1, producido por la carga a la izquierda de R_1, es $M_1 = -200 \times 1.5 = -300\ \text{N} \cdot \text{m}$, mientras que en el apoyo R_3 el momento M_3 es nulo. El signo menos de M_1 se debe mantener al sustituir su valor en la ecuación de los tres momentos*.

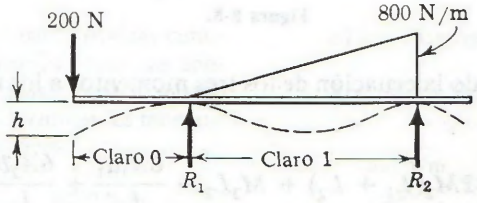


Figura 8-7.

* Se comete frecuentemente el error de aplicar la ecuación de los tres momentos en la forma (*a*) entre el voladizo y el claro 1, como se indica en la figura 8-7, olvidando que la carga de 200 N en el extremo lo deforma hacia abajo una cantidad desconocida *h*. En estas condiciones, el segundo miembro de la ecuación general de los tres momentos no es nulo, pues contiene el término desconocido *h*. Ahora bien, si se conocen M_1 y M_2 se puede aplicar la ecuación general precisamente para determinar la altura desconocida *h*, como se ve en el problema 858.

Los términos de las áreas de momentos de la ecuación (*a*) se obtienen de la Tabla 8-1. La carga del tramo 1 es la del caso 3. Por tanto,

$$\frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} = \frac{8}{60}wL^3 = \frac{8}{60}(800)(3)^3 = 2880 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \qquad (b)$$

Para el tramo 2, el término se halla por la suma de los casos 1 y 5. Se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} &= \frac{Pb}{L}(L^2 - b^2) + \frac{wd^2}{4L}(2L^2 - d^2) \\ &= \frac{(500)(1)}{4}\left[(4)^2 - (1)^2\right] + \frac{400(3)^2}{4(4)}\left[2(4)^2 - (3)^2\right] \\ &= 1875 + 5175 = 7050 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \end{aligned} \qquad (c)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (*a*) resulta:

$$-300(3) + 2M_2(3 + 4) + 2880 + 7050 = 0$$

de donde se obtiene:

$$M_2 = -\frac{9030}{14} = -645 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textbf{Resp.}$$

812. Determinar los momentos en los apoyos en la viga continua de la figura 8-8.

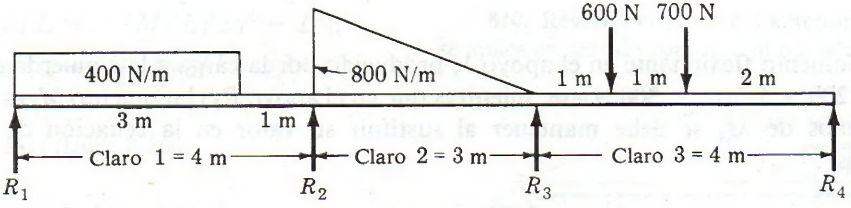


Figura 8-8.

Preliminares: Aplicando la ecuación de los tres momentos a los tramos 1 y 2 y después a los claros 2 y 3 se tiene:

$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = 0 \qquad (a)$$

$$M_2L_2 + 2M_3(L_2 + L_3) + M_4L_3 + \frac{6A_2\bar{a}_2}{L_2} + \frac{6A_3\bar{b}_3}{L_3} = 0 \qquad (b)$$

De acuerdo con la definición de momento flexionante, M_1 y M_4 son nulos, por lo que las ecuaciones (*a*) y (*b*) forman un sistema con dos incógnitas M_2 y M_3, que puede resolverse si se conocen los valores de $6A\bar{a}/L$ y $6A\bar{b}/L$ para cada tramo, correspondientes a las cargas da-

das. Utilizando la Tabla 8-1 se calculan estos valores como sigue:

$$\frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} = \frac{wb^2}{4L}(2L^2 - b^2) = \frac{400(3)^2}{4(4)}[2(4)^2 - (3)^2] = 5175 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$\frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = \frac{8}{60}wL^3 = \frac{8}{60}(800)(3)^3 = 2880 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$\frac{6A_2\bar{a}_2}{L_2} = \frac{7}{60}wL^3 = \frac{7}{60}(800)(3)^3 = 2520 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$\frac{6A_3\bar{b}_3}{L_3} = \sum \frac{Pb}{L}(L^2 - b^2)$$

$$= \frac{600(3)}{4}[(4)^2 - (3)^2] + \frac{700(2)}{4}[(4)^2 - (2)^2]$$

$$= 3150 + 4200 = 7350 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Solución: Sustituyendo los valores calculados en las ecuaciones (*a*) y (*b*):

$$2M_2(4 + 3) + 3M_3 + 5175 + 2880 = 0$$

$$3M_2 + 2M_3(3 + 4) + 2520 + 7350 = 0$$

Simplificando:

$$14M_2 + 3M_3 + 8055 = 0 \qquad (c)$$

$$3M_2 + 14M_3 + 9870 = 0 \qquad (d)$$

Resolviendo el sistema se obtiene $M_2 = -445 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $M_3 = -610 \text{ N} \cdot \text{m}$ **Resp.**

PROBLEMAS

Si no se indica lo contrario, las vigas continuas de los problemas siguientes tienen sus apoyos sobre cimentaciones rígidas y están al mismo nivel. En cada problema, determinar los momentos de continuidad en los apoyos.

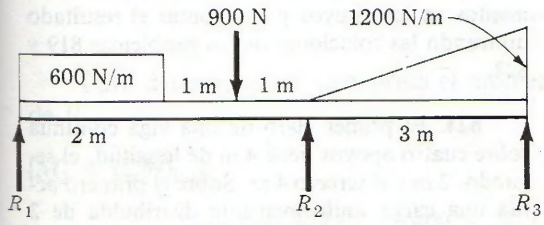


Figura P-813.

813. Véase figura P-813.

814. Véase figura P-814.

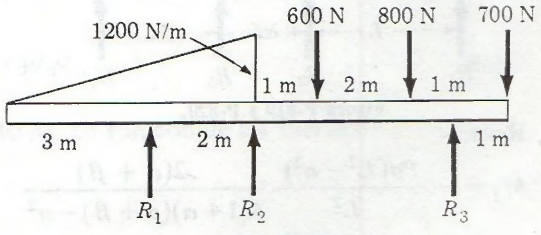


Figura P-814.

Resp. $M_2 = -262 \text{ N} \cdot \text{m}$

815. Determinar las longitudes de los voladizos en la viga continua de la figura P-815, de manera que los momentos, en los tres apoyos sean iguales.

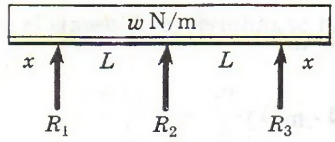


Figura P-815 y P-816.

Resp. $x = L/\sqrt{6}$

816. Resolver el problema anterior si uno de los claros tiene una longitud de tres cuartas partes de la del otro.

817. Véase figura P-817.

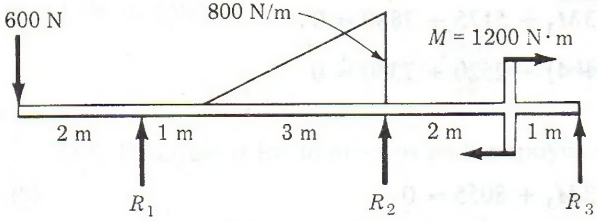


Figura P-817 y P-818.

818. En el problema anterior determinar el valor del par M aplicado de manera que el momento M_2 se anule.

Resp. $M = 105$ N · m en el sentido del reloj.

819. Véase la figura P-819.

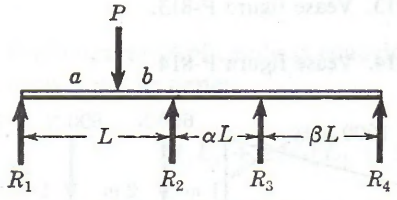


Figura P-819 y P-820.

Resp.

$$M_2 = -\frac{Pa(L^2-a^2)}{L^2}\cdot\frac{2(\alpha+\beta)}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}$$

$$M_3 = +\frac{Pa(L^2-a^2)}{L^2}\cdot\frac{\alpha}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}$$

820. Resolver el problema anterior si la carga concentrada se sustituye por una uniformemente repartida sobre el primer claro de w N/m.

Resp.

$$M_2 = -\frac{wL^2}{4}\cdot\frac{2(\alpha+\beta)}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}$$

$$M_3 = +\frac{wL^2}{4}\cdot\frac{\alpha}{4(1+\alpha)(\alpha+\beta)-\alpha^2}$$

821. Véase figura P-821.

Resp.

$$M_2 = -\frac{3PL}{8}\cdot\frac{1+2\beta}{4(1+\alpha)(1+\beta)-1}$$

$$M_3 = -\frac{3PL}{8}\cdot\frac{1+2\alpha}{4(1+\alpha)(1+\beta)-1}$$

822. Resolver el problema anterior si la carga concentrada P se sustituye por una uniformemente distribuida de w N/m sobre el claro central.

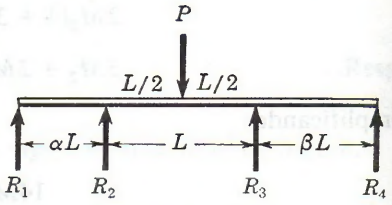


Figura P-821 y P-822.

Resp.

$$M_2 = -\frac{wL^2}{4}\cdot\frac{1+2\beta}{4(1+\alpha)(1+\beta)-1}$$

$$M_3 = -\frac{wL^2}{4}\cdot\frac{1+2\alpha}{4(1+\alpha)(1+\beta)-1}$$

823. Se tiene una viga continua simplemente apoyada sobre tres claros de 4 m que soporta una carga concentrada de 2 kN en el centro del primer claro, otra concentrada de 3 kN en el centro del tercero y una uniformemente distribuida de 900 N/m sobre el tramo central. Determinar los momentos en los apoyos y confrontar el resultado utilizando las soluciones de los problemas 819 y 822.

824. El primer claro de una viga continua sobre cuatro apoyos tiene 4 m de longitud, el segundo, 2 m y el tercero 4 m. Sobre el primero actúa una carga uniformemente distribuida de 2 kN/m y sobre el tercero otra distribuida de 4

kN/m. En el centro del segundo claro se aplica una carga concentrada de 10 kN. Determinar los momentos de continuidad en los apoyos teniendo en cuenta los resultados de los problemas 820 y 821.

Resp. $M_2 = -2900$ N · m;
$M_3 = -6100$ N · m

825. Véase figura P-825.

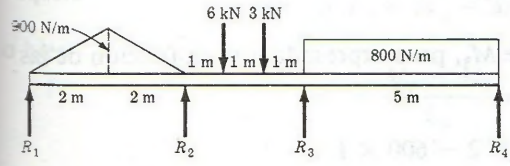


Figura P-825.

826. Véase figura P-826.

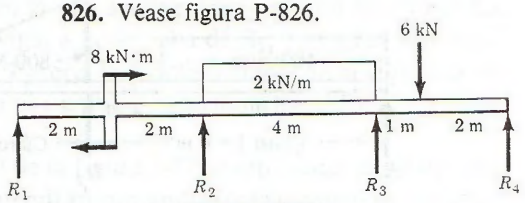


Figura P-826.

Resp. $M_2 = -1690$ N · m; $M_3 = -3230$ N · m

827. Véase figura P-827.

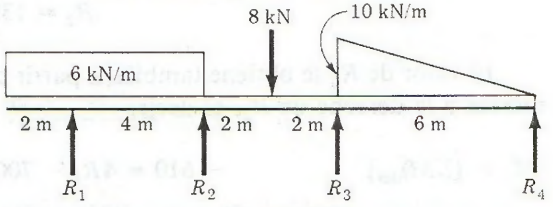


Figura P-827.

8-5. REACCIONES EN LAS VIGAS CONTINUAS. DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE

La razón principal para calcular las reacciones en una viga continua es la de trazar el diagrama de fuerza cortante. Existen dos métodos para determinar estas reacciones. En el primero de ellos se aplica la definición de momento flexionante, y en el segundo, la reacción se divide en partes a partir de las cuales se traza fácilmente el diagrama de cortante. Es preferible este segundo método por las razones que se citan más adelante. En ambos es necesario calcular previamente los momentos de continuidad en los apoyos.

Como ejemplo del primer método consideremos la viga de la figura 8-9, cuyos momentos en los apoyos se han calculado en el problema 812, y que son $M_2 = -445$ N · m y $M_3 = -610$ N · m. Aplicando la definición de momento flexionante se puede expresar M_2 en función de las fuerzas a la izquierda de la sección R_2; se tiene

$$[M_2 = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_2 = -445 = 4R_1 - (400 \times 3) \times 2.5$$

de donde,

$$R_1 = 639 \text{ N} \qquad \textbf{Resp.}$$

Para determinar R_2 se expresa el momento M_3 en función de las fuerzas a la izquierda de R_3,

$$[M_3 = (\Sigma M)_{izq}]$$

$$-610 = 7R_1 - (400 \times 3) \times 5.5 + 3R_2 - \left(\frac{800 \times 3}{2}\right) \times \frac{2}{3} \times 3$$

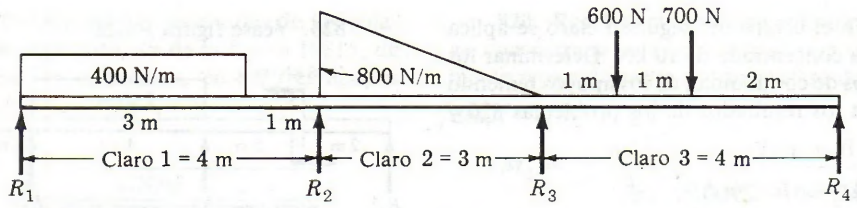


Figura 8-9.

Sustituyendo el valor ya conocido de R_1 y despejando R_2 resulta,

$$R_2 = 1306 \text{ N} \qquad \textbf{Resp.}$$

El valor de R_4 se obtiene también a partir de M_3, pero expresado éste en función de las fuerzas a la derecha de R_3, es decir,

$$[M_3 = (\Sigma M)_{\text{der}}] \qquad -610 = 4R_4 - 700 \times 2 - 600 \times 1$$

de donde

$$R_4 = 348 \text{ N} \qquad \textbf{Resp.}$$

Mediante la condición de equilibrio de las fuerzas verticales, aplicada a toda la viga, se deduce,

$$[\Sigma Y = 0]$$

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 400 \times 3 + \frac{800 \times 3}{2} + 600 + 700$$

$$639 + 1306 + R_3 + 348 = 1200 + 1200 + 600 + 700$$

de donde,

$$R_3 = 1407 \text{ N} \qquad \textbf{Resp.}$$

Evidentemente, este método puede arrastrar y aumentar cualquier error numérico que se cometa inicialmente y es largo y fatigoso si la viga tiene más de tres claros. El segundo método evita los inconvenientes señalados y da los resultados de forma tal que se pueden aplicar fácilmente al trazado del diagrama de fuerza cortante. Este método se basa en aislar cada claro y determinar sus reacciones en los extremos. En cada apoyo intermedio se sumarán las dos reacciones que corresponden al claro de cada lado.

En la sección 8-2 y figura 8-1 se ha visto que cualquier tramo se puede separar del resto de la viga quedando en equilibrio como cuerpo libre si se aplican en sus extremos las fuerzas y momentos resistentes apropiados. El tramo aislado se puede considerar como una viga apoyada simplemente en sus extremos y sometida a dos estados de carga; el real, que actúa sobre el tramo, más otro en el que las únicas cargas son los momentos de continuidad aplicados en sus extremos. En la figura 8-10 se representa el claro 2 de la figura 8-9 aislado como viga simple y en 8-9b y c, los dos estados de carga indicados. Como los momentos M_2 y M_3

son negativos, actúan como muestra la figura, en la que sólo aparece su valor absoluto. La magnitud V_2 es la fuerza cortante vertical en la viga, a la derecha de R_2, y es igual a la reacción total del claro 2 en este punto. La magnitud V_3 sería la fuerza cortante en la viga, a la izquierda de R_3, y V_{-3}, igual y opuesta a la fuerza cortante, la reacción total del claro 2 en su extremo derecho.

Superponiendo los estados de carga (b) y (c) de la figura 8-10 se reproduce el estado inicial (a). Por tanto, las reacciones V_2 y V_{-3} se obtendrán sumando las reacciones de los estados (b) y (c). En este ejemplo, M_3 es numéricamente mayor que M_2, por lo que el par total que actúa en la viga (c) tiene el mismo sentido del reloj y debe ser equilibrado por otro igual, pero con sentido opuesto, producido por las reacciones R' y que viene dado por:

$$R'L_2 = M_3 - M_2$$

o bien

$$R' = \frac{M_3 - M_2}{L_2} = \frac{610 - 445}{3} = 55 \text{ N}$$

La reacción R', debida a los momentos, actúa hacia arriba en el extremo donde el momento (negativo) es mayor en valor absoluto, y hacia abajo en el extremo opuesto. En la suma algebraica que se ha de hacer después con las reacciones, se consideran positivas cuando actúan hacia arriba y negativas cuando lo hacen hacia abajo en el extremo opuesto. En la suma algebraica que se ha de hacer después con las reacciones, se consideran positivas cuando actúan hacia arriba y negativas cuando lo hacen hacia abajo.

Generalizando lo expuesto, se puede establecer que las reacciones R', en un claro, vienen dadas por:

$$R' = \frac{M_M - M_m}{L} \tag{8-2}$$

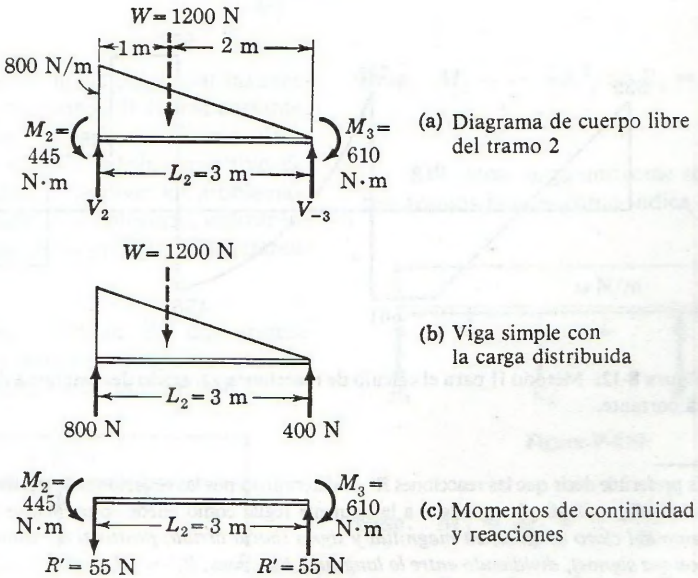
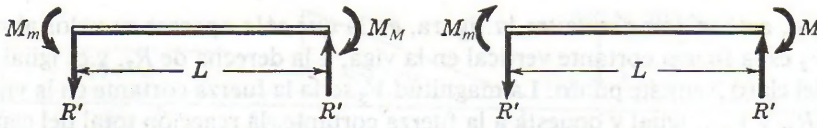


Figura 8-10. Estados de carga en que se descompone el tramo 2.



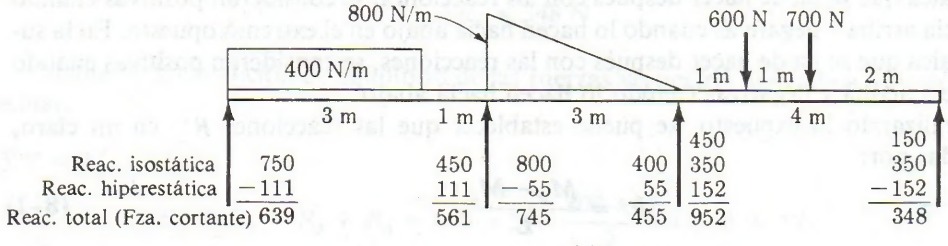
(a) Momentos de continuidad negativos

(b) Momento negativo M_M y y momento positivo M_m

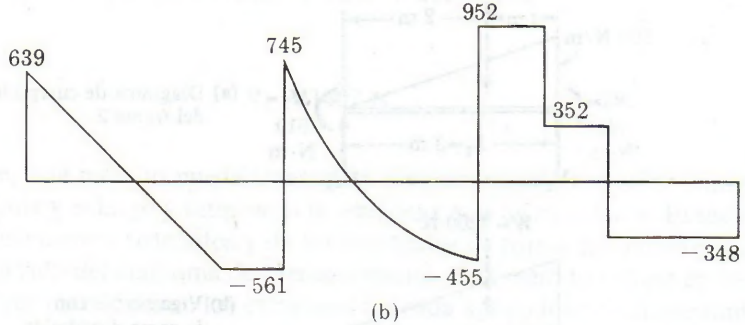
Figura 8-11. La reacción debida a los momentos de continuidad actúa hacia arriba en el extremo de mayor momento negativo.

en donde M_M es el mayor valor absoluto del momento de continuidad en el tramo, M_m es el menor y L la longitud del claro. Como regla, se puede decir que R' actúa hacia arriba en el extremo donde actúa M_M y hacia abajo en el opuesto. Esto suponiendo que los dos momentos de continuidad sean negativos, pero si uno de ellos es positivo, el negativo se considerará como M_M y el positivo como M_m, * pero cambiando el signo menos de la ecuación (8-2) por un signo más. En la figura 8-11 se observa claramente esta forma de actuar.

En la figura 8-12a se representa la manera más conveniente de ordenar e indicar los valores de las reacciones como viga simple, que suelen llamarse isostáticas, y las R' debidas a los momentos, que suelen llamarse hiperestáticas o de continuidad. Los valores de estas últi-



(a)



(b)

Figura 8-12. Método II para el cálculo de reacciones y trazado del diagrama de fuerza cortante.

* **N. de T.** Es preferible decir que las reacciones R' se determinan por las ecuaciones de equilibrio estático aplicadas al estado de cargas de la figura 8-10c, lo que lleva a la siguiente regla, como puede comprobarse fácilmente: *La reacción R' en cada extremo del claro es igual, en magnitud y signo (hacia arriba, positiva) al momento opuesto menos el propio (ambos con sus signos), dividiendo entre la longitud.* Así, pues, $R_i' = M_d - M_i/L$, y $R_d' = M_i - M_d/L$, en donde los subíndices i y d indican extremo izquierdo y derecho, respectivamente, No hay que preocuparse de si es mayor, menor, positivo o negativo, sino poner simplemente cada momento con su signo.

mas se calculan como sigue, en donde el subíndice indica el claro en el que actúan, y son positivas (actúan hacia arriba) en el extremo donde está el máximo momento negativo.

$$\left[R' = \frac{M_M - M_m}{L}\right] \qquad R_1' = \frac{445 - 0}{4} = 111\ \text{N}$$

$$R_2' = \frac{610 - 445}{3} = 55\ \text{N}$$

$$R_3' = \frac{610 - 0}{4} = 152\ \text{N}$$

Ahora se puede trazar fácilmente el diagrama de fuerza cortante, como se observa en la figura 8-12b. Como la fuerza cortante a la izquierda de un apoyo (a la derecha del claro) es igual y opuesta a la reacción, se ha de cambiar el signo obtenido en el apoyo derecho de cada claro para tener el valor de la fuerza cortante. El valor de la reacción total en cada apoyo es la suma, con su signo, de los valores de las reacciones a la izquierda y a la derecha de cada apoyo y, en el caso que se considera, se tiene

$$R_1 = 639\ \text{N}$$
$$R_2 = 561 + 745 = 1306\ \text{N}$$
$$R_3 = 455 + 952 = 1407\ \text{N}$$
$$R_4 = 348\ \text{N}$$

que coinciden con los valores hallados por el primer procedimiento.

PROBLEMAS

En los problemas siguientes, hallar las reacciones y trazar los diagramas de fuerza cortante. Después, determinar los valores máximos de la fuerza cortante, y el valor máximo positivo del momento flexionante. Al resolver los problemas, y a menos que se indique lo contrario, utilizar los resultados obtenidos en los problemas de referencia.

828. Una viga continua de dos tramos iguales que soporta una carga uniforme sobre toda ella como se indica en la figura P-828.

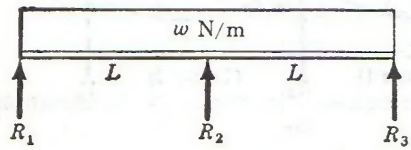


Figura P-828.

Resp. $M_2 = -wL^2/8$; $R_1 = R_3 = \frac{3}{8}wL$; $R_2 = \frac{5}{4}wL$

829. Una carga uniforme sobre una viga de tres tramos iguales como indica la figura P-829.

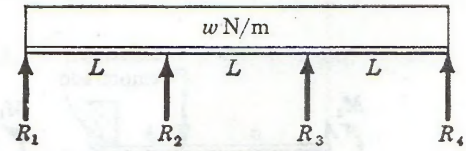


Figura P-829.

Resp. $M_2 = M_3 = -\dfrac{wL^2}{10}$;

$R_1 = R_4 = 0.4wL$; $R_2 = R_3 = 1.1wL$

830. Viga continua del problema 814.

831. Viga continua del problema 817, en la que $M_2 = 156$ N · m.

Resp. $R_2 = 109$ N; máx $M+ = 452$ N · m

832. Viga continua del problema 824.

833. Viga continua del problema 825 en el que $M_2 = -2.04$ kN · m y $M_3 = -2.81$ kN · m

834. Viga continua del problema 826.

Resp. $R_2 = 6.04$ kN; $R_3 = 9.46$ kN; máx. $M+ = 3.15$ kN · m

835. Viga continua del problema 827, en el que $M_2 = -1.895$ kN · m y $M_3 = -16.42$ kN · m.

836. En la viga continua de la figura P-815 calcular la longitud x de los voladizos de manera que las tres reacciones sean iguales.

Resp. $x = 0.44L$

8-6. VIGAS CONTINUAS CON LOS EXTREMOS EMPOTRADOS

En las vigas continuas con los extremos empotrados, como se demuestra en seguida, el empotramiento se puede suponer equivalente a un tramo imaginario, con una carga asimismo imaginaria. La ecuación de los tres momentos se aplica exactamente igual, incluso al tramo imaginario, pero teniendo en cuenta que todos los términos que se refieren a este último son nulos.

En la figura 8-13a se representa el último tramo de una viga continua cuyo extremo B está empotrado. Los valores M_1 y V_1 se deben a las cargas que actúan en el resto de la viga a la izquierda de V_1. El extremo B se supone empotrado horizontalmente, es decir, la tangente a la elástica en B es horizontal. El efecto de un empotramiento se puede sustituir por el efecto de otra viga simétrica y simétricamente cargada, como si B fuera un espejo, como se indica en la figura 8-13b. En efecto, debido a la simetría de forma y carga, la tangente a la elástica en B sería horizontal sobre el apoyo, lo mismo que si se tratase del empotramiento real existente. Al aplicar la ecuación de los tres momentos a los claros 1 y 2 de la figura 8-13b se obtiene

$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = 0 \qquad (a)$$

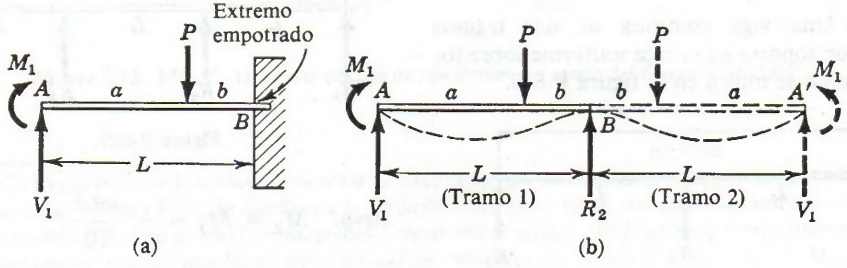


Figura 8-13. Un extremo empotrado equivale a un tramo imaginario.

Sustituyendo los valores que aparecen en la figura,

$$M_1L + 2M_2(L + L) + M_1L + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} = 0$$

o bien

$$2M_1L + 4M_2L + 2 \times \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} = 0$$

Dividiendo por 2,

$$M_1L + 2M_2L + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} = 0 \qquad (b)$$

Esta ecuación (*b*) se hubiera podido obtener directamente de la ecuación (*a*) anulando los términos que se refieren al tramo imaginario 2. Demostrado este principio, apliquémoslo a varios casos concretos.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

837. Determinar los momentos en los apoyos de la viga estáticamente indeterminada de la figura 8-14 en la que el extremo *B* está perfectamente empotrado.

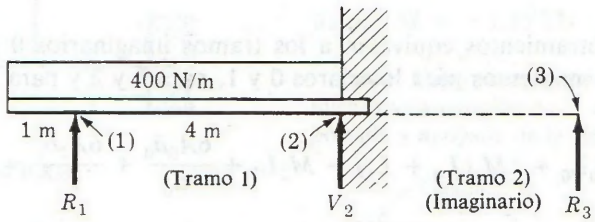


Figura 8-14.

Solución: Este problema, aunque se puede resolver por el método de las áreas de momentos, se va hacer más fácil y rápido considerándolo como viga continua con un extremo empotrado.

La ecuación de los tres momentos aplicada a los tramos 1 y 2 cuyos soportes están al mismo nivel permite escribir:

$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = 0$$

El momento en R_1 debido al voladizo es

$$M_1 = -(400 \times 1) \times \tfrac{1}{2} = -200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Anulando todos los términos que se refieren al claro 2, y teniendo en cuenta que, según la Tabla 8-1, $6A_1\bar{a}_1/L_1 = wL^3/4$, la ecuación (*a*) se reduce a la siguiente:

$$-200 \times 4 + 2M_2 \times 4 + \frac{400 \times 4^3}{4} = 0$$

de donde

$$M_2 = -700 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textbf{Resp.}$$

838. Determinar los momentos en los apoyos de la viga continua de la figura 8-15. Ambos extremos están perfectamente empotrados.

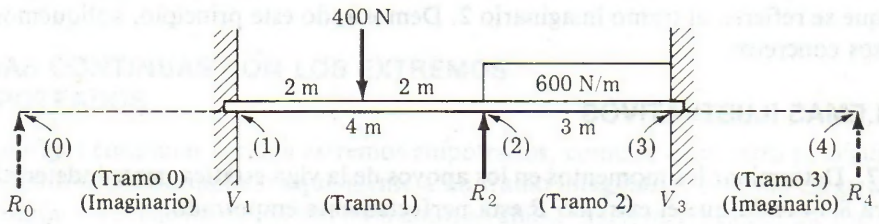


Figura 8-15.

Solución: Los empotramientos equivalen a los tramos imaginarios 0 y 3. Escribamos la ecuación de los tres momentos para los claros 0 y 1, para 1 y 2 y para 2 y 3:

$$M_0L_0 + 2M_1(L_0 + L_1) + M_2L_1 + \frac{6A_0\bar{a}_0}{L_0} + \frac{6A_1\bar{b}_1}{L_1} = 0 \qquad (a)$$

$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = 0 \qquad (b)$$

$$M_2L_2 + 2M_3(L_2 + L_3) + M_4L_3 + \frac{6A_2\bar{a}_2}{L_2} + \frac{6A_3\bar{b}_3}{L_3} = 0 \qquad (c)$$

Al sustituir valores anularemos los términos de estos claros imaginarios.

En la Tabla 8-1 se tienen los valores siguientes:

$$\frac{6A_1\bar{b}_1}{L_1} = \frac{Pb}{L}(L^2 - b^2) = \frac{400 \times 2}{4}(16 - 4) = 2400 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$\frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} = \frac{Pa}{L}(L^2 - a^2) = \frac{400 \times 2}{4}(16 - 4) = 2400 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$\frac{6A_2\bar{a}_2}{L_2} = \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = \frac{wL^3}{4} = \frac{600 \times 3^3}{4} = 4050 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Sustituyendo en la ecuación de los tres momentos,

De la ecuación (*a*): $8M_1 + 4M_2 + 2400 = 0$ (*d*)

De la ecuación (*b*): $4M_1 + 14M_2 + 3M_3 + 6450 = 0$ (*e*)

De la ecuación (*c*): $3M_2 + 6M_3 + 4050 = 0$ (*f*)

Resolviendo el sistema

$$M_1 = -147\ \text{N}\cdot\text{m}, \quad M_2 = -307\ \text{N}\cdot\text{m}, \quad M_3 = -522\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

En los siguientes problemas se supone que los empotramientos de los extremos de las vigas son perfectos. A menos que se diga lo contrario, los apoyos están al mismo nivel.

839. Determinar la reacción en el apoyo en la viga de la figura P-839.

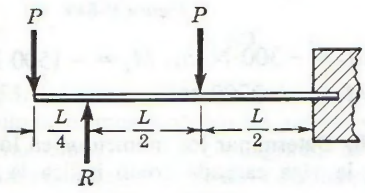


Figura P-839.

840. En la viga empotrada y apoyada de la figura P-840, determinar la reacción en el apoyo y el momento flexionante máximo positivo.

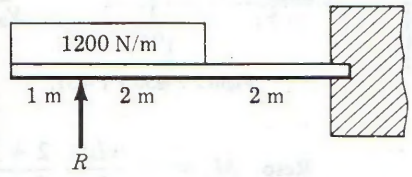


Figura P-840.

Resp. $R = 2.96$ kN; $M = 696\ \text{N}\cdot\text{m}$

841. Determinar el momento en el empotramiento y la reacción en el apoyo en la viga de la figura P-841.

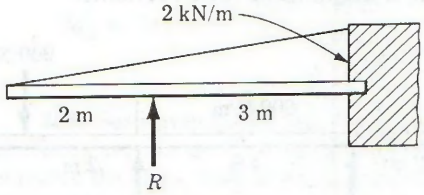


Figura P-841.

Resp. $M = -1.35$ kN · m; $R = 2.33$ kN

842. Determinar el momento en el empotramiento y la reacción en el apoyo en la viga empotrada y apoyada de la figura P-842.

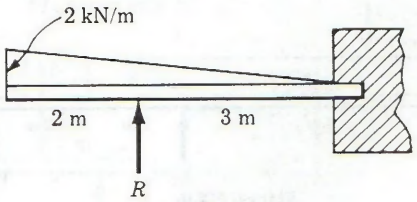


Figura P-842.

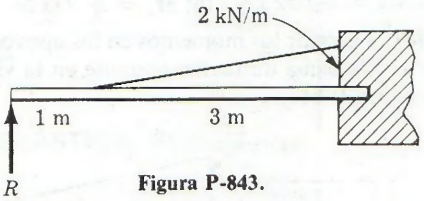


Figura P-843.

843. Para la viga de la figura P-843, determinar el momento de y la reacción en el apoyo.

Resp. $M = -1566\ \text{N}\cdot\text{m}$; $R = 359$ N

844. Determinar la reacción en el apoyo de la viga de la figura P-844.

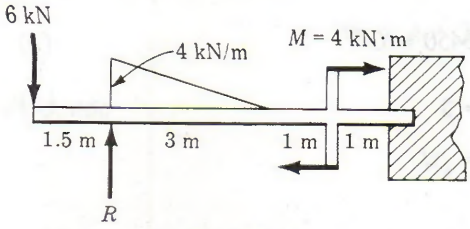


Figura P-844.

845. Calcular los momentos en los apoyos y empotramientos en la viga de la figura P-845 y trazar el diagrama de fuerza cortante.

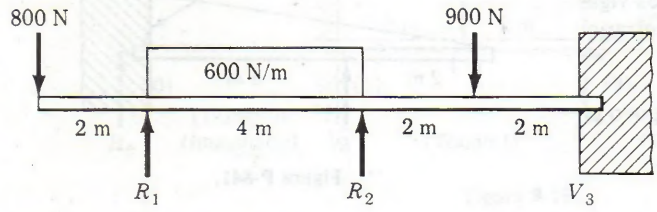


Figura P-845.

846. Dibujar el diagrama de fuerza cortante en la viga continua de la figura P-846.

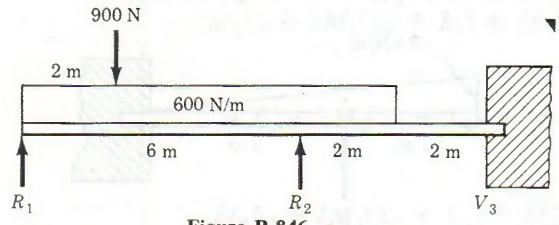


Figura P-846.

Resp. $M_2 = -2.52$ kN · m; $M_3 = +733$ N · m

847. Calcular los momentos en los apoyos y trazar el diagrama de fuerza cortante en la viga de la figura P-847.

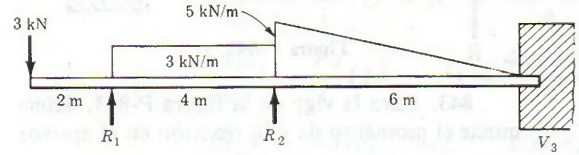


Figura P-847.

848. Determinar los momentos en los apoyos y las reacciones en la viga continua de la figura P-848.

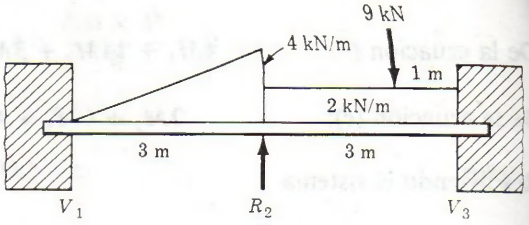


Figura P-848.

849. Calcular los momentos en los apoyos de la viga de la figura P-849.

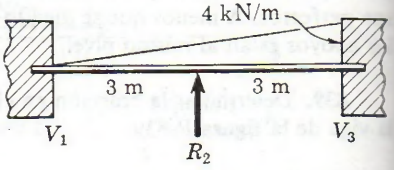


Figura P-849.

Resp. $M_1 = -300$ N · m; $M_2 = -1500$ N · m; $M_3 = -2700$ N · m

850. Determinar los momentos en los apoyos de la viga cargada como indica la figura P-850.

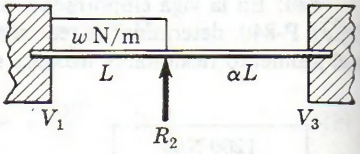


Figura P-850 y P-851.

Resp. $M_1 = -\frac{wL^2}{8} \cdot \frac{2+3\alpha}{3+3\alpha}$;

$M_2 = -\frac{wL^2}{8} \cdot \frac{2}{3+3\alpha}$;

$M_3 = +\frac{wL^2}{8} \cdot \frac{1}{3+3\alpha}$

851. Sustituir la carga distribuida, del problema anterior, por una carga concentrada P en el centro del claro y calcular los momentos en los apoyos.

Resp. $M_1 = -\frac{3PL}{16} \cdot \frac{2+3\alpha}{3+3\alpha}$;

$M_2 = -\frac{3PL}{16} \cdot \frac{2}{3+3\alpha}$;

$M_3 = +\frac{3PL}{16} \cdot \frac{1}{3+3\alpha}$

852. Aplicar los resultados de los problemas 850 y 851 para confrontar la solución del ejemplo 838.

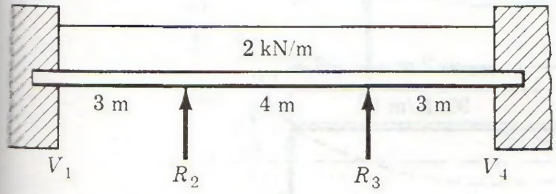


Figura P-853.

853. En la viga continua de la figura P-853, determinar los momentos en los apoyos y en los empotramientos. Trazar el diagrama de fuerza cortante y calcular el momento flexionante máximo positivo. *Indicación*: Aprovechar la simetría.

854. Calcular los momentos en los apoyos en la viga cargada como indica la figura P-854.

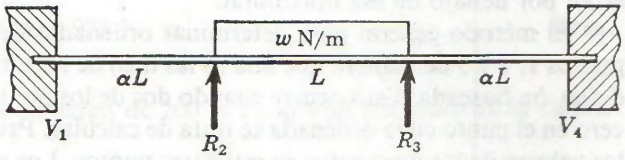


Figura P-854 y P-855.

Resp. $M_1 = M_4 = +\frac{wL^2}{12} \cdot \frac{1}{2+\alpha}$;

$M_2 = M_3 = -\frac{wL^2}{12} \cdot \frac{2}{2+\alpha}$

855. Sustituyendo la carga repartida del problema anterior por una carga concentrada en el centro del claro, determinar los momentos en los apoyos.

856. En la viga representada en la figura P-856, determinar los momentos en los apoyos. Trazar el diagrama de fuerza cortante y calcular el valor del máximo momento positivo.

Resp. $M_2 = -4460$ N·m;

$M_3 = -661$ N·m; $M_4 = -3270$ N·m

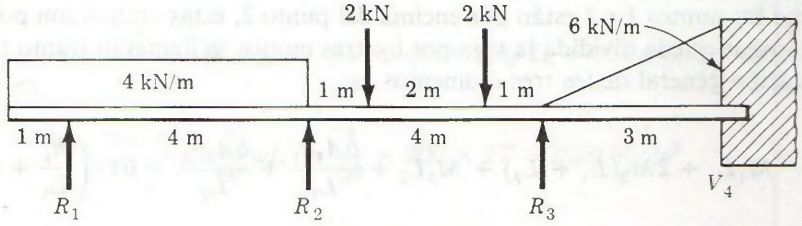


Figura P-856.

8-7. DEFLEXIONES (U ORDENADAS DE LA ELÁSTICA) POR LA ECUACIÓN DE LOS TRES MOMENTOS

Antes de iniciar el estudio de la aplicación de la ecuación de los tres momentos a la evaluación de deflexiones, insistamos en algunos aspectos y características de esta ecuación.

La ecuación de los tres momentos expresa una relación entre los momentos flexionantes en cualesquiera tres puntos de una viga cualquiera. Los tres puntos determinan dos tra-

mos en la viga, y los términos $6A_1\bar{a}_1/L_1$ y $6A_2\bar{b}_2/L_2$ de la ecuación se refieren al área de momentos flexionantes que producen las cargas aplicadas a estos tramos si se suponen apoyados en sus extremos. Las alturas h_1 y h_3 son las alturas de los puntos 1 y 3 respecto de la horizontal que pasa por 2 (véase Fig. 8-3) y se consideran positivas si están por encima y negativas si están por debajo de esa horizontal.

El método general para determinar ordenadas de la elástica o deflexiones es elegir los puntos 1, 2 y 3 de manera que una (o las dos) de las alturas h_1 y h_3 sean igual a la ordenada o deflexión buscada. Esto ocurre cuando dos de los puntos se toman sobre dos apoyos y el tercero en el punto cuya ordenada se trata de calcular. Previamente se han de conocer o calcular los valores de los momentos en estos tres puntos. Los ejemplos que siguen aclaran y detallan el método por seguir.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

857. Aplicar la ecuación de los tres momentos a la determinación del valor de $EI\delta$ a 1 m del apoyo izquierdo de la viga cargada como indica la figura 8-16.

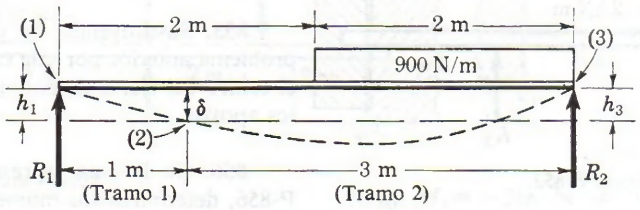


Figura 8-16.

Solución: La línea punteada representa, muy exageradamente, la elástica de la viga. Consideremos como punto 2 el punto en el que se trata de determinar la deflexión y como puntos 1 y 3 los apoyos. En estas condiciones, las alturas h_1 y h_3 son iguales entre sí y a la deflexión pedida, y como los puntos 1 y 3 están por encima del punto 2, estas alturas son positivas. Los segmentos en que queda dividida la viga por los tres puntos se llamarán tramo 1 y tramo 2.

La ecuación general de los tres momentos es:

$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}\right)$$

Como el tramo 1 está libre de cargas, $6A_1\bar{a}_1/L_1$ es cero. Para el tramo 2 se aplica el caso 5 de la Tabla 8-1, es decir,

$$\frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = \frac{wd^2}{4L}(2L^2 - d^2) = \frac{900(2)^2}{4(3)}(2 \times 9 - 4) = 4200\ \text{N} \cdot \text{m}^2$$

Tomando momentos respecto de R_2 se obtiene $R_1 = 450$ N y, por tanto, el momento flexionante en el punto 2 es $M_2 = 450\ \text{N} \times 1 = 450\ \text{N} \cdot \text{m}$. Además, $M_1 = M_3 = 0$ y $h_1 = h_3 =$

δ. Sustituyendo en la ecuación (*a*) resulta

$$0 + 2(450)(1 + 3) + 0 + 0 + 4200 = 6EI\left(\frac{\delta}{1} + \frac{\delta}{3}\right)$$

de donde

$$EI\delta = 975 \text{ N} \cdot \text{m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

858. Calcular el valor de $EI\delta$ bajo la carga de 200 N en la viga continua de la figura 8-17.

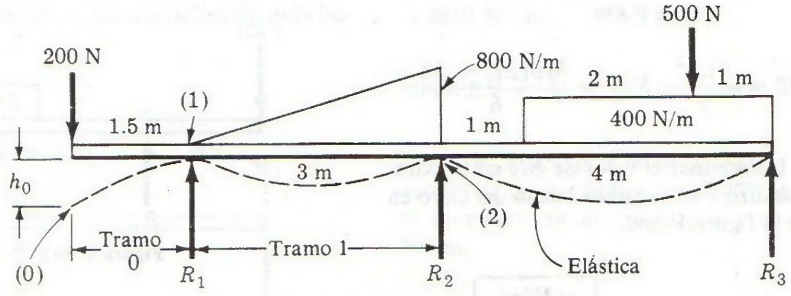


Figura 8-17.

Solución: La viga es la misma del problema 811 en el que se determinaron los momentos de continuidad. El punto 0 de la elástica es ahora el punto 1, por lo que $h_0 = -\delta$ y $h_2 = 0$. Según el problema 811, $M_0 = 0$, $M_1 = -300 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $M_2 = -645 \text{ N} \cdot \text{m}$.

La ecuación de los tres momentos permite escribir:

$$M_0L_0 + 2M_1(L_0 + L_1) + M_2L_1 + \frac{6A_0\bar{a}_0}{L_0} + \frac{6A_1\bar{b}_1}{L_1} = 6EI\left(\frac{h_0}{L_0} + \frac{h_2}{L_1}\right)$$

En este caso, el tramo 0 está descargado, por lo que $6A_0\bar{a}_0/L_0 = 0$. En el tramo 1, el caso 3 de la Tabla 8-1 da

$$\frac{6A_1\bar{b}_1}{L_1} = \frac{7}{60}wL^3 = \frac{7}{60} \times 800 \times 27 = 2520 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Sustituyendo valores resulta:

$$2(-300)(1.5 + 3) + (-645) \times 3 + 2520 = 6EI\left(\frac{-\delta}{1.5} + 0\right)$$

de donde

$$EI\delta = 529 \text{ N} \cdot \text{m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

El valor positivo del resultado indica que la deflexión tiene el sentido supuesto, es decir, hacia abajo.

PROBLEMAS

859. Determinar el valor de $EI\delta$ bajo P en la figura P-859. ¿Qué se obtendría si P se sustituyese por un par con sentido del reloj M?

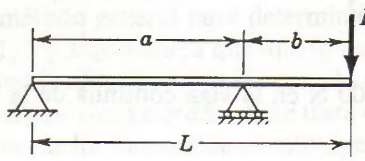


Figura P-859.

Resp. $EI\delta = \dfrac{PLb^2}{3}$; $EI\delta = \dfrac{Mb(2L + b)}{6}$

860. Determinar el valor de $EI\delta$ en el extremo del voladizo y en el punto medio del claro en la viga de la figura P-860.

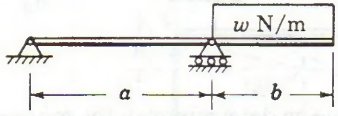


Figura P-860.

861. Para la viga de la figura P-861, determinar el valor de $EI\delta$ a 1 m y a 3 m del apoyo izquierdo.

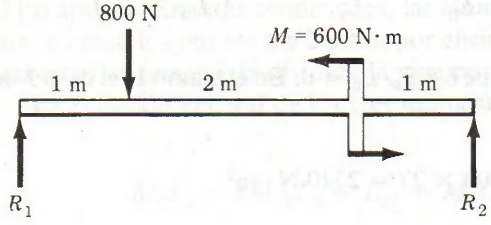


Figura P-861.

Resp. 900 N · m^3; 767 N · m^3

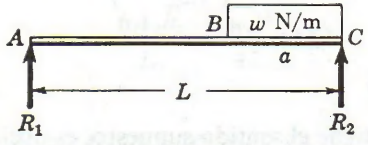


Figura P-862.

862. Determinar el valor de $EI\delta$ en B en la viga de la figura P-862.

Resp. $EI\delta = \dfrac{wa^3}{24L}(4L - 3a)(L - a)$

863. En la viga representada en la figura P-863, determinar el valor de $EI\delta$ en el centro del claro y en en el extremo izquierdo.

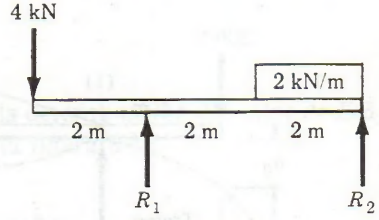


Figura P-863.

864. Una viga de 6 m de longitud, simplemente apoyada a 1 m de cada extremo, soporta una carga uniformemente distribuida de 800 N/m sobre toda su longitud. Calcular el valor de $EI\delta$ en el centro y en los extremos.

865. En la viga de la figura P-865 calcular el valor de $EI\delta$ en el punto x = 3 m y en el extremo del voladizo.

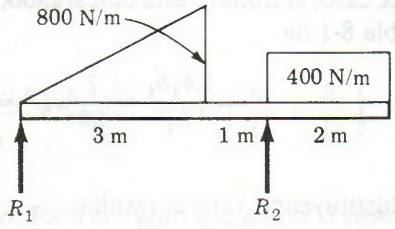


Figura P-865.

Resp. En el extremo, $EI\delta$ = 813 N · m^3 hacia abajo.

866. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro del claro en la viga de la figura P-866.

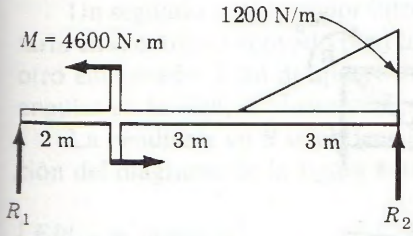


Figura P-866.

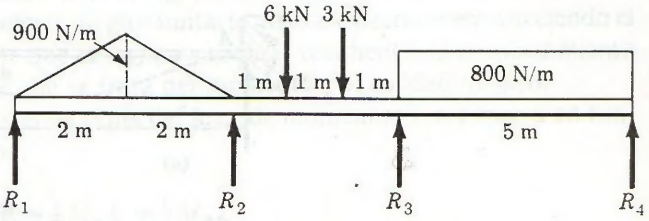


Figura P-869.

867. En la viga de la figura P-867, calcular el valor de P que produzca una deflexión nula bajo esta fuerza.

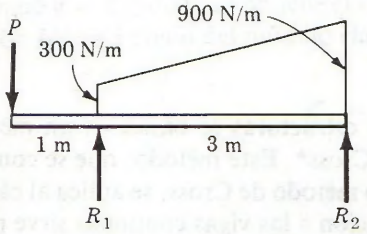


Figura P-867.

Resp. $P = 489$ N

868. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro y en los extremos de la viga cargada como indica la figura P-868.

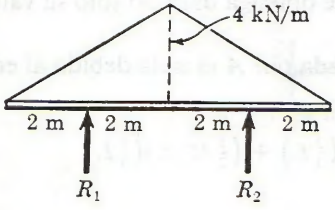


Figura P-868.

Resp. En los extremos, $EI\delta = 10.9$ kN · m^3 hacia arriba

869. Hallar el valor de $EI\delta$ en el centro del primer claro de la viga continua de la figura P-869 sabiendo que $M_2 = -2040$ N · m y $M_3 = -2810$ N · m.

Resp. $EI\delta = 120$ N · m^3 hacia arriba

870. Calcular el valor de $EI\delta$ en el extremo volado de la viga de la figura P-870 sabiendo que el momento en el empotramiento es + 1100 N · m.

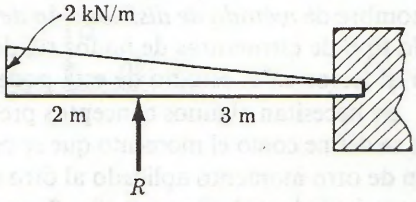


Figura P-870.

871. La viga continua de la figura P-871 está apoyada en su extremo izquierdo en un resorte cuya constante es de 50 kN/m. En la viga, $E = 10 \times 10^9$ N/m^2 e $I = 40 \times 10^6$ mm^4. Calcular la deflexión del resorte.

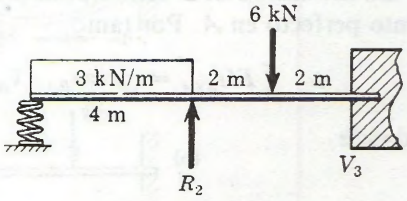


Figura P-871 y P-872.

Resp. $\delta = 79.4$ mm

872. Repetir el problema anterior intercambiando las cargas en los claros.

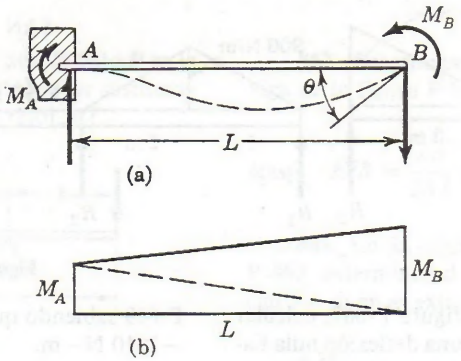


Figura 8-18. Momentos transmitidos y rigidez de la viga.

8-8. DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS: MÉTODO DE CROSS

Las técnicas modernas de cálculo y diseño de estructuras se basan en un método de aproximaciones sucesivas popularizado por Hardy Cross*. Este método, que se conoce con el nombre de *método de distribución de momentos* o método de Cross, se aplica al cálculo de todo tipo de estructuras de nudos rígidos. Su aplicación a las vigas continuas sirve para iniciar al lector en el estudio de esta poderosa herramienta del ingeniero de estructuras.

Se necesitan algunos conceptos preliminares. El primero es el del *momento transmitido,* que se define como el momento que se produce en el extremo empotrado de una viga por la acción de otro momento aplicado al otro extremo (articulado). Consideremos la viga empotrada y articulada de la figura 8-18a. Si se aplica en B un momento M_B, la viga se deforma como se indica, y se produce en A un momento M_A de empotramiento. El diagrama de momentos, trazado como se expuso en la sección 7-5, se indica en la figura 8-18b. Aunque M_A es realmente negativo, dada la curvatura de la elástica en A, es conveniente considerarlo positivo como se ha dibujado; de esta manera, la solución que se obtenga dará no sólo su valor, sino también su signo (negativo) correcto.

La desviación de B con respecto a la tangente trazada por A es nula debido al empotramiento perfecto en A. Por tanto,

$$\left[EIt_{B/A} = (\text{área})_{BA} \cdot \bar{x}_B\right] \quad 0 = \left(\tfrac{1}{2}M_A L\right)\left(\tfrac{2}{3}L\right) + \left(\tfrac{1}{2}M_B L\right)\left(\tfrac{1}{3}L\right)$$

de donde

$$M_A = -\tfrac{1}{2}M_B \tag{8-3}$$

El resultado demuestra que en un momento aplicado en la articulación B transmite al empotramiento A un momento de valor igual a un medio de aquél y de signo contrario.

* Ver los estudios de Cross «Continuity as a Factor in Reinforced Concrete Design», *Proc. A.C.I.,* 1929, págs. 669-711; «Simplified Rigid Frame Design», *Proc. A.C.I.,* 1930, Vol. 26, págs 170-183; «Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed End Moments», *Trans. A.S.C.E.,* 1932, Vol. 96 págs. 1-156. Véase también el libro de Hardy Cross y N. D. Morgan, *Continuous Frames of Reinforced Concrete,* Wiley, Nueva York, 1932.

Un segundo concepto por introducir es el de *rigidez de la viga*, que es el momento necesario en el extremo apoyado para producir un giro unitario en este extremo permaneciendo el otro empotrado. Esto no quiere decir que se vaya a producir realmente un desplazamiento angular en la viga, sino simplemente que se trata del momento por unidad de giro.

La pendiente en B se obtiene por el teorema del área de momentos y se expresa en función del diagrama de la figura 8-18b:

$$[EI\theta_{AB} = (\text{área})_{AB}] \qquad EI\theta = \tfrac{1}{2}M_A L + \tfrac{1}{2}M_B L$$

Sustituyendo M_A por $-\frac{1}{2}$ M_B de la ecuación (8-3):

$$M_B = \frac{4EI\theta}{L}$$

Haciendo $\theta = 1$ radián, se obtiene el valor de la *rigidez absoluta* de la viga, que depende de la relación I/L, así como del módulo elástico E. Se representa por K_a y su valor se explica por:

$$K_a = \frac{4EI}{L} \tag{8-4}$$

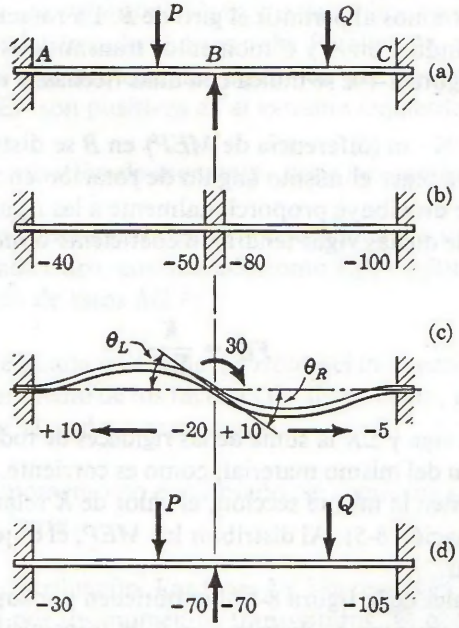


Figura 8-19. Descripción cualitativa del método de distribución de momentos. (a) Estado real de carga. (b) Momentos de empotramiento perfecto (*MEP*) producidos por P y Q suponiendo fijo (giro impedido) el nudo B. (c) Al soltar B (giro permitido), se distribuye la diferencia entre los *MEP* en B de acuerdo con la rigidez de AB y BC y se producen momentos transmitidos. Obsérvese que θ_{izq} debe ser igual a θ_{der} por la continuidad de la viga. (d) Los momentos finales son la suma algebraica de los valores de (b) y (c).

Sin embargo, como en muchas estructuras E es constante, únicamente se precisa una medida relativa de la rigidez o resistencia al giro de la sección. Esta medida se llama *rigidez relativa*, o simplemente *rigidez de la viga* y viene dada por:

$$K = \frac{I}{L} \tag{8-5}$$

Ahora ya se puede describir cualitativamente el método de distribución de momentos.

La viga continua de la figura 8-19a está perfectamente empotrada en A y C y simplemente apoyada en B. Supóngase que, de momento, la viga no puede girar en B, como si estuviera empotrada (nudo fijo), por lo que los tramos AB y BC trabajan como dos vigas perfectamente empotradas en sus extremos, sometidas a las cargas P y Q, respectivamente, y en las que aparecerán los momentos de empotramiento correspondientes. Supongamos que tales momentos, que se llaman *momentos de empotramiento perfecto* (MEP), tienen los valores indicados en la figura 8-19b.

Soltemos la sujeción que impedía girar a B; la diferencia entre los *MEP* a uno y otro lado del nudo da lugar a un momento de 30 N · m que, al no estar equilibrado, hace girar al nudo B como indica la figura 8-19c hasta que se equilibran los momentos a uno y otro lado. Es evidente que el momento a la izquierda de B se incrementará en alguna cantidad, por ejemplo, 20 N • m y el de la derecha disminuirá en 10 N • m, que es la diferencia respecto de 30, desequilibrio inicial de los *MEP*. Se observa, pues, cómo el momento no equilibrado se distribuye entre los dos tramos al permitir el giro de B. La rotación de B producida por estos momentos distribuidos induce en A y C momentos transmitidos de la mitad de su valor y de signo contrario. En la figura 8-19c se indica con unas flechas la transmisión de estos momentos.

El momento de 30 N · m (diferencia de *MEP*) en B se distribuye entre las dos vigas de forma que ambas han de tener el mismo ángulo de rotación en B, lo que indica que un momento no equilibrado se distribuye proporcionalmente a las rigideces de las vigas adyacentes y, por tanto, cada una de dichas vigas tendrá un coeficiente o *factor de distribución, FD*, definido por:

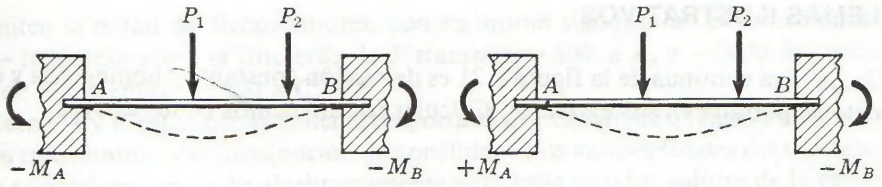
$$FD = \frac{K}{\Sigma K} \tag{8-6}$$

siendo K la rigidez de la viga y ΣK la suma de las rigideces de todas las vigas que concurren en un nudo. Si las vigas son del mismo material, como es corriente, basta con emplear la rigidez relativa, y si además tienen la misma sección, el valor de K relativo es inversamente proporcional a la longitud (ecuación 8-5). Al distribuir los *MEP*, el objetivo es llegar al equilibrio en el nudo B, libre de girar.

Los momentos totales de la figura 8-19d se obtienen por superposición de los *MEP* de la figura 8-19b y de los momentos de distribución y de transmisión de la figura 8-19c.

REGLAS DE SIGNOS

En el estudio realizado se han considerado los signos de los momentos convencionales. Este método requiere que los momentos transmitidos sean de signos contrarios y, con frecuencia, conduce a cierta confusión al tenerse que fijar muy atentamente en el signo del mo-



(a) Signos basados en los momentos convencionales de empotramiento

(b) Signos basados en el sentido de rotación de los momentos de empotramiento

Figura 8-20. Diferencia entre convenciones de signos.

mento no equilibrado que se ha de distribuir, especialmente cuando se trata de un nudo en el que concurren más de dos barras.

Se puede aumentar la precisión en los cálculos, al mismo tiempo que se elimina la confusión aludida, si se emplean signos convencionales basados en el sentido de rotación de los momentos en los extremos.

Con este criterio, se consideran positivos los momentos que actúan en una viga en sentido contrario al del reloj, y los pares en sentido del reloj, negativos. Como consecuencia, tienen lugar dos modificaciones importantes. La primera es que los momentos transmitidos son *del mismo signo*. La segunda es que al distribuir el momento no equilibrado en cada nudo, los momentos distribuidos son *del mismo signo* y están aplicados de forma que la suma algebraica de los momentos totales en cada nudo es nula. Finalmente, como consecuencia directa de la citada regla, en una viga doblemente empotrada que soporta cargas hacia abajo, como en la figura 8-20, los *MEP* son positivos en el extremo izquierdo y negativos en el derecho.

Resumiendo, el método de distribución de momentos tiene las siguientes fases:

1. Se supone que todos los nudos son rígidos y se calculan los *momentos de empotramiento perfecto* (*MEP*) para cada claro, considerado como viga empotrada en sus extremos. La Tabla 7-2 ayudará al cálculo de estos *MEP*.

2. Se deja girar libremente a cada nudo y se *distribuye* el momento no equilibrado entre todas las barras adyacentes, por medio de los factores de distribución, ecuación (8-6). A continuación, se vuelve a bloquear el nudo contra el giro.

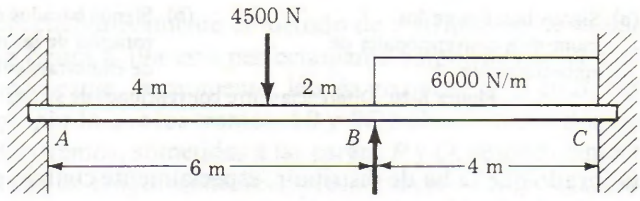
3. Una vez distribuido el momento no equilibrado, se *transmite* su mitad con el *mismo* signo al otro extremo de cada barra.

Esto completa un ciclo de distribución. Las fases 2 y 3 se repetirán, en general, debido al nuevo desequilibrio producido por los momentos transmitidos. El procedimiento se realiza iterativamente hasta que los momentos transmitidos sean nulos o despreciables. El cálculo concluye con una distribución, no con una transmisión. La exactitud del resultado dependerá del número de iteraciones. En general, no son necesarios más de cuatro porque el desequilibrio producido por los momentos transmitidos decrece rápidamente.

Los siguientes ejemplos muestran la forma de disponer los cálculos con algunas modificaciones y simplificaciones del método.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

873. La viga continua de la figura 8-21 es de sección constante y homogénea y está perfectamente empotrada en sus extremos. Calcular los momentos en los apoyos.



$K = \frac{I}{L}$ $\qquad \frac{12}{6} = (2)$ $\qquad \frac{12}{4} = (3)$

FD	0	0.4	0.6	0
MEP	+2000	−4000	+8000	−8000
		−1600	−2400	
Transmisión	−800			−1200
Momentos finales	+1200	−5600	+5600	−9200

Figura 8-21.

Solución: Aunque I es desconocido, conviene tomarlo como el mínimo común múltiplo de las longitudes de los claros, 12 en este caso, con lo que los valores de las rigideces relativas $K = I/L$ serán números enteros y sencillos. Los factores de distribución se calculan por la ecuación (8-6) y se indican en el cuadro de la figura.

Suponiendo que todos los nudos son fijos, mediante la Tabla 7-2 se obtienen los valores de los *MEP*:

$$\text{Tramo } AB: \quad M_A = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{4500(4)(2)^2}{(6)^2} = -2000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2} = -\frac{4500(4)^2(2)}{(6)^2} = -4000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{Tramo } BC: \quad M_B = M_C = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{6000(4)^2}{12} = -8000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

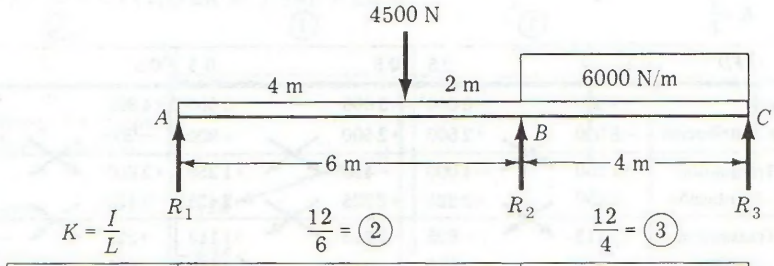
Con la convención de signos establecida, se ha supuesto signo positivo a los momentos de la izquierda del claro y signo negativo a los de la derecha.

Al dejar libre el nudo B, el momento desequilibrado es $8000 - 4000 = 4000$ N · m, por lo que el momento a distribuir entre las barras es 4000 N · m para que la suma total de momentos en B sea nula, como se ha dicho. Utilizando los valores de los *FD*, a la izquierda de B le corresponde $0.4(4000) = 1600$ N · m y a la derecha $0.6(4000) = 2400$ N · m. Ahora se

transmiten la mitad de dichos valores, con su mismo signo, a los extremos opuestos. Así, pues -1600 aplicado a la izquierda de B transmite -800 a A, y -2400 aplicado a la derecha de B transmite -1200 a C.

Como A y C están perfectamente empotrados, y así han de quedar, absorben estos momentos transmitidos y la distribución ha concluido. Los valores finales del momento en cada apoyo se obtienen sumando algebraicamente para cada uno los valores de la columna vertical que se indican en el cuadro. Si se quiere, estos momentos finales se pueden convertir fácilmente en momentos flexionantes convencionales, cambiando el signo a la izquierda de cada tramo.

874. La viga continua de la figura 8-22 soporta las mismas cargas que la del problema anterior, pero los extremos A y C están simplemente apoyados. Calcular los momentos en los apoyos.



FD	1	0.4	0.6	1
MEP	+2000	−4000	+8000	−8000
1a. distribución	−2000	−1600	−2400	+8000
Transmisión	−800	−1000	+4000	−1200
2a. distribución	+800	−1200	−1800	+1200
Transmisión	−600	+400	+600	−900
3a. distribución	+600	−400	−600	+900
Transmisión	−200	+300	+450	−300
4a. distribución	+200	−300	−450	+300
Σ	0	−7800	+7800	0

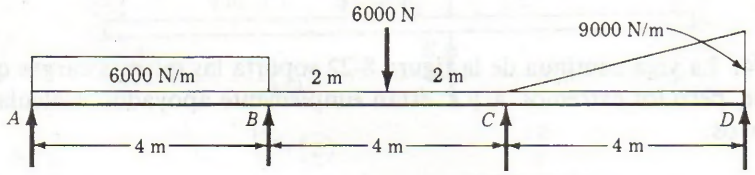
Figura 8-22.

Solución: Se calculan los valores de K y de *FD* como en el problema anterior. Supuesto que todos los nudos son rígidos y fijos, los *MEP* se calculan como antes y se escriben en el cuadro.

Ahora se dejan libres todos los nudos, lo que devuelve a la viga sus condiciones iniciales. El momento no equilibrado en cada nudo debe ser compensado y distribuido entre las vigas que a él concurren. En B, la distribución es igual a la descrita en el problema anterior. Pero al soltar los nudos A y C es como si se añadieran los momentos de -2000 y $+8000$ N · m respectivamente, de manera que el momento total sea nulo en estos dos extremos (esto equivale a suponer un *FD* igual a la unidad en ambos extremos). Terminada esta distribución y vuel-

tos a fijar todos los nudos, los momentos distribuidos producen la transmisión indicada con flechas, lo que introduce un nuevo desequilibrio en los nudos sensiblemente menor que el inicial.

Se vuelven a dejar libres los nudos; se distribuye el momento equilibrador y se vuelven a fijar los nudos, con lo que se completa otro ciclo de distribución, y así hasta que los momentos a transmitir sean despreciables o como en la 3ª iteración, hasta que la suma de los momentos transmitidos y de los distribuidos sea nula en todos los nudos. Las iteraciones poste-



$K = \frac{I}{L}$	①		①		①	
FD	1	0.5	0.5	0.5	0.5	1
MEP	+8 000	−8 000	+3 000	−3 000	+4 800	−7 200
1a. distribución	−8 000	+2 500	+2 500	−900	−900	+7 200
Transmisión	+1 250	−4 000	−450	+1 250	+3 600	−450
2a. distribución	−1 250	+2 225	+2 225	−2 425	−2 425	+450
Transmisión	+1 113	−625	−1 213	+1 113	+225	−1 213
3a. distribución	−1 113	+919	+919	−669	−669	+1 213
Transmisión	+460	−557	−335	+460	+607	−335
4a. distribución	−460	+446	+446	−533	−534	+335
Σ	0	−7 092	+7 092	−4 704	+4 704	0

Solución (a) Procedimiento normal

$K = \frac{I}{L}$	$\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$		①		$\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$	
FD	1	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1
MEP	+8 000	−8 000	+3 000	−3 000	+4 800	−7 200
Soltar *A* y *D*	−8 000	−4 000			+3 600	+7 200
MEP reajustados	0	−12 000	+3 000	−3 000	+8 400	0
1a. distribución		+3 857	+5 143	−3 086	−2 314	
Transmisión			−1 543	+2 572		
2a. distribución		+661	+882	−1 470	−1 102	
Transmisión			−735	+441		
3a. distribución		+315	+420	−252	−189	
Transmisión			−126	+210		
4a. distribución		+54	+72	−120	−90	
Σ	0	−7 113	+7 113	−4 705	+4 705	0

Solución (b) Procedimiento abreviado

Figura 8-23.

riores ya no producirían efecto alguno, como ocurre con la cuarta. El cálculo concluye con una distribución, no con una transmisión.

875. Aplicar el método de distribución de momentos a la viga continua de tres claros con extremos apoyados de la figura 8-23.

Solución: Se siguen dos procedimientos. El primero, en (a), es el mismo del problema 874 para extremos apoyados. No es conveniente tratar como fijo un extremo que es libre, ni trasmitirle momento para luego volver a soltarlo. Es más sencillo usar una modificación en la cual el extremo libre, inicialmente supuesto fijo, se deja libre sólo una vez sin transmitirle momento para una distribución posterior. Para comprender el procedimiento, veamos cómo influye en los cálculos un momento de distribución en B que se transmita a A y luego vuelva a B. En la figura 8-24, el momento M transmite a A el momento $\frac{1}{2}M$ si A está fijo. Si A es un apoyo, al soltarlo aparece el momento $-M/2$ en A que transmite a B otro de $-M/4$. La suma de estos valores da cero en A y $3M/4$ en B.

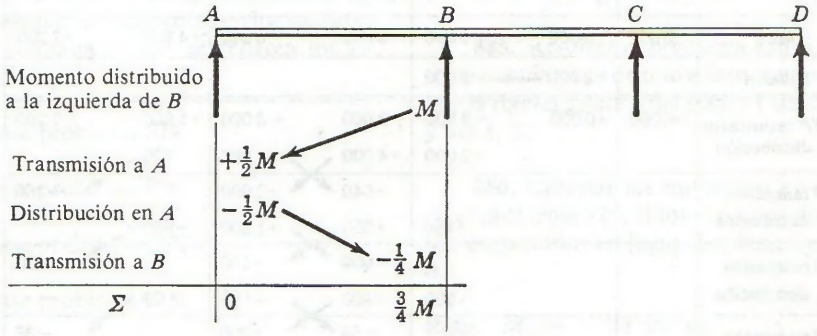


Figura 8-24. Modificación de la distribución en B para evitar la transmisión de momentos al extremo simplemente apoyado A.

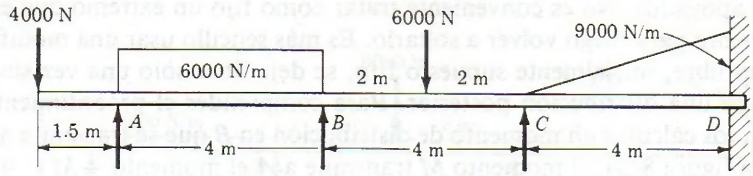
Si se modificara, pues, la distribución en B, de manera que solamente le correspondiera al tramo izquierdo $3M/4$ en lugar de M, sin transmitir el momento a A, el resultado se hubiera obtenido directamente. En otras palabras, si la rigidez de AB se multiplica por 3/4, la distribución en B se modifica de manera que no hay que transmitir momento alguno a A.

Este método abreviado se aplica a la segunda solución (b) de la figura 8-23. Para empezar, se reducen A y D a extremos apoyados, una vez calculados los *MEP* como en todos los casos, soltándolos, lo que equivale a aplicar los momentos equilibradores de -8000 y de $+7200$, en A y D, y transmitiendo a B y C las mitades correspondientes con el mismo signo, lo que modifica en estos puntos los *MEP*. El momento equilibrador se distribuye en estos nudos con arreglo a los nuevos factores de distribución que habrán sido determinados modificando las rigideces de AB y CD como antes se ha explicado. Obsérvese que ya no se transmite momento alguno ni A ni a D, y que se llega mucho más rápidamente al resultado final para el mismo número de iteraciones con este procedimiento que con el normal.

876. La figura 8-25 representa una viga continua como la del problema anterior, pero añadiendo un voladizo en A y empotrando el extremo D. Los momentos de inercia de AB y

CD son de 20 unidades, mientras que el de *BC* es de 30 unidades. Las nuevas rigideces son $K_{AB} = 2$, $K_{BC} = 3$ y $K_{CD} = 2$. Calcular los momentos en los soportes.

Solución: Este problema aclara dos conceptos adicionales: (1) la sección puede variar de uno a otro tramo, y esto hay que tenerlo en cuenta al calcular los valores de I/L para cada



$K = \frac{I}{L}$ $\quad \frac{3}{4} \times 2 = (1.5)$ $\quad (3)$ $\quad (2)$

FD	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$ 0
MEP	−6 000	+8 000	−8 000	+3 000	−3 000	+4 800 −7 200
Soltar *A*	0	−2 000 →	−1 000			
MEP reajustados	−6 000	+6 000	−9 000	+3 000	−3 000	+4 800 −7 200
1a. distribución			+2 000	+4 000	−1 080	−720
Transmisión				−540	+2 000	−360
2a. distribución			+180	+360	+1 200	−800
Transmisión				−600	+180	−400
3a. distribución			+200	+400	−108	−72
Transmisión				−54	+200	−36
4a. distribución			+18	+36	−120	−80
Σ	−6 000	+6 000	−6 602	+6 602	−3 128	+3 128 −7 996

Solución (a) Procedimiento normal

FD	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$ 0
MEP	−6 000	+8 000	−8 000	+3 000	−3 000	+4 800 −7200
1a. distribución	0	−2 000	+1 667	+3 333	−1 080	−720
Transmisión			−1 000	−540	+1 667	−360
2a. distribución			+513	+1 027	−1 000	−667
Transmisión				−500	+514	−334
3a. distribución			+167	+333	−308	−206
Transmisión				−154	+167	−103
4a. distribución			+51	+103	−100	−67
Σ	−6 000	+6 000	−6 602	+6 602	−3 140	+3 140 −7 997

Solución (b) Otro procedimiento

Figura 8-25.

uno *. (2) El extremo en voladizo no ofrece resistencia alguna al giro. Por tanto, cuando se suelta el nudo A, el momento no equilibrado de 2000 N · m debe distribuirse como cero a la izquierda de A y como -2000 N · m a su derecha. Cuando se transmite a B -1000 N · m, los momentos reajustados del extremo fijo son como se muestra debajo de la primera doble línea. Por otra parte, para no transmitir momentos al nudo A se ha multiplicado K_{AB} por $\frac{3}{4}$ y se ha aplicado el procedimiento abreviado explicado en el ejemplo anterior, como se ve en la figura 8-25. El extremo empotrado D absorbe los momentos que le transmite C, sin transmitir él ninguno en sentido contrario.

Otra forma de distribución, que se observa en la figura 8-25b, consiste en distribuir momentos en todos los nudos y transmitir después. Este procedimiento, preferido por algunos ingenieros, conduce prácticamente a los mismos resultados.

PROBLEMAS

Mediante el método de la distribución de momentos, calcular los momentos en los soportes en las vigas continuas a que se refieren los siguientes problemas.

877. Véase problema 814.

878. Véase problema 826.

879. Véase problema 827.

880. Véase problema 845.

881. Véase problema 846.

882. Véase problema 849.

883. Véase problema 853.

884. Véase problema 856.

885. Resolver el problema 856 si el momento de inercia varía de uno a otro tramo de manera que la rigidez relativa del tramo 1 sea 2, del 2, 1.5 y del 3, 1.

886. Calcular los momentos en los apoyos en el problema 825, si los extremos de la viga están empotrados en lugar simplemente de apoyados.

Resp. $M_1 = -73$ N·m;
$M_2 = -2100$ N·m;
$M_3 = -2380$ N·m;
$M_4 = -1310$ N·m

RESUMEN

La forma general de la ecuación de los tres momentos es

$$M_1L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3L_2 + \frac{6A_1\bar{a}_1}{L_1} + \frac{6A_2\bar{b}_2}{L_2} = 6EI\left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}\right) \qquad (8\text{–}1)$$

Los términos de la forma $A\bar{a}/L$ se encuentran, para varios tipos usuales de cargas, en la Tabla 8-1.

* Casos más complicados en los que la sección recta varía a lo largo del tramo han sido tratados por Cross y Morgan en *Continuous Frames of Reinforced Concrete*, Wiley, Nueva York, 1932. (En estos casos, naturalmente, ni el momento transmitido es un medio ni la rigidez de la viga es $4EI/L$.)

Para vigas continuas en las que los apoyos están al mismo nivel, h_1 y h_3 son nulas, y mediante la ecuación de los tres momentos se determinan fácilmente los momentos en los apoyos. Si un extremo está empotrado se puede tratar como si a continuación siguiera un tramo imaginario.

Para obtener deflexiones, se escribe la ecuación de los tres momentos entre los puntos 1, 2 y 3, de manera que una (o las dos) de h_1 y h_3 sean igual a la deflexión pedida. Generalmente dos de los puntos se eligen sobre apoyos, y el tercero en el punto cuya deflexión se trata de hallar. Hay que conocer o calcular previamente los valores de los momentos en estos tres puntos.

Otro método de determinación de los momentos de continuidad, tanto en vigas continuas como en cualquier estructura, es el de distribución de momentos o método de Cross. Para aplicarlo, cada tramo se considera primero como perfectamente empotrado en sus extremos, y se calculan los valores de los momentos de empotramiento. Se deja libre entonces cada nudo, y el momento no equilibrado que resulta se distribuye entre las barras que concurren en él y, de acuerdo con la sección 8-8, se transmiten momentos al otro extremo de cada barra.

Como se explica en la sección 8-5, una vez calculados los momentos de continuidad es muy fácil trazar el diagrama de fuerza cortante del que, como se vio en el Capítulo 4, se deduce el valor máximo y más peligroso del momento flexionante y de la fuerza cortante.

9 esfuerzos combinados

9-1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se han estudiado tres tipos básicos de cargas: axiales, de torsión y de flexión. Cada uno de ellos se consideró que actuaba aisladamente sobre la estructura. En este capítulo se tratan los casos en que actúan conjuntamente dos o más de estos esfuerzos. Los tres tipos fundamentales de cargas y sus correspondientes fórmulas se resumen en las siguientes:

Esfuerzo por carga axial: $\sigma_a = \dfrac{P}{A}$

Esfuerzo por carga de torsión: $\tau = \dfrac{T\rho}{J}$

Esfuerzo por carga de flexión: $\sigma_f = \dfrac{My}{I}$

Hay cuatro combinaciones posibles de cargas: (1) axial y flexión; (2) axial y torsión; (3) torsión y flexión, y (4) axial, torsión y flexión. Comencemos por el caso (1) de combinación de esfuerzos axiales y por flexión, ya que es el más sencillo pues intervienen únicamente esfuerzos normales σ. En todos los demás casos intervienen esfuerzos normales y cortantes, por lo que requieren un estudio preliminar (Secs. 9-4 a 9-7).

9-2. COMBINACIÓN DE ESFUERZOS AXIALES Y POR FLEXIÓN

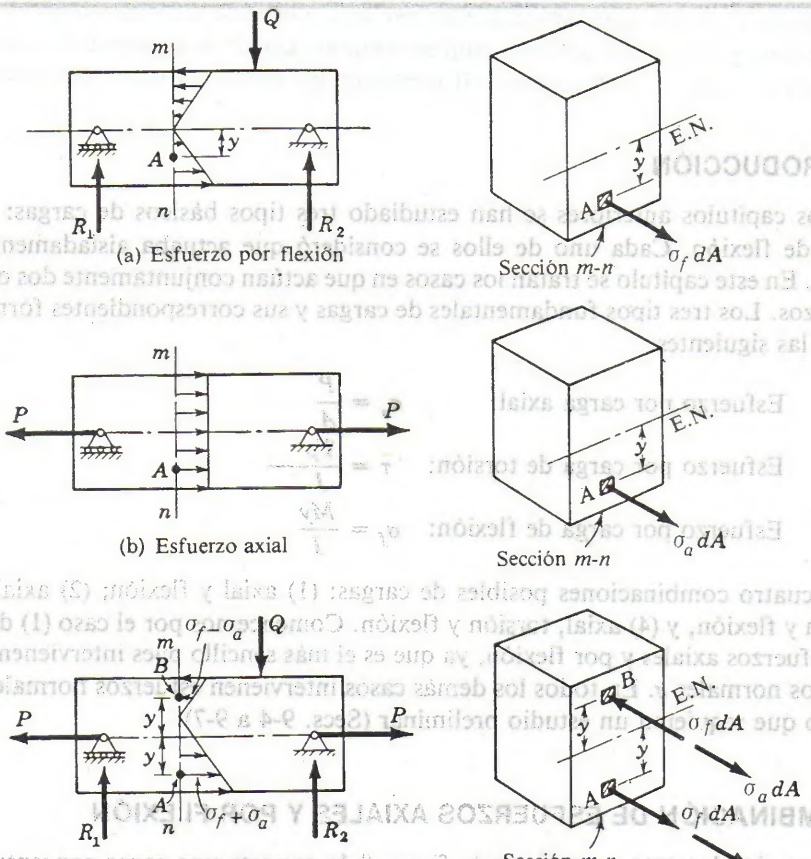
La viga simplemente apoyada de la figura 9-1a soporta una carga concentrada Q. Supongamos que la viga está unida a los apoyos en el centro de gravedad de las secciones extre-

mas. En el punto A, el esfuerzo normal de flexión es $\sigma_f = My/I$. Es una tensión dirigida perpendicularmente al plano de la sección recta, como se indica en la figura, y la fuerza que actúa sobre un elemento diferencial de área A es $\sigma_f\, dA$.

Si la misma viga apoyada en la misma forma se somete solamente a la acción de una fuerza axial P (Fig. 9-1b) los esfuerzos axiales se distribuyen uniformemente sobre cualquier sección transversal (Sec. 1-3). Su valor es $\sigma_a = P/A$ y también es una tensión perpendicular a la sección recta. La fuerza que actúa en el mismo elemento A es $\sigma_a\, dA$.

Si ambas cargas actúan simultáneamente en la viga (Fig. 9-1c) el esfuerzo resultante en A se obtiene como superposición de los dos efectos aislados. En efecto, la fuerza resultante que actúa sobre el elemento diferencial A es el vector suma de las dos fuerzas coaxiales $\sigma_a\, dA$ y $\sigma_f\, dA$. Dividiendo esta fuerza entre el área dA se deduce el esfuerzo resultante $\sigma = \sigma_a + \sigma_f$ dirigido perpendicularmente a la sección recta.

Análogamente, en un punto B de la misma sección, también a distancia y de la línea neutra, pero por encima de ella, el esfuerzo resultante es la diferencia entre los esfuerzos axial y por flexión. Si a los esfuerzos de tensión se les da signo positivo y a los de compre-

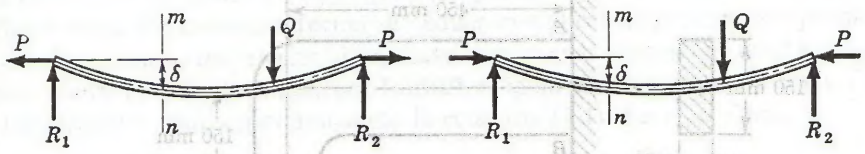


(a) Esfuerzo por flexión

(b) Esfuerzo axial

(c) Esfuerzos axial y por flexión combinados (Obsérvese el corrimiento de la línea de esfuerzo nulo)

Figura 9-1.



(a) Tensión axial (b) Compresión axial

Figura 9-2.

sión, negativo, el esfuerzo resultante en un punto cualquiera de la viga viene dado por la suma algebraica de los esfuerzos axial y de flexión en aquel punto:

$$\sigma = \sigma_a \pm \sigma_f$$

o bien,

$$\sigma = \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} \frac{P}{A} \pm \frac{My}{I} \tag{9-1}$$

Obsérvese que el esfuerzo axial puede ser de tensión o de compresión. Este es el motivo de poner los signos positivo y negativo delante de P/A, y el rodearlos con un círculo es para recordar que el esfuerzo axial es uniforme en toda la sección recta.

En la ecuación (9-1) se ha aplicado el método de superposición. Ahora bien, hay que tener en cuenta la modificación que la carga axial puede introducir en el momento flexionante, como se aclara en el ejemplo siguiente. La figura 9-2 muestra, muy exageradamente, la flexión producida por una carga transversal Q en una viga. Si P es de tensión, como en la figura 9-2a, el momento flexionante producido por P en cualquier sección, y que vale $P\delta$, tiende a disminuir el momento producido por Q y, por tanto, reduce los esfuerzos por flexión, y al contrario ocurre si se trata de una compresión axial. En otras palabras, los valores dados por la ecuación (9-1) son algo mayores que los reales si P es de tensión, y menores que los reales si P es una compresión. Este efecto es despreciable en muchas ocasiones si las barras o elementos de la estructura son tan rígidos que los esfuerzos producidos por $P\delta$ son muy pequeños frente a los producidos por el momento flexionante de las fuerzas transversales Q, es decir, si las deflexiones son muy pequeñas. Pero si las barras son largas y flexibles, el efecto puede tener su importancia y deben emplearse otros procedimientos más exactos de cálculo.*

PROBLEMA ILUSTRATIVO

901. Un voladizo tiene el perfil indicado en la figura 9-3 y ha de servir de soporte a los cojinetes de unas grandes poleas montadas sobre un eje. La acción del eje es una fuerza de 25 kN dirigida como se indica. Calcular los esfuerzos normales resultantes en los puntos A y B del empotramiento.

* Las columnas se estudian en el Capítulo 11.

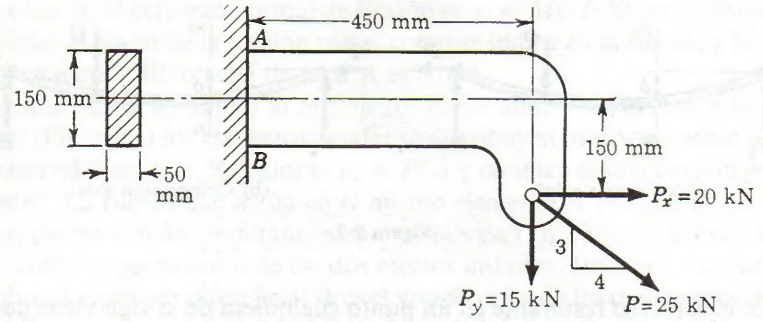


Figura 9-3.

Solución: Se empieza por hallar el momento flexionante debido a P, para lo que se descompone en sus componentes $P_x = 20$ kN y $P_y = 15$ kN y tomando momentos con respecto al eje horizontal que pasa por el centro de gravedad de la sección AB:

$$[M = \Sigma M_{cg})_{\text{der}}] \qquad M = -(15 \times 10^3)(0.450) + (20 \times 10^3)(0.150) = -3750 \text{ N·m}$$

La componente P_y actúa hacia abajo, por lo que produce un momento flexionante negativo, mientras que P_x es de efecto contrario y se considera positivo. El signo negativo, en el momento flexionante total en AB, indica que la curvatura de la viga en el empotramiento es cóncava hacia abajo (Sec. 4-2), por lo que producirá tensión en A y compresión en B. Interpretado ya el signo del momento flexionante, sólo emplearemos su valor absoluto al aplicar la ecuación (9-1).

Para comprobar que el efecto de tensión axial es debido solamente a P_x, aplicando los principios de la mecánica se puede transformar la fuerza aplicada en uno cualquiera de los sistemas de fuerzas equivalentes que indica la figura 9-4. Evidentemente, desplazando P a lo largo de su línea de acción hasta que corte al eje de la viga (Fig. 9-4b), el momento flexionan-

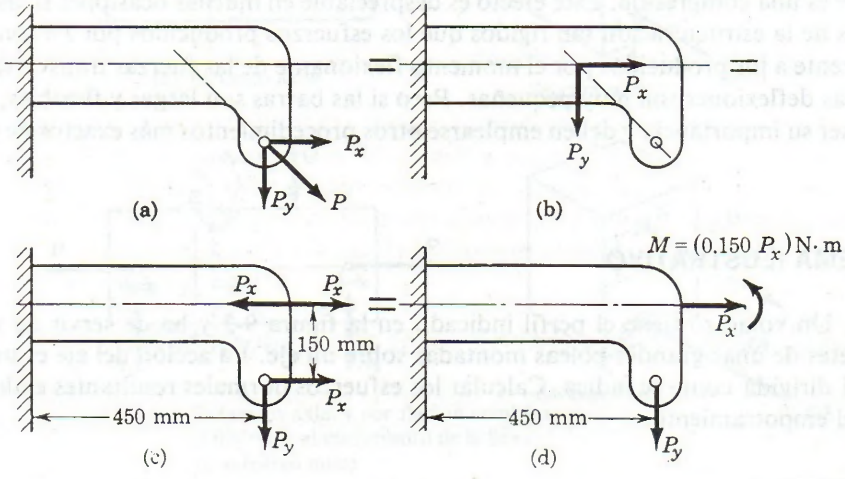


Figura 9-4.

te estará producido solamente por P_y y la fuerza axial será P_x. También se puede añadir un sistema de dos fuerzas iguales y opuestas P_x, figura 9-4c, reduciendo el sistema al indicado en la figura 9-4d. De cualquier forma se deduce que el esfuerzo axial está producido solamente por P_x, mientras que en este último caso el momento flexionante en el empotramiento, que sería $-0.450P_y$ más el par aplicado $0.150P_x$ es igual al valor calculado antes. Calculemos ahora los esfuerzos resultantes aplicando la ecuación (9-1). En A se tiene:

$$\left[\sigma = \frac{P}{A} + \left(\frac{Mc}{I} = \frac{6M}{bh^2}\right)\right] \qquad \sigma_A = \frac{20 \times 10^3}{(0.050)(0.150)} + \frac{6(3750)}{(0.050)(0.150)^2}$$

$$= (2.67 \times 10^6) + (20.00 \times 10^6) = 22.67 \text{ MPa} \quad \textbf{Resp.}$$

y en B, donde el esfuerzo por flexión es de compresión,

$$\left[\sigma = \frac{P}{A} - \left(\frac{Mc}{I} = \frac{6M}{bh^2}\right)\right] \qquad \sigma_B = \frac{20 \times 10^3}{(0.50)(0.150)} - \frac{6(3750)}{(0.050)(0.150)^2}$$

$$= (2.67 \times 10^6) - (20.00 \times 10^6) = -17.33 \text{ MPa} \quad \textbf{Resp.}$$

Los signos indican tensión en A y compresión en B.

PROBLEMAS

902. Comparar el esfuerzo máximo en una barra de sección cuadrada, de 10 mm de lado, ligeramente curvada; las fuerzas P actúan a 10 mm del centro de la sección central, como indica la figura P-902, con el esfuerzo máximo producido si la barra fuera perfectamente recta y las fuerzas P se aplicaran axialmente. Este problema es un claro ejemplo del enorme peligro de la flexión lateral en las columnas.

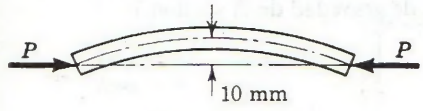


Figura P-902.

Resp. 7 a 1

903. Una varilla de conexión de fundición tiene 40 mm de ancho por 200 mm de altura y 500 mm de longitud. Los esfuerzos admisibles son de 40 MN/m^2 a tensión y 80 MN/m^2 a compresión. Calcular la mayor fuerza de compresión que puede aplicarse a sus extremos a lo largo de un eje longitudinal situado a 150 mm arriba del borde inferior de la pieza.

904. Un elemento de máquina tiene la forma indicada en la figura P-904, con un rebaje que reduce la sección a la mitad, en $A - B$, con el objeto de evitar interferencia con otros elementos. Calcular el esfuerzo de tensión máximo en $A - B$ si (a) la sección es cuadrada, con 160 mm por lado, y (b) si la sección es circular de 160 mm de diámetro.

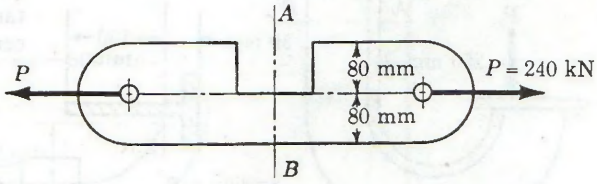


Figura P-904.

Resp. (a) 75.0 MPa; (b) 85.3 MPa

905. Una viga de madera de sección rectangular de 100 mm × 200 mm está apoyada como indica la figura P-905 y soporta una carga P. Calcular el máximo valor de P si el esfuerzo normal no debe exceder de 10 MPa.

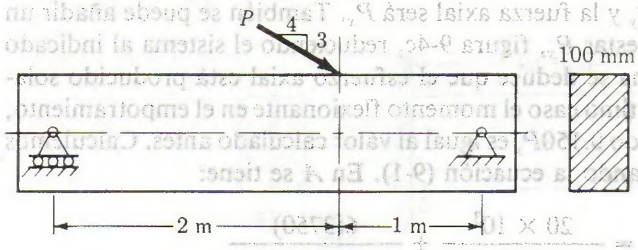


Figura P-905.

906. La barra de acero de la figura P-906 es de sección cuadrada, de 200 mm de lado. Calcular el esfuerzo normal en A y en B.

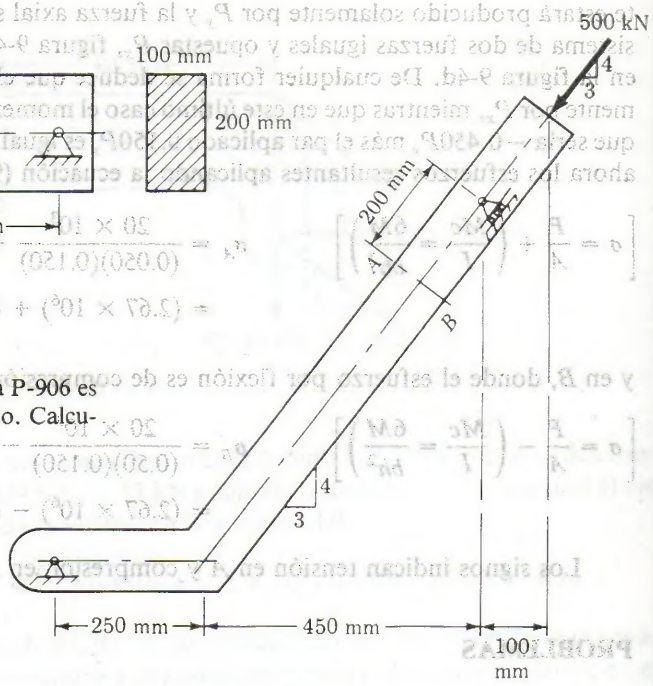


Figura P-906.

Resp. $\sigma_A = -29.2$ MPa; $\sigma_B = 4.2$ MPa

907. Calcular la carga máxima P que se puede aplicar a la plataforma del soporte de fundición de la figura P-907 si $\sigma_t \leq 30$ MN/m^2 y $\sigma_c \leq 70$ MN/m^2.

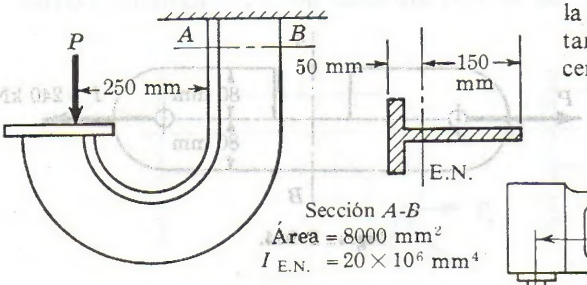


Figura P-907.

Resp. $P = 32.9$ kN

908. Una prensa tiene la estructura de acero fundido que muestra la figura P-908. Calcular la fuerza máxima de prensado que se puede ejercer sin sobrepasar el esfuerzo máximo de 120 MPa en la sección A-B cuyo esquema y datos se indican también en la figura. (1-1 es el eje que pasa por el centro de gravedad de la sección.)

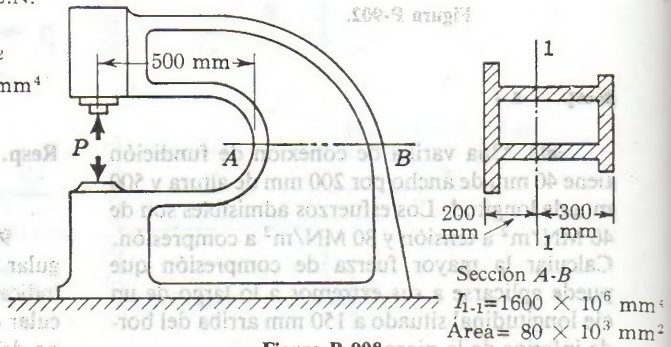


Figura P-908.

909. Una viga de sección rectangular, de 100 mm de ancho por 400 mm de altura, está articulada en A, sujeta mediante un cable CD y sometida a una carga P, como se muestra en la figura P-909. Calcular el máximo valor de P que producirá un esfuerzo normal no mayor de 120 MPa. Descarte la posibilidad de pandeo.

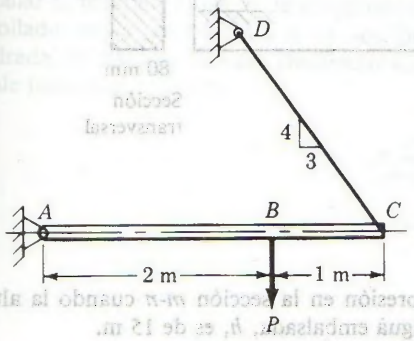


Figura P-909.

Resp. $P = 457$ kN

910. La viga inclinada de la figura P-910 está sujeta mediante un perno en A y sobre rodillos en C. Si su sección es rectangular, de 100 mm × 300 mm, calcular el esfuerzo de compresión máximo desarrollado en la viga.

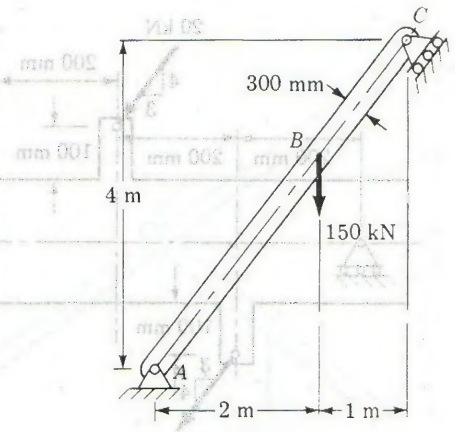


Figura P-910.

Resp. $\sigma_c = 70.7$ MPa

911. Si $P = 100$ kN en la ménsula de la figura P-911 calcular los máximos valores del esfuerzo a tensión y compresión en la sección A-B.

912. Determinar la máxima fuerza P que se puede aplicar en el problema anterior si los esfuerzos admisibles en A-B son de 8 y 12 MPa a tensión y compresión, respectivamente.

Resp. $P = 12.1$ kN

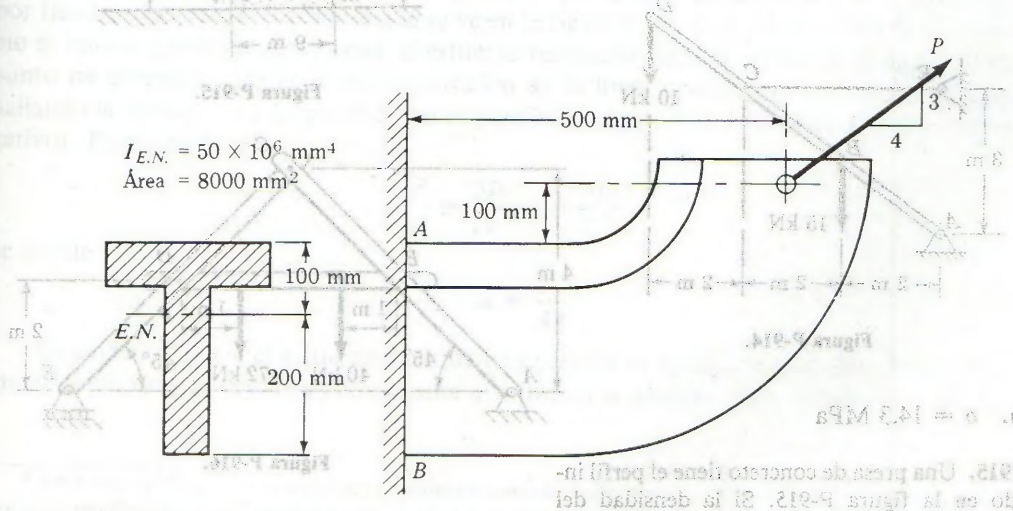


Figura P-911 y P-912.

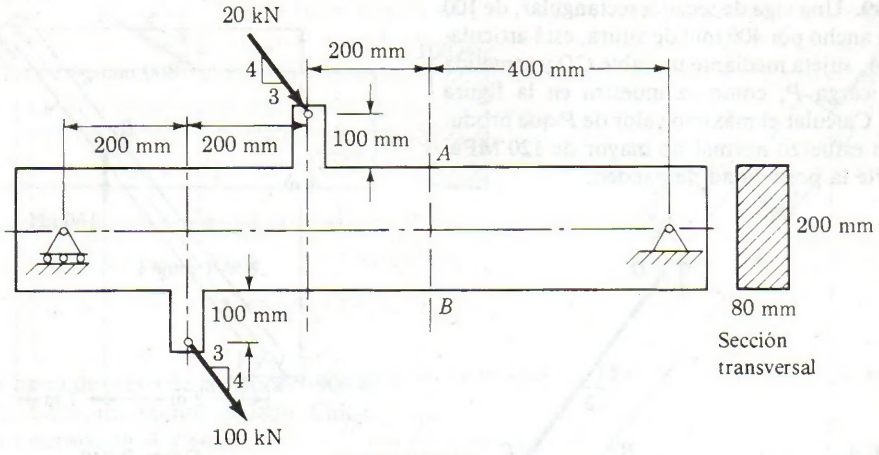


Figura P-913.

913. Calcular los esfuerzos en A y en B en la pieza cargada como indica la figura P-913.

Resp. $\sigma_A = -14.1$ MPa; $\sigma_B = 5.10$ MPa

914. Una viga de madera, AD, de 100 mm de espesor y 300 mm de peralte, cargada como se indica en la figura P-914, está articulada en su extremo inferior y sujeta por un cable horizontal CE. Determinar el máximo esfuerzo de compresión en la viga.

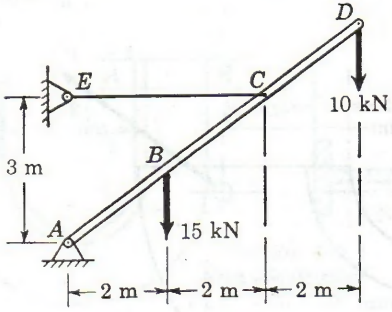


Figura P-914.

Resp. $\sigma = 14.3$ MPa

915. Una presa de concreto tiene el perfil indicado en la figura P-915. Si la densidad del concreto es 2400 kg/m^3 y la del agua, 1000 kg/m^3, determinar el máximo esfuerzo de compresión en la sección m-n cuando la altura del agua embalsada, h, es de 15 m.

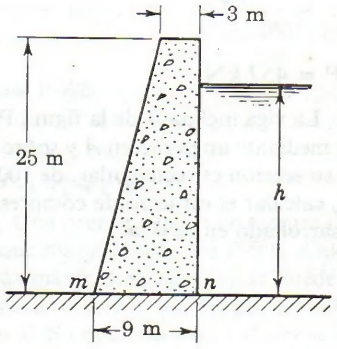


Figura P-915.

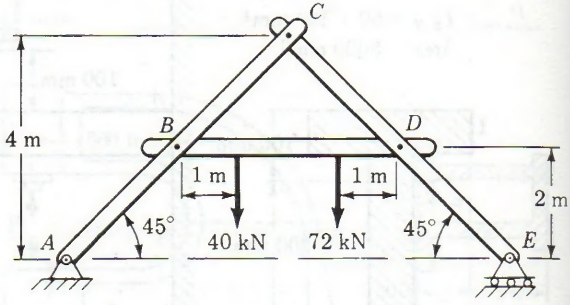


Figura P-916.

916. Dado el marco articulado de la figura P-916, calcular el esfuerzo normal máximo en el

miembro *BD* si su sección es de 100 mm de ancho por 400 mm de altura. Despreciar los pesos de todos los miembros.

Resp. $\sigma = 25.4$ MPa

917. La estructura mostrada en la figura P-917 está articulada a apoyos fijos en *A* y en *E*. Calcular el máximo esfuerzo de compresión desarrollado en la barra *BDE* si su sección es cuadrada, de 200 mm de lado. Despreciar los pesos de todos los miembros.

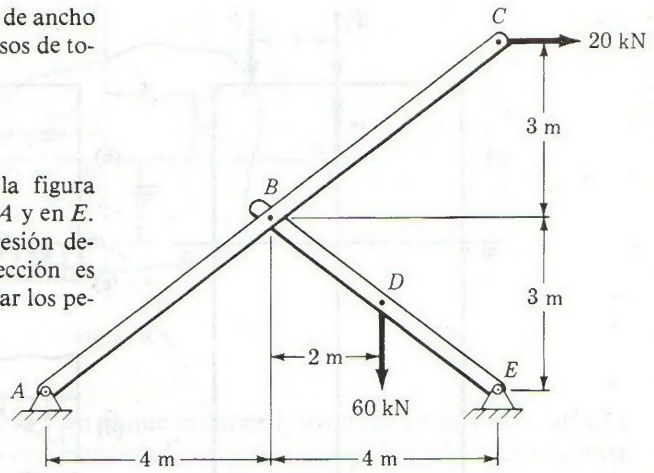


Figura P-917.

9-3. NÚCLEO DE UNA SECCIÓN. CARGAS APLICADAS FUERA DE LOS EJES DE SIMETRÍA

Un caso particular de esfuerzos axiales y de flexión combinados es el que representa la figura 9-5a en la que un puntal de pequeña longitud* soporta una carga *P* aplicada con una cierta excentricidad *e* con respecto a uno de los ejes principales de la sección.† La superposición de un sistema nulo, dos fuerzas iguales y opuestas P_1 y P_2 del mismo módulo que *P*, aplicadas en el centro de gravedad de la sección, da lugar al sistema equivalente indicado en la figura 9-5b. Los esfuerzos en una sección cualquiera *m-n* son el resultado de la superposición del esfuerzo axial $\sigma_a = P/A$ de compresión, que aparece en la figura 9-5c, y del esfuerzo por flexión $\sigma_f = Mc/I = (Pe)c/I$ que se ve en la figura 9-5d. Si el esfuerzo por flexión máximo es mayor que el esfuerzo axial, el esfuerzo resultante tiene la forma de la figura 9-5e. El punto de esfuerzo nulo es la nueva posición de la línea neutra y se encuentra fácilmente hallando la distancia *a* a la que el esfuerzo por flexión (positivo) es igual al esfuerzo axial (negativo). Por tanto,

$$\frac{P}{A} = \frac{My}{I} = \frac{(Pe)a}{I}$$

de donde

$$a = \frac{I}{Ae} \tag{9-2}$$

Es evidente que si el esfuerzo axial de compresión es igual o mayor que el máximo esfuerzo de flexión, no existirá zona alguna que trabaje a tensión. Para conseguir esto en una

* Un poste o puntal corto es aquel cuya longitud no excede de diez veces su dimensión lateral menor; las deformaciones por flexión son tan pequeñas que sus efectos pueden despreciarse. El caso de elementos esbeltos cargados excéntricamente se examina en la sección 11-6.

† Los ejes principales son los ejes de máximo y mínimo de inercia.

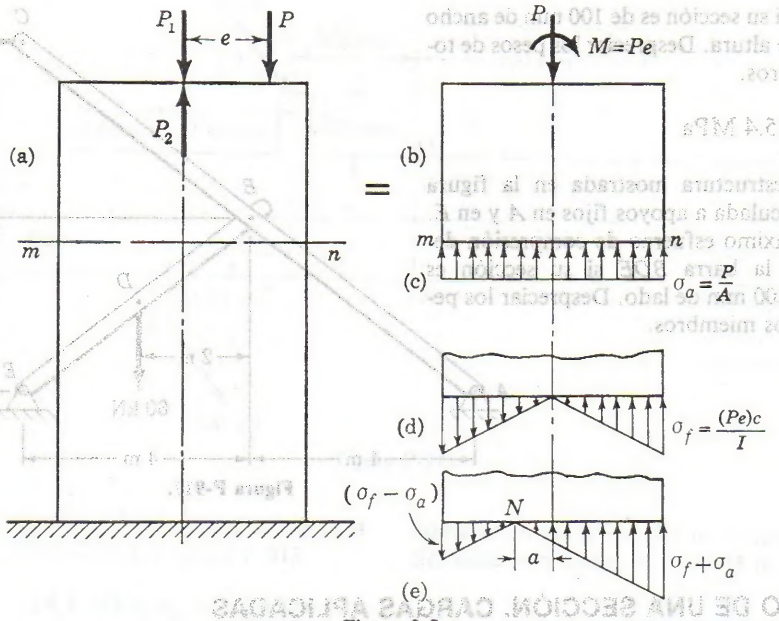


Figura 9-5.

sección rectangular de ancho b y altura h con P aplicada con una excentricidad e (sobre la altura h, figura 9-6) se ha de tener:

$$\frac{P}{A} = \frac{Mc}{I} = \frac{Pe\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{bh^3}{12}}$$

En estas condiciones, la excentricidad máxima para no tener tensión es:

$$e = \frac{h}{6} \tag{9-3}$$

Esta fórmula es el fundamento de la regla usual en diseño de obras de ladrillo o de otros materiales muy poco resistentes a tensión, de que la resultante de las cargas debe pasar por el tercio central de la sección.

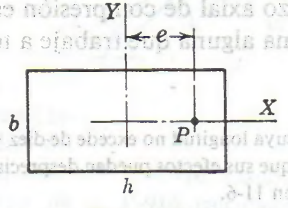


Figura 9-6.

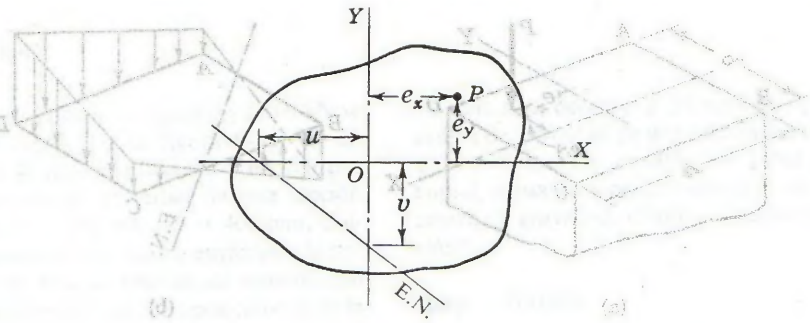


Figura 9-7.

Consideremos ahora el caso general* en el que la carga P se aplica en un punto arbitrario de una sección cualquiera, siendo sus coordenadas e_x y e_y con respecto a los ejes principales de la sección, como indica la figura 9-7. Los momentos de P con respecto a los ejes X y Y son, respectivamente, Pe_y y Pe_x. Por superposición, el esfuerzo σ en un punto cualquiera (x, y) de la sección viene dado por:

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{(Pe_x)x}{I_y} - \frac{(Pe_y)y}{I_x} \tag{9-4}$$

Para determinar la línea neutra, o línea de esfuerzo nulo, se resuelve la ecuación $\sigma = 0$. Teniendo en cuenta que $I_y = Ar_y^2$ e $I_x = Ar_x^2$, siendo r_y y r_x los radios de giro respecto de los ejes Y y X, se tiene:

$$0 = 1 + \frac{e_x}{r_y^2}x + \frac{e_y}{r_x^2}y \tag{a}$$

que es la ecuación de una recta cuyas intersecciones con los ejes (ordenada y abscisa en el origen) se obtienen anulando y para obtener u, y luego x para obtener v, en la ecuación (a). Se tiene:

$$u = -\frac{r_y^2}{e_x} \quad \text{y} \quad v = -\frac{r_x^2}{e_y} \tag{b}$$

Quiere esto decir que E.N. pasa por el cuadrante opuesto aquel adonde actúa P y, en general, no es perpendicular a la dirección OP. Por ejemplo, en la figura 9-8b se representa la distribución de esfuerzos en una sección rectangular cuando la fuerza P se aplica en un punto fuera de los ejes principales (Fig. 9-8a). Si se calculan los esfuerzos en A, B y C, la intersección de la línea neutra con AB y con BC se calcula por semejanza de triángulos. Obsérvese que la intersección puede estar en las prolongaciones (Fig. 9-8c).

Vamos a determinar ahora las coordenadas e_x y e_y de la carga P para las que la línea neutra pase por una esquina B, como en la figura 9-8c. Sustituyendo $\sigma = 0$, $x = -h/2$, y $y =$

* Realmente esto constituye una aplicación de la flexión asimétrica que se estudia en la sección 13-9.

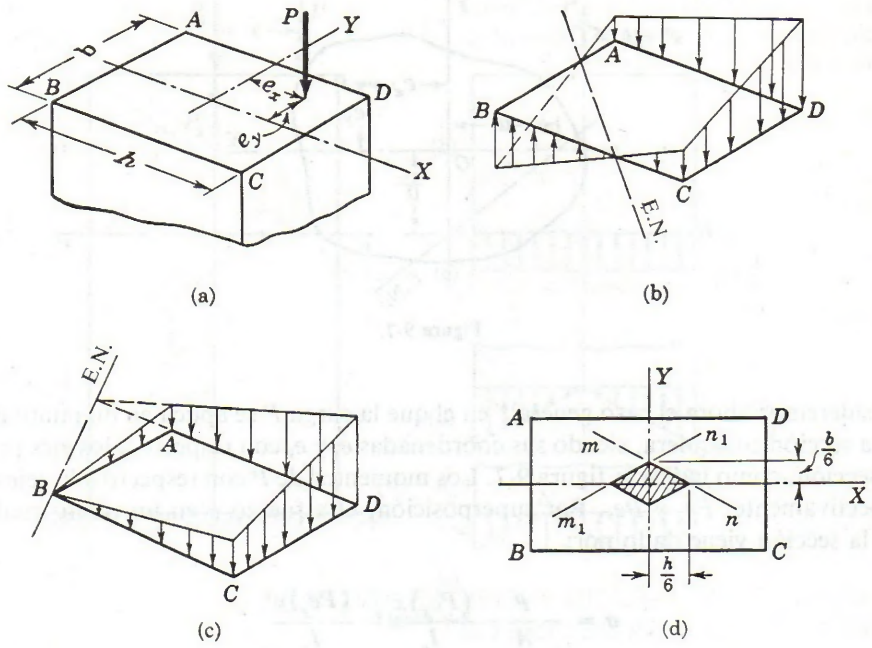


Figura 9-8. Línea neutra para una carga P aplicada excéntricamente, y núcleo de una sección rectangular.

$-b/2$ en la ecuación (9-4) resulta:

$$0 = -\frac{P}{bh} + \frac{(Pe_x)\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{bh^3}{12}} + \frac{(Pe_y)\left(\frac{b}{2}\right)}{\frac{hb^3}{12}}$$

Simplificando,

$$\frac{e_x}{h/6} + \frac{e_y}{b/6} = 1 \qquad (c)$$

que es la ecuación de la recta m-n de la figura 9-8d, que corta a los ejes X y Y en $h/6$ y $b/6$, respectivamente. Esta línea es el lugar geométrico de los puntos de aplicación de P que producen un esfuerzo nulo en B. Análogamente, la recta m_1n_1 es el lugar geométrico de los puntos en los que, aplicada P, se produce un esfuerzo nulo en C. Continuando el procedimiento, es evidente que ningún punto de la sección podrá estar sometido a tensión si la carga se aplica dentro o en el borde del rombo rayado de la figura, ya que la línea neutra pasará o fuera de la sección, o por una esquina, o por un borde rectilíneo. Esta zona de la sección se llama *núcleo* de la misma.

Se demuestra de forma análoga que el núcleo de una sección circular es otro círculo de diámetro igual a un cuarto del diámetro de la sección.

PROBLEMAS

918. Una fuerza de compresión de 80 kN se aplica, como representa la figura 9-8a, en un punto situado 40 mm a la derecha y 60 mm por encima del centro de gravedad de una sección rectangular de $b = 200$ mm y $h = 400$ mm. Calcular los esfuerzos en las cuatro esquinas y la posición de la línea neutra. Hágase, de acuerdo con las soluciones obtenidas, un esquema como el de la figura 9-8b.

919. Con los datos del problema 918, ¿qué carga adicional habría que aplicar en el centro de gravedad de la sección para que no aparezcan esfuerzos de tensión en punto alguno de la misma?

Resp. 112 kN

920. Una fuerza de compresión de 100 kN se aplica, como indica la figura 9-8a, en un punto 70 mm a la derecha y 30 mm por encima del centro de gravedad de una sección rectangular de $b = 150$ mm y $h = 300$ mm. ¿Qué carga adicional, actuando normalmente a la sección en su centro de gravedad, elimina los esfuerzos de tensión?

Resp. 160 kN

921. Determinar y dibujar el núcleo de la sección de una sección W360 × 122.

Resp. Una figura en forma de diamante cuyas abscisas y ordenadas al origen son ± 30.9 mm y ± 130 mm respectivamente.

922. Resolver el problema anterior para una sección W310 × 500.

9-4. VARIACIÓN DEL ESFUERZO CON LA ORIENTACIÓN DEL ELEMENTO

En la sección 1-2 se vio que la magnitud y tipo de esfuerzo dependía de la orientación o inclinación del elemento que se considerara. A modo de recordatorio, imaginemos el sólido de la figura 9-9a sometido a la acción de unas fuerzas en equilibrio y hagamos pasar por el mismo punto dos secciones de exploración *a-a* y *b-b* siendo *a-a* perpendicular a la dirección de la resultante R de P_1 y P_2, como en la figura 9-9b, y *b-b* inclinada con respecto a R, como en la figura 9-9c. El elemento rayado de la figura 9-9b está sometido únicamente a esfuerzo normal, mientras que el elemento (en el mismo punto) de la figura 9-9c queda sometido a esfuerzos normal y cortante, producidos por N y T, respectivamente. Así pues, para un mismo punto de un sólido sometido a un estado de esfuerzo (situado aquí en la intersección de *a-a* y *b-b*), los esfuerzos varían según la orientación del elemento diferencial que se considere en dicho punto.

En las secciones siguientes se estudia cómo varían los esfuerzos con la orientación del elemento. Esto es muy importante y lo que se persigue es determinar en qué planos se presentan los esfuerzos máximos y calcular sus valores.

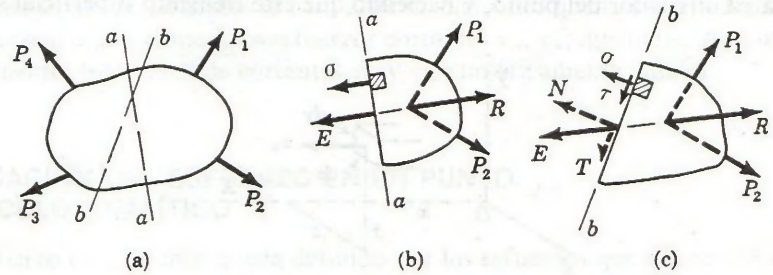


Figura 9-9. El esfuerzo en un punto varía con la inclinación del plano que se hace pasar por el mismo.

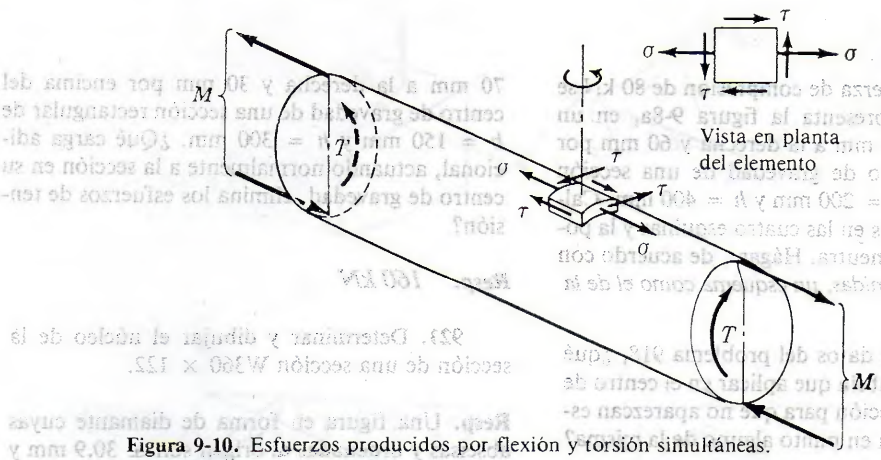


Figura 9-10. Esfuerzos producidos por flexión y torsión simultáneas.

En general, no es posible hallar directamente los valores de los esfuerzos en un plano que tenga una dirección cualquiera. En las vigas, por ejemplo, la fórmula de la flexión da los valores del esfuerzo normal que aparece en un plano perpendicular al eje de la viga. También se puede calcular el esfuerzo cortante en estos planos. En la torsión, la fórmula correspondiente da el valor del esfuerzo cortante en planos perpendiculares al eje de la barra. Así, pues, en una barra sometida simultáneamente a flexión y torsión, como en la figura 9-10, se calculan los esfuerzos correspondientes a ambos tipos de esfuerzo, pero solamente si los elementos están orientados como indica la figura, aunque el estudio realizado sobre la figura 9-9 indique que si se gira el elemento de la figura 9-10 alrededor del eje señalado existirá una determinada posición en la que el esfuerzo normal sea máximo.

Hay dos métodos o procedimientos para la determinación de esta posición y del valor que toma el esfuerzo normal máximo. Uno es analítico y el otro es gráfico, basado en el *círculo de Mohr*. Se hace, en primer lugar, el estudio analítico (Sec. 9-6) para demostrar luego la construcción y validez del círculo de Mohr (Sec. 9-7). No es preciso retener en la memoria las fórmulas de la sección 9-6.

9-5. ESFUERZO EN UN PUNTO

El esfuerzo medio sobre una superficie se obtiene dividiendo la fuerza entre el área sobre la que actúa. Si el esfuerzo medio es constante sobre toda la superficie, se llama uniforme. Si no es uniforme, se obtiene el esfuerzo en un punto considerando la fuerza que actúa sobre un elemento de área alrededor del punto, y haciendo que este elemento superficial sea cada vez

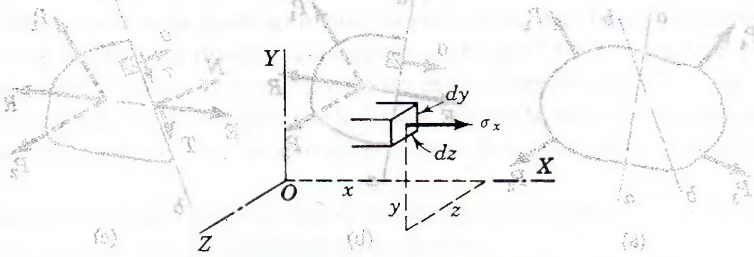


Figura 9-11. Esfuerzo en un punto.

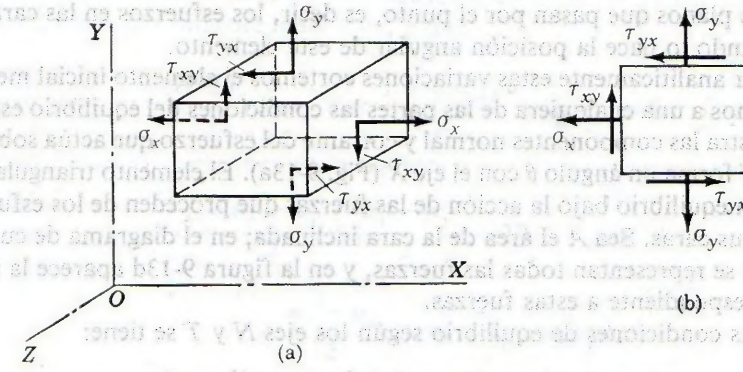


Figura 9-12. Componentes del esfuerzo.

menor tendiendo a cero. En otras palabras, el *esfuerzo en un punto* define en realidad el esfuerzo medio uniformemente distribuido sobre un elemento diferencial de área. En la figura 9-11, por ejemplo, el esfuerzo normal en la dirección X que existe en un punto de coordenadas, x, y, z, mide el esfuerzo uniforme que actúa sobre el área diferencial $dydz$.

Cuando el esfuerzo en un punto se define por las componentes que actúan en varias direcciones en el espacio, se puede representar por los esfuerzos que actúan sobre un elemento diferencial de volumen que rodee el punto considerado. Por ejemplo, sean σ_x, σ_y, τ_{xy} los esfuerzos en un punto. La figura 9-12a muestra estos esfuerzos actuando sobre un elemento diferencial que rodea al punto, aunque se suele representar en elevación (Fig. 9-12b). Obsérvese que también hay un esfuerzo cortante τ_{yx} que actúa en la cara Y en la dirección de X. Esto se debe a que un esfuerzo cortante que actúa sobre un plano induce en un plano perpendicular al primero, otro esfuerzo igual, como se dijo en la sección 5-7.

La notación que se emplea para los esfuerzos *normales* es la letra griega σ con un subíndice correspondiente a la cara sobre la que actúa, tomando la cara el nombre del eje al que es perpendicular, por ejemplo, la cara X es la perpendicular al eje X. El esfuerzo *cortante* se representa por la letra griega τ con un doble subíndice, correspondiendo el primero a la cara sobre la que actúa y el segundo a la dirección en que lo hace dentro de aquella cara. Así pues el esfuerzo cortante en la cara X y que actúa en la dirección de Y se representa por τ_{xy}, y el que actúa en la cara Y y en la dirección de X, se representa por τ_{yx}. Se verifica $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

En esta sección y en las sucesivas, sólo se considera el estado plano o bidimensional de esfuerzos, en el que los esfuerzos actúan paralelamente a un plano, tal como el XY. En un estado tridimensional de esfuerzos la cara Z de un elemento queda sometida a la acción de un esfuerzo normal σ_z, así como a los esfuerzos cortantes τ_{zx}, τ_{zy}, que inducen en las caras X y Y, respectivamente, los esfuerzos cortantes τ_{xz} y τ_{yz} numéricamente iguales.

9-6. VARIACIÓN DEL ESFUERZO EN UN PUNTO. CÁLCULO ANALÍTICO

El esfuerzo en un punto queda definido por los esfuerzos que actúan sobre las caras del elemento que rodea a dicho punto. Como se dijo en la sección 9-4, los esfuerzos varían con la

orientación de los planos que pasan por el punto, es decir, los esfuerzos en las caras del elemento varían cuando lo hace la posición angular de este elemento.

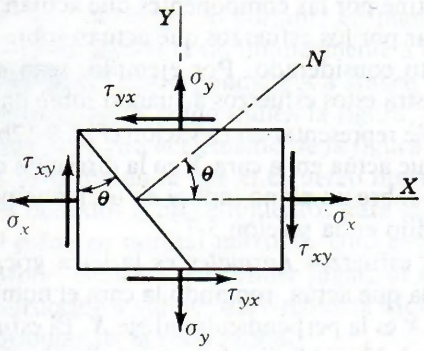
Para expresar analíticamente estas variaciones cortemos el elemento inicial mediante un plano, y apliquemos a una cualquiera de las partes las condiciones del equilibrio estático. La figura 9-13b muestra las componentes normal y cortante del esfuerzo que actúa sobre un plano cuya normal N forma un ángulo θ con el eje X (Fig. 9-13a). El elemento triangular de la figura 9-13b está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que proceden de los esfuerzos que existen en todas sus caras. Sea A el área de la cara inclinada; en el diagrama de cuerpo libre de la figura 9-13c se representan todas las fuerzas, y en la figura 9-13d aparece la reducción en un punto correspondiente a estas fuerzas.

Aplicando las condiciones de equilibrio según los ejes N y T se tiene:

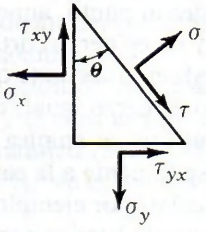
$$[\Sigma N = 0] \qquad A\sigma = (\sigma_x A \cos\theta)\cos\theta + (\sigma_y A \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta - (\tau_{xy} A \cos\theta)\operatorname{sen}\theta - (\tau_{yx} A \operatorname{sen}\theta)\cos\theta \qquad (a)$$

y

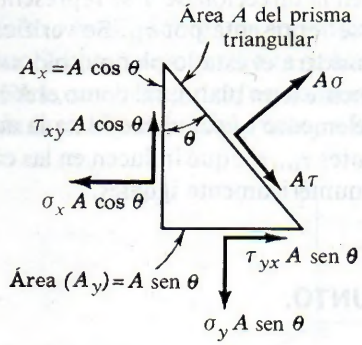
$$[\Sigma T = 0] \qquad A\tau = (\sigma_x A \cos\theta)\operatorname{sen}\theta - (\sigma_y A \operatorname{sen}\theta)\cos\theta + (\tau_{xy} A \cos\theta)\cos\theta - (\tau_{yx} A \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta \qquad (b)$$



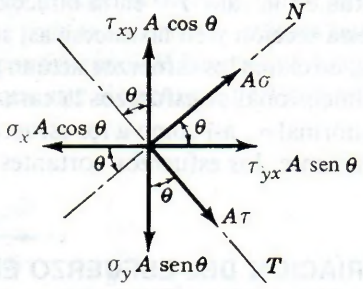
(a) Estado inicial de esfuerzo



(b) Esfuerzos que actúan en el prisma triangular



(c) Diagrama de cuerpo libre



(d) Diagrama de las fuerzas en un punto

Figura 9-13. Variación de las componentes del esfuerzo.

Dividiendo ambos miembros de esta ecuación entre el factor común A, teniendo en cuenta que τ_{xy} es numéricamente igual a τ_{yx}, y que

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \quad \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta$$

las ecuaciones (a) y (b) se escriben en la forma:

$$\sigma = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\operatorname{sen}2\theta \tag{9-5}$$

y

$$\tau = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\operatorname{sen}2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{9-6}$$

Los planos en los que aparecen los esfuerzos normales máximo y mínimo se obtienen anulando la derivada de (9-5) respecto de θ. Por tanto:

$$\tan 2\theta = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{9-7}$$

Análogamente, los planos de esfuerzo cortante máximo quedan definidos por:

$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{9-8}$$

La ecuación (9-7) da dos valores de 2θ que difieren en 180°, por lo que los planos de esfuerzo normal máximo y mínimo son perpendiculares entre sí. Lo mismo ocurre en la ecuación (9-8) con los planos de esfuerzo cortante máximo, que están también a 90°.

Los planos de esfuerzo cortante nulo se determinan haciendo $\tau = 0$ en la ecuación (9-6), es decir,

$$\tan 2\theta = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

idéntica a (9-7). Por consiguiente, *los esfuerzos normales máximo y mínimo tienen lugar en los planos de esfuerzo cortante nulo*. Los esfuerzos normales máximo y mínimo se llaman *esfuerzos principales*, representándose a veces por p y q.

La relación de la ecuación (9-8) es recíproca y de signo contrario a la ecuación (9-7), lo que indica que los valores de 2θ definidos por ambas difieren en 90°, esto es, *los planos de esfuerzo cortante máximo están inclinados 45° respecto de los planos de los esfuerzos principales.*

Sustituyendo los valores de 2θ de las ecuaciones (9-7) y (9-8) en las ecuaciones (9-5) y (9-6) se obtienen las siguientes expresiones de los esfuerzos principales y del esfuerzo cortante máximo:

$$(\sigma)_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{9-9}$$

$$(\tau)_{\text{máx}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{9-10}$$

Haciendo un estudio análogo para un plano cuya normal sea perpendicular a N, las componentes del esfuerzo en este plano perpendicular vienen dadas por:

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{9-5a}$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{9-6a}$$

De las ecuaciones (9-5) y (9-5*a*) se deduce que la suma de los esfuerzos normales que actúan sobre dos planos cualesquiera perpendiculares entre sí es constante e igual a $\sigma_x + \sigma_y$. Por otra parte, comparando las ecuaciones (9-6) y (9-6*a*) se observa la equivalencia de los esfuerzos cortantes en dos planos perpendiculares.

9-7. CÍRCULO DE MOHR

Las fórmulas establecidas en la sección anterior se pueden utilizar en cualquier caso de un estado de esfuerzos bidimensional, pero existe una interpretación gráfica de estas fórmulas debida al ingeniero alemán Otto Mohr (1882) que evita tener que recordarlas.* En esta interpretación se utiliza un círculo, por lo que se ha llamado *círculo de Mohr*. Realizando el dibujo a escala se pueden obtener los resultados gráficamente, aunque en general sólo se suele utilizar como esquema, y los resultados se obtienen analíticamente como se verá más adelante.

Las ecuaciones (9-5) y (9-6) son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia. En efecto,

$$\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{a}$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{b}$$

Elevando al cuadrado, sumando y simplificando,

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2 \tag{c}$$

Recordamos que σ_x, σ_y y τ_{xy} son constantes conocidas que definen el estado plano de esfuerzo, mientras que σ y τ son variables. Por tanto, $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ es una constante C, y el segundo miembro de la ecuación (*c*) es otra constante R. Con estas sustituciones, la ecuación (*c*) se transforma en

$$(\sigma - C)^2 + \tau^2 = R^2 \tag{d}$$

* Las ecuaciones (9-5) y (9-6), así como sus variantes, son idénticas a las que expresan las variaciones en los momentos de inercia con respecto a dos ejes U y V inclinados un ángulo θ respecto de los ejes de referencia X y Y. Sustituyendo el esfuerzo normal por el momento de inercia I, y el esfuerzo cortante por el producto de inercia P, resulta

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - P_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$P_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + P_{xy} \cos 2\theta$$

En el Apéndice A se describe en detalle la aplicación del círculo de Mohr a estas ecuaciones.

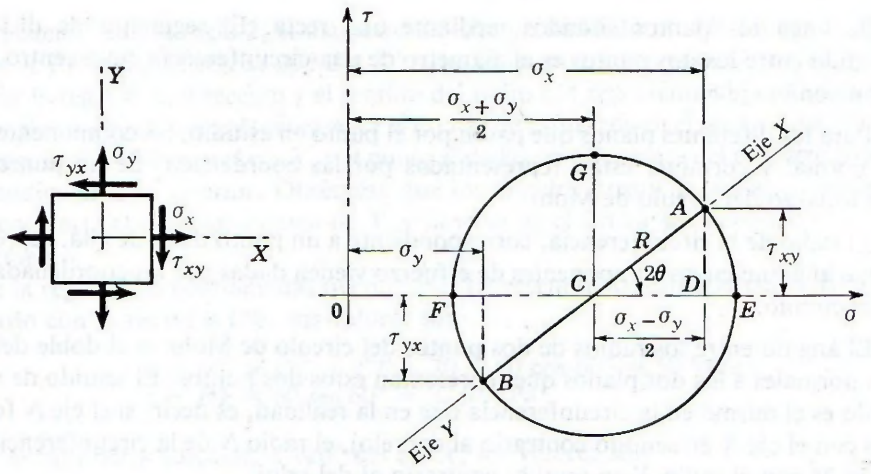


Figura 9-14. Círculo de Mohr que corresponde a un estado general de esfuerzos.

que es de la forma $(x - C)^2 + y^2 = R^2$, y representa, por tanto, una circunferencia de radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

cuyo centro dista

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

del origen de abscisas.

La figura 9-14 representa el círculo de Mohr para el estado plano de esfuerzos que se ha estudiado en la sección anterior. El centro C está a una distancia OC del origen que es la media aritmética de los esfuerzos normales, y el radio R es la hipotenusa del triángulo rectángulo CDA. Se puede comprobar fácilmente que las coordenadas de los puntos E, F, G corresponden a las expresiones deducidas en las ecuaciones (9-9) y (9-10), y se verá cómo el círculo de Mohr representa gráficamente la variación de los esfuerzos dada por las ecuaciones (9-5) y (9-6). Las reglas siguientes resumen la construcción del círculo de Mohr.

REGLAS PARA LA APLICACIÓN DEL CÍRCULO DE MOHR A LOS ESFUERZOS COMBINADOS

1. Sobre un sistema de ejes coordenados rectangulares $\sigma - \tau$, se sitúan los puntos de coordenadas (σ_x, τ_{xy}) y (σ_y, τ_{yx}). Estos puntos representan los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre las caras X y Y de un elemento. Se considera positiva la tensión y negativa la compresión; el esfuerzo cortante es positivo si el momento respecto del centro del elemento es en el sentido del reloj.*

* Esta regla especial de signos para el esfuerzo cortante hace que $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ en el círculo de Mohr. A partir de ahora se emplea esta regla para designar el esfuerzo cortante positivo. Sin embargo, la teoría matemática de la elasticidad considera positivos los esfuerzos cortantes que, en una cara positiva, estan dirigidos en el sentido positivo de otro de los ejes coordenados, lo que hace que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ lo cual es conveniente para los cálculos analíticos, pero confuso para aplicarlo a la circunferencia de Mohr.

2. Se unen los puntos situados mediante una recta. El segmento de dicha recta comprendido entre los dos puntos es el diámetro de una circunferencia cuyo centro es la intersección con el eje σ.

3. Para los diferentes planos que pasan por el punto en estudio, las componentes del esfuerzo, normal y cortante, están representadas por las coordenadas de un punto que se mueve a lo largo del círculo de Mohr.

4. El radio de la circunferencia, correspondiente a un punto dado de ella, representa el eje normal al plano cuyas componentes de esfuerzo vienen dadas por las coordenadas de ese punto del círculo.

5. El ángulo entre los radios de dos puntos del círculo de Mohr es el doble del ángulo entre las normales a los dos planos que representan estos dos puntos. El sentido de rotación del ángulo es el mismo en la circunferencia que en la realidad, es decir, si el eje N forma un ángulo θ con el eje X en sentido contrario al del reloj, el radio N de la circunferencia forma un ángulo 2θ con el radio X en sentido contrario al del reloj.

Véase en el capítulo 15, *Información Complementaria*, lo referente al esfuerzo cortante máximo absoluto y el diagrama de Mohr.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

923. En cierto punto de un sólido, los esfuerzos principales son $\sigma_x = 80$ MPa y $\sigma_y = -40$ MPa. Determinar σ y τ en los planos cuyas normales forman ángulos de $+30°$ y $+120°$ con el eje X. Muestre los resultados en un croquis de un elemento diferencial.

Solución: En la figura 9-15a se representa el estado de esfuerzos existente. Siguiendo las reglas enunciadas, se traza un sistema de ejes perpendiculares a los que se nombran como eje σ y eje τ, como se indica en la figura 9-15b. Como el esfuerzo normal en la cara X es 80 MPa y el esfuerzo cortante es cero, el punto representativo A tiene de coordenadas $(+80, 0)$; análogamente, el punto representativo B de los esfuerzos en la cara Y es $(-40, 0)$.

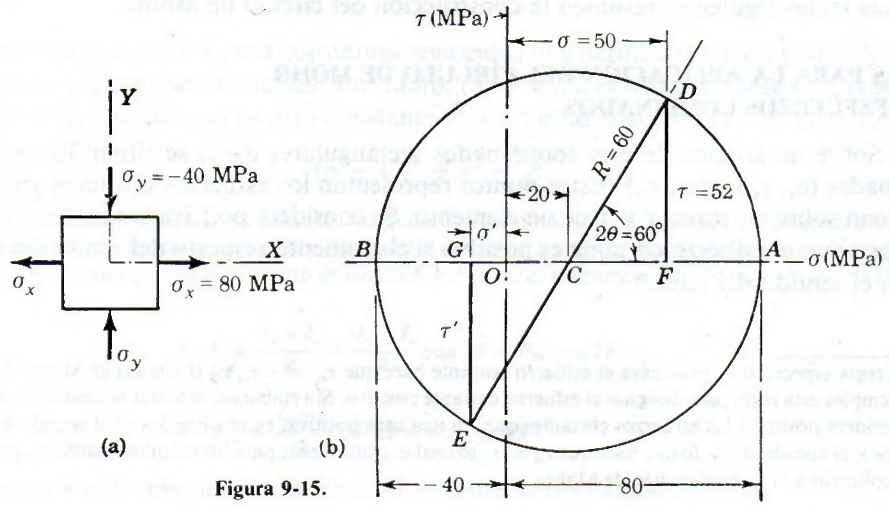


Figura 9-15.

De acuerdo con la regla 2, el diámetro del círculo de Mohr es AB. Su centro C, punto medio de A y B, tiene de abscisa 20 MPa. El radio de la circunferencia es $CA = 80 - 20 = 60$ MPa. Por la regla 4, la dirección y el sentido del radio CA representa al eje X, y de acuerdo con las reglas 4 y 5, el punto D representa el estado de esfuerzos en el plano cuya normal forma un ángulo de $+30°$ con el eje X, y el punto E da las componentes del esfuerzo sobre la cara perpendicular a la anterior. Obsérvese que los ángulos positivos se han considerado en sentido contrario al del reloj a partir de X, y su valor en el círculo es el doble del que forman en el elemento.

Por la regla 3, las coordenadas del punto D representan los esfuerzos en la cara a 30° y, de acuerdo con la figura 9-15b, sus valores son:

$$\sigma = OF = OC + CF = 20 + 60 \cos 60° = 50 \text{ MPa}$$
$$\tau = DF = 60 \operatorname{sen} 60° = 52.0 \text{ MPa}$$

En la cara perpendicular, a 120° del eje X, los valores son:

$$\sigma' = OG = OC - CG = 20 - 60 \cos 60° = -10 \text{ MPa}$$
$$\tau' = GE = -60 \operatorname{sen} 60° = -52.0 \text{ MPa}$$

Ambas series de valores se han presentado en la figura 9-16. Obsérvese en particular el sentido del reloj y contrario a él de los momentos producidos por τ y τ' con respecto al centro del elemento (regla 1). Asimismo, en el croquis deben indicarse los esfuerzos en las cuatro caras del elemento y el ángulo de la inclinación.

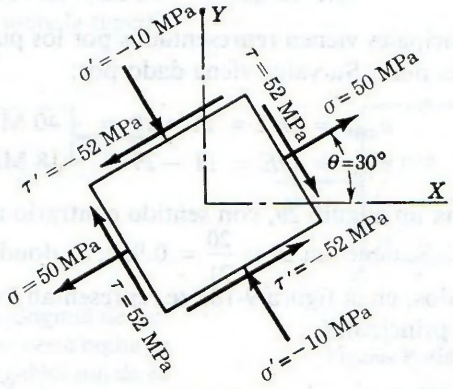


Figura 9-16.

924. En la figura 9-17a se dan los datos de cierto estado plano de esfuerzos. Determinar los esfuerzos normales y cortantes en (a) los planos principales, (b) los planos de esfuerzo cortante máximo y (c) los planos cuyas normales forman ángulos de 36.8° y + 126.8° con el eje X.

Solución: En la figura 9-17b se representa el círculo de Mohr correspondiente al estado plano de esfuerzo dado. Los esfuerzos en la cara X se representan en A, de abscisa 32 y ordenada -20. El esfuerzo τ_{xy} es negativo porque el momento respecto del centro del elemento es contrario al del reloj, como se ve en la figura 9-17a. Los esfuerzos en la cara Y vienen representados por el punto B, cuya abscisa es -10 (compresión) y ordenada 20 (positiva por ser

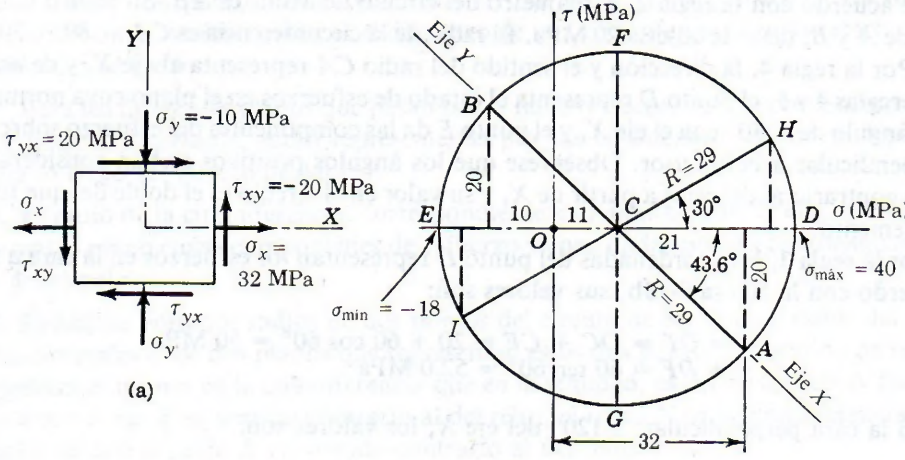


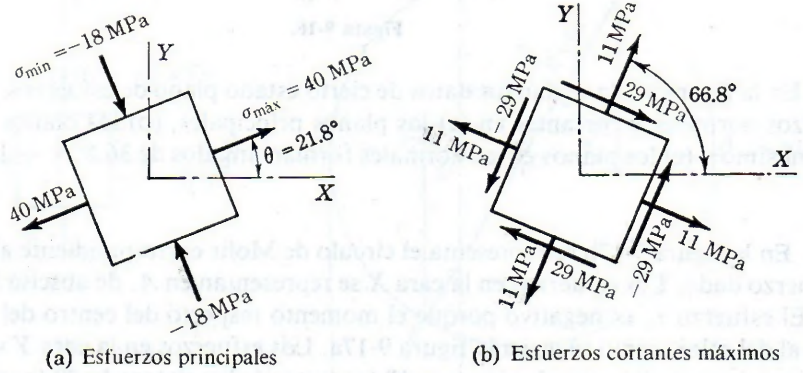
Figura 9-17.

igual al del reloj el sentido del momento de τ_{yx}). Uniendo A y B se tiene el diámetro del círculo de Mohr cuyo centro está en el punto medio entre las abscisas de A y B, o sea, a 11 MPa del origen O. El radio se calcula como la hipotenusa del triángulo de catetos 21 y 20, y vale 29.

Los esfuerzos principales vienen representados por los puntos D y E, donde el esfuerzo cortante (ordenadas) es nulo. Su valor viene dado por:

$$\sigma_{máx} = OD = 11 + 29 = +40 \text{ MPa}.$$
$$\sigma_{mín} = OE = 11 - 29 = -18 \text{ MPa}.$$

El radio CD forma un ángulo 2θ, con sentido contrario al del reloj, medido desde CA, que representa al eje X. Se tiene $\tan 2\theta = \dfrac{20}{21} = 0.952$, de donde $2\theta = 43.6°$ y $\theta = 21.8°$. Con arreglo a estos resultados, en la figura 9-18a se representan los esfuerzos principales que actúan sobre los planos principales.



(a) Esfuerzos principales (b) Esfuerzos cortantes máximos

Figura 9-18.

Los esfuerzos en los planos de esfuerzo cortante máximo vienen dados por las coordenadas de los puntos F y G, y sus valores son $\tau_{máx} = 29$, $\tau_{mín} = -29$ y $\sigma = 11$ en ambos planos. El radio CF está a 90° en sentido contrario al del reloj a partir de CD, por lo que la normal al plano de esfuerzo cortante máximo está a 45° en sentido contrario al reloj del plano principal máximo, o sea, a $45° + 21.8° = 66.8°$ del eje X, como se representa en la figura 9-18b.

Para terminar el problema, los esfuerzos en el plano cuya normal está a $+36.8°$ del eje X están representadas por el punto H, intersección del radio CH con el círculo de Mohr (regla 3). Por la regla 5, el ángulo $ACH = 2 \times 36.8° = 73.6°$ y el ángulo $HCD = 73.6° - 43.6° = 30°$. Las coordenadas del punto H son, por tanto,

$$\sigma = 11 + 29 \cos 30° = 36.1 \text{ MPa}$$
$$\tau = 29 \operatorname{sen} 30° = 14.5 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos en el plano cuya normal está a $+ 126.8°$ respecto del eje X los representa el punto I. Los puntos H e I están a 180°, puesto que los planos que representan están a 90°. Las coordenadas de I son

$$\sigma' = 11 - 29 \cos 30° = -14.1 \text{ MPa}$$
$$\tau' = -29 \operatorname{sen} 30° = -14.5 \text{ MPa}$$

Trace un croquis de un elemento diferencial con todos los esfuerzos.

PROBLEMAS

925. Dos piezas de madera de 50 × 100 mm de sección están ensambladas a lo largo de la junta AB como se indica en la figura P-925. Calcular los esfuerzos normal y cortante sobre la superficie de ensamble si $P = 100$ kN.

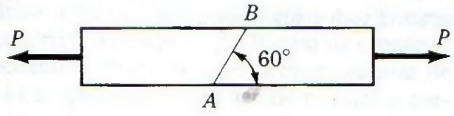


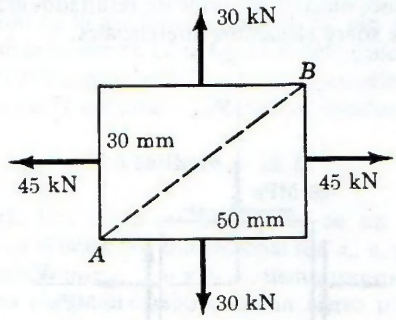
Figura P-925.

Resp. $\sigma = 15$ MPa

926. Una barra de pequeña longitud de sección circular de 50 mm de diámetro está hecha de un material cuyos esfuerzos admisibles son de 80 MN/m² a compresión y 30 MN/m² a cortante. Determinar la fuerza axial de compresión máxima que puede aplicarse.

927. En un elemento de un sólido elástico, los esfuerzos principales son $\sigma_x = -50$ MPa y $\sigma_y = 30$ MPa. Calcular las componentes del esfuerzo en planos inclinados + 30° y + 120° respecto del eje X. Ilustre gráficamente sus respuestas.

928. Un pequeño bloque en forma de paralelepípedo, de dimensiones 50 × 30 mm y 10 mm de espesor está sometido a unas fuerzas de tensión uniformemente distribuidas sobre sus caras, cuyas resultantes se indican en la figura P-928. Calcular las componentes del esfuerzo en la diagonal AB.



Figuras P-928 y P-929.

Resp. $\sigma = 83.9$ MPa; $\tau = -39.7$ MPa

929. Resolver el problema anterior si las fuerzas de 30 kN son de compresión en lugar de tensión.

930. Un depósito cilíndrico cerrado, construido con placa de 10 mm, se somete a una presión interior de 1400 kPa. Determinar el diámetro máximo que se le puede dar si el esfuerzo cortante admisible es de 30 MPa. *Indicación*: El esfuerzo circunferencial está dado por $pD/2t$, mientras que el longitudinal, por $pD/4t$. Vea la sección 1-6 y consulte el problema 941.

931. Para el estado de esfuerzo mostrado en la figura P-931, determinár los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo. Mostrar todos sus resultados gráficamente sobre elementos diferenciales.

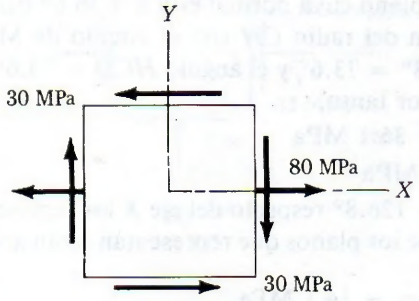


Figura P-931.

Resp. $\sigma_{máx} = 90$ MPa a $\theta = -18.4°$

932. El estado de esfuerzo en un punto de un cuerpo se muestra en la figura P-932. Calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, mostrando todos sus resultados gráficamente sobre elementos diferenciales.

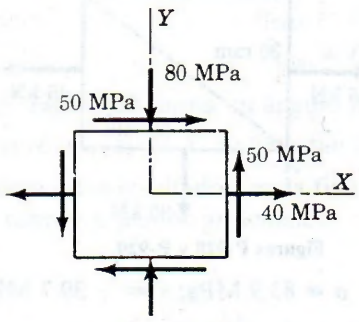


Figura P-932.

Resp. $\sigma_{máx} = 58.1$ MPa a $\theta = +19.9°$
$\sigma_{mín} = -98.1$ MPa a $\theta = +109.9°$

933. Para el estado de esfuerzo mostrado en la figura P-933, calcular los esfuerzos normal y cortante en los planos cuyas normales están inclinadas a $+60°$ y $+150°$ con respecto al eje X, mostrando sus resultados gráficamente.

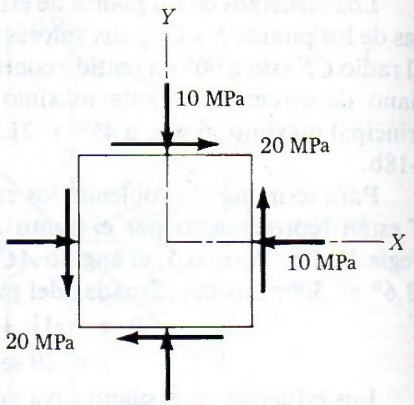


Figura P-933.

Resp. Para
$\theta = 60°$, $\sigma = 7.32$ MPa
y $\tau = 10$ MPa

934. Si un elemento está sujeto al estado de esfuerzo mostrado en la figura P-934, calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo. Calcular también las componentes del esfuerzo en planos cuyas normales están dirigidas a 45° y a 135° con respecto al eje X. Muestre gráficamente todos sus resultados.

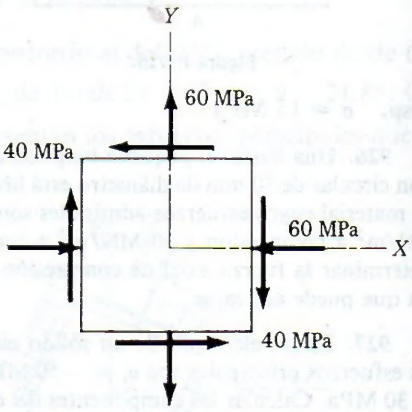


Figura P-934.

935. Dado el elemento de la figura P-935, calcular los valores de σ_x y σ_y, sabiendo que los esfuerzos principales son 20 MPa y -80 MPa.

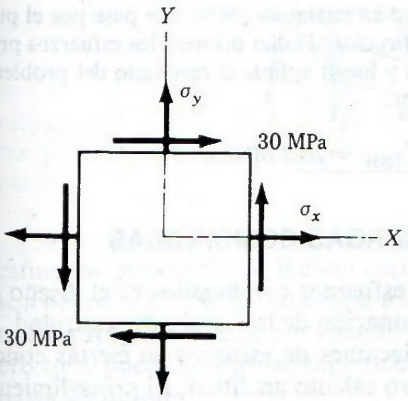
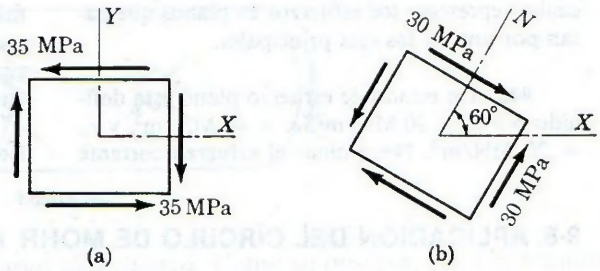


Figura P-935.



Figuras P-938 y P-939.

936. Un tubo de diámetro externo de 150 mm está construido con placa de 10 mm de espesor. Está unido mediante una espiral de soldadura que forma un ángulo de $+30°$ con el eje longitudinal. Determinar el máximo par que pueda aplicársele si el esfuerzo cortante a lo largo de la soldadura está limitado a 30 MN/m^2.

Resp. $T = 17.3$ kN·m

937. Un recipiente cerrado de forma cilíndrica tiene un diámetro exterior de 600 mm, está construido con placa de 10 mm de espesor y se encuentra sometido a un presión interna de 1400 kPa. Calcular los esfuerzos normal y cortante a lo largo de la espiral de soldadura utilizada para unirlo, si ésta forma un ángulo de $+30°$ con el eje longitudinal.

938. En un punto de un cuerpo, el estado de esfuerzo es el resultado de dos estados separados que se muestran en la figura P-938 (a) y (b). Calcular el estado de esfuerzo que resulta de la acción simultánea de esos dos estados. *Indicación:* Orientar el elemento de la figura P-938 (b) paralelamente al de la figura P-938(a), calculando el estado de esfuerzo en esta nueva orientación, para poder superponer ambos. En seguida, calcular los esfuerzos y determinar los planos principales de esfuerzo.

Resp. $\sigma_{máx} = 32.9$ MPa a $\theta = -18.8°$

939. Resolver el problema 938 suponiendo que los sentidos de los esfuerzos cortantes de 30 MPa se invierten.

940. El estado de esfuerzo en un punto es el resultado de la acción conjunta de los tres estados que se muestran en la figura P-940. Calcular los esfuerzos principales, así como su orientación, a partir del estado de esfuerzo resultante.

Resp. $\sigma_{máx} = 37.8$ MPa a $\theta = 26.2°$

941. Los esfuerzos principales en un elemento en el espacio tridimensional son σ_x, σ_y y σ_z, Suponiendo que $\sigma_x > \sigma$ y $> \sigma_z$, demostrar que el esfuerzo cortante máximo, en un cierto plano cualquiera que corte al elemento, es igual a $\frac{1}{2}$ $(\sigma_x - \sigma_z)$. Considere todas las orientaciones posibles del elemento para poder trazar círculos de Mohr independientes, cada una de las

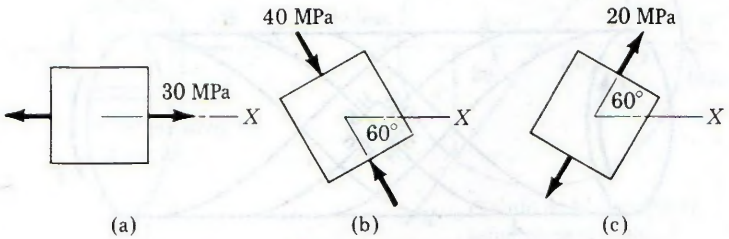


Figura P-940.

cuales represente los esfuerzos en planos que pasan por uno de los ejes principales.

942. Un estado de esfuerzo plano está definido por $\sigma_x = 20$ MN/m^2, $\sigma_y = 40$ MN/m^2, y $\tau_{xy} = 20$ MN/m^2. Determinar el esfuerzo cortante máximo en cualquier plano que pase por el punto. *Indicación*: Hallar primero los esfuerzos principales y luego aplicar el resultado del problema anterior.

Resp. $\tau_{máx} = 26.2$ MN/m^2

9-8. APLICACIÓN DEL CÍRCULO DE MOHR A CARGAS COMBINADAS

La aplicación más importante del cálculo de los esfuerzos combinados es el diseño de elementos sometidos a cargas combinadas, o la determinación de las cargas de seguridad. El círculo de Mohr, al representar gráficamente las variaciones de esfuerzo en ciertas condiciones, da una idea más clara del problema que el mero cálculo analítico. El procedimiento habitual es considerar un pequeño elemento en el que se puedan calcular los esfuerzos producidos por los tres tipos fundamentales de cargas: axial, de flexión y de torsión. El estudio del círculo de Mohr para este elemento indica el criterio a seguir en el diseño. Los ejemplos al final de esta sección son típicos de los procedimientos que se utilizan en la práctica.

TRAYECTORIAS DE ESFUERZO

Un elemento de la superficie del cilindro de la figura 9-19a está sometido a los esfuerzos cortantes de torsión indicados en la figura. La figura 9-19b representa el círculo de Mohr correspondiente a este estado de esfuerzo. El radio OA representa al eje X. El esfuerzo de tensión máxima está representado por el punto D, cuyo radio OD está a 90° de OA en sentido del reloj, por lo que el plano de máxima tensión estará a 45° de X en sentido del reloj, como se indica en la figura 9-19a. Las líneas de la figura 9-20 que siguen las direcciones de los

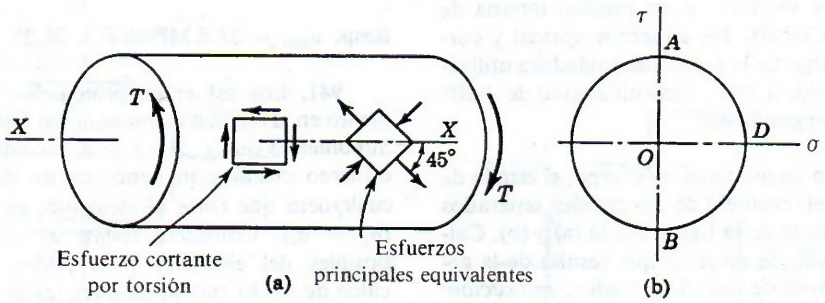


Figura 9-19. Cilindro sometido a torsión.

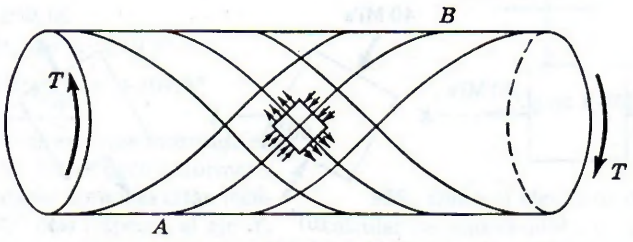


Figura 9-20. Trayectorias de esfuerzo en la torsión.

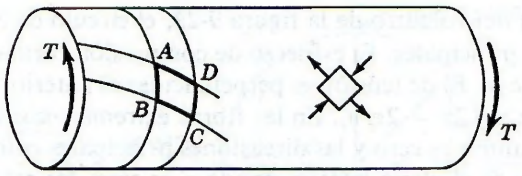
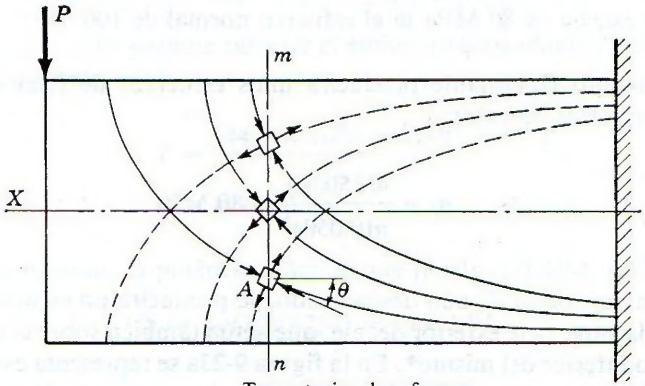


Figura 9-21.

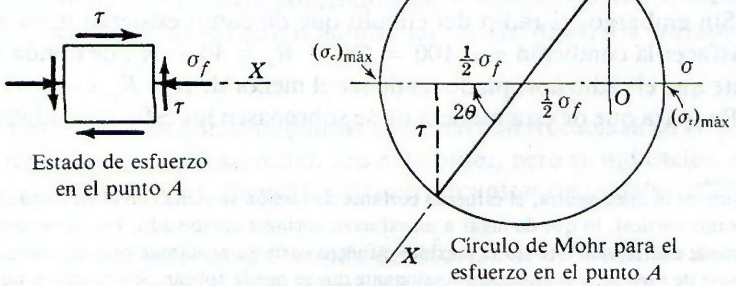
esfuerzos principales se llaman *trayectorias de esfuerzo*. Como se observa, para la torsión son hélices a 45°. Si la resistencia a tensión del material es pequeña, como ocurre con los materiales frágiles, el fallo por tensión ocurre a lo largo de hélices a 45°, tales como la AB. Este efecto se puede confirmar experimentalmente sometiendo a torsión una barra de gis o yeso, hasta su ruptura.

Otra forma de comprender la razón de los esfuerzos de tensión y compresión inducidos por el esfuerzo cortante se observa en la figura 9-21. La distorsión del elemento $ABCD$, inicialmente rectangular, indica que la diagonal AC se ha alargado, y que BD se ha acortado. Estas deformaciones concuerdan con las direcciones de los esfuerzos principales de tensión y compresión antes obtenidas.

En las vigas, las direcciones de los esfuerzos principales varían de acuerdo con las intensidades relativas de los esfuerzos por flexión, σ_f, y de los cortantes horizontales, τ. Por



Trayectorias de esfuerzo



Estado de esfuerzo en el punto A

Círculo de Mohr para el esfuerzo en el punto A

Figura 9-22.

ejemplo, en el punto A del voladizo de la figura 9-22, el círculo de Mohr muestra las direcciones de los esfuerzos principales: El esfuerzo de compresión forma un ángulo θ en sentido del reloj respecto del eje X. El de tensión es perpendicular al anterior. El valor de θ varía con la relación τ/σ_f, ya que $tan\ 2\theta = 2\tau/\sigma_f$. En las fibras extremas m y n de la sección que pasa por A, el esfuerzo cortante τ es cero y las direcciones principales coinciden con la horizontal y vertical, mientras que en el plano neutro, donde σ_f es cero, los esfuerzos principales están inclinados 45° respecto al eje X.

En la figura 9-22, las líneas continuas y las punteadas representan las trayectorias de esfuerzo en la viga y constituyen dos familias de curvas ortogonales cuyas tangentes en cada punto dan la dirección de los esfuerzos principales en dicho punto. Las líneas continuas indican la dirección de los esfuerzos de compresión máximos, y las líneas punteadas, la dirección de los esfuerzos de tensión también máximos. No hay que confundir las trayectorias de esfuerzo con las líneas de esfuerzo constante. *Las trayectorias de esfuerzo indican la dirección de los esfuerzos principales, pero la intensidad del esfuerzo es variable a lo largo de ellas.*

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

943. Un eje de 100 mm de diámetro que gira a 30 r/s está sometido a unas cargas de flexión que le producen un momento flexionante máximo de 2500π N · m. Calcular el par torsor máximo y la potencia máxima que puede actuar al mismo tiempo sobre el eje, sin que el esfuerzo cortante exceda de 80 MPa ni el esfuerzo normal de 100 MPa.

Solución: El momento flexionante producirá unos esfuerzos de flexión máximos en las fibras superior e inferior de valor:

$$\left[\sigma_f = \frac{Mc}{I} = \frac{4M}{\pi r^3}\right] \qquad \sigma_f = \frac{4(2500\pi)}{\pi(0.050)^3} = 80 \text{ MPa}$$

Al aplicar un par torsor T, aún desconocido, se producirá un esfuerzo cortante de torsión, máximo en la superficie exterior del eje, que actúa también sobre el mismo elemento de la fibra superior o inferior del mismo*. En la figura 9-23a se representa este estado de esfuerzo. Aunque el esfuerzo cortante de torsión, representado por τ_t para distinguirlo del esfuerzo cortante máximo resultante, es desconocido, se puede dibujar un círculo de Mohr en función de tal esfuerzo, como se representa en la figura 9-23b.

Para que aparezca un esfuerzo cortante combinado de 80 MPa, el radio del círculo debe ser $R_\tau = 80$. Sin embargo, el radio del círculo que dé como esfuerzo normal máximo 100 MPa debe satisfacer la condición $\sigma = 100 = OC + R_\sigma = 40 + R_\sigma$, de donde $R_\sigma = 60$ MPa.

Es evidente que el radio apropiado ha de ser el menor de R_σ y R_τ, es decir, en el caso que se trata, 60 MPa, para que de esta manera no se sobrepasen los esfuerzos admisibles. Hallan-

* En los extremos de la línea neutra, el esfuerzo cortante de torsión se suma con el esfuerzo cortante producido por la fuerza cortante vertical, lo que da lugar a un esfuerzo cortante combinado. En una viga muy corta, fuertemente cargada, puede ocurrir que éste sea el máximo esfuerzo cortante resultante que, por tanto, limitará el valor del esfuerzo cortante de torsión, y el momento torsionante que se puede aplicar. Sin embargo, aquí se descarta esta posibilidad.

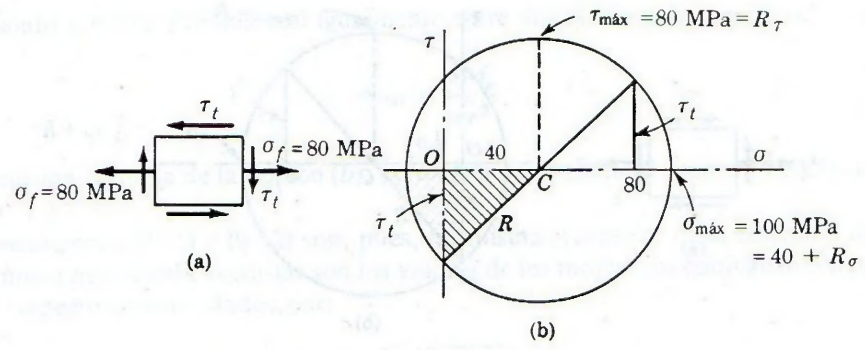


Figura 9-23.

do R, por el triángulo rayado de la figura 9-23b, se calcula el esfuerzo cortante por torsión, que puede combinarse con el esfuerzo por flexión. Se tiene así que:

$$\tau_t^2 = R^2 - (40)^2 = (60)^2 - (40)^2$$

de donde

$$\tau_t = 44.7 \text{ MPa}$$

La fórmula de la torsión permite calcular el momento torsionante necesario para que resulte este esfuerzo cortante,

$$\left[T = \frac{\tau J}{r} = \frac{\tau \pi r^3}{2} \right] \qquad T = \frac{(44.7 \times 10^6)\pi(0.050)^3}{2}$$

$$= 8780 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textbf{Resp.}$$

y, en función del momento, la potencia máxima que puede aplicarse, está dada por

$$[\mathcal{P} = 2\pi f T] \qquad \mathcal{P} = 2\pi(30)(8750) = 1650 \text{ kW} \qquad \textbf{Resp.}$$

944. Un eje macizo se somete a flexión y torsión simultáneas, producidas por un momento torsionante T y un momento flexionante T. Expresar el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo normal máximo resultantes, en función de T, de M y de radio r del eje. Aplicar las relaciones obtenidas al caso de un eje sometido a un $T = 1200$ N · m y $M = 900$ N · m, para determinar su diámetro, si los esfuerzos admisibles son de 70 MPa a cortante y 100 MPa a flexión.

Solución: La flexión y la torsión simultáneas aparecen con frecuencia en el diseño de ejes giratorios. Las fórmulas que se desarrollan son muy útiles, pero su aplicación está limitada al caso en que se conozcan T y M. *En cualquier otra circunstancia se debe utilizar el círculo de Mohr.*

En la figura 9-24a se representa el estado de esfuerzo de un elemento de un eje sometido a flexión y torsión simultáneas, y en la figura 9-24b, el círculo de Mohr correspondiente. El

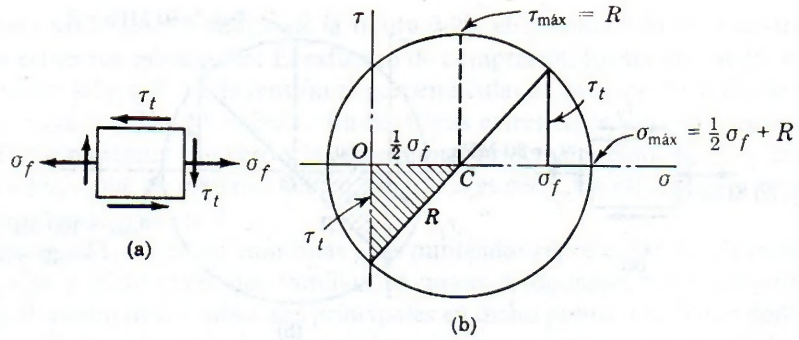


Figura 9-24.

esfuerzo cortante máximo τ es igual al radio R de la circunferencia, y del triángulo rayado se obtiene

$$\tau_{máx} = R = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sigma_f\right)^2 + (\tau_t)^2} \qquad (a)$$

Las fórmulas de la torsión y de la flexión, particularizadas para un eje circular macizo se escriben en la forma:

$$\sigma_f = \frac{4M}{\pi r^3} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{2T}{\pi r^3} \qquad (b)$$

Sustituyendo estos valores en (*a*) resulta:

$$\tau_{máx} = \sqrt{\left(\frac{2M}{\pi r^3}\right)^2 + \left(\frac{2T}{\pi r^3}\right)^2}$$

o bien,

$$\tau_{máx} = \frac{2}{\pi r^3}\sqrt{M^2 + T^2}$$

Haciendo $T_e = \sqrt{M^2 + T^2}$, se obtiene finalmente:

$$\tau_{máx} = \frac{2T_e}{\pi r^3} \qquad \textbf{(9–11)}$$

La semejanza entre la ecuación (9-11) y la fórmula de la torsión en (*b*) sugiere que a T_e se le llame *momento torsionante equivalente.*

La ecuación que se obtiene para el esfuerzo normal máximo, análoga a la fórmula de la flexión, obliga a introducir el concepto de *momento flexionante equivalente* M_e, y se determina de la manera siguiente. En la figura 9-24b, el esfuerzo normal máximo resultante vale $\sigma_{máx} = \frac{1}{2}\sigma_f + R$. Teniendo en cuenta que $\sigma_f = 4M/\pi r^3$ y $R = 2T_e/\pi r^3$ resulta:

$$\sigma_{máx} = \frac{2}{\pi r^3}(M + T_e)$$

Multiplicando por dos y dividiendo igualmente entre dos el segundo miembro,

$$\sigma_{máx} = \frac{4M_e}{\pi r^3} \tag{9-12}$$

que es la misma fórmula de la flexión (*b*), pero en la que se tiene el momento equivalente $M_e = \frac{1}{2}(M + T_e)$.

Las ecuaciones (9-11) y (9-12) son, pues, las mismas fórmulas de la torsión y de la flexión. Lo único que se debe recordar son los valores de los momentos equivalentes a torsión y a flexión respectivamente, dados por:

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} \tag{9-13}$$

$$M_e = \tfrac{1}{2}(M + T_e) \tag{9-14}$$

En el caso particular del ejemplo, y de acuerdo con los datos del enunciado, los momentos equivalentes de torsión y de flexión son:

$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{(900)^2 + (1200)^2} = 1500 \text{ N·m}$$
$$M_e = \tfrac{1}{2}(M + T_e) = \tfrac{1}{2}(900 + 1500) = 1200 \text{ N·m}$$

El radio del árbol para que el esfuerzo cortante máximo no exceda el admisible, según la ecuación (9-11), viene dado por:

$$\left[\tau = \frac{2T_e}{\pi r^3}\right] \qquad 70 \times 10^6 = \frac{2(1500)}{\pi r^3} \quad \text{o} \quad r = 23.9 \times 10^{-3} \text{ m} = 23.9 \text{ mm}$$

El radio del eje para que el esfuerzo normal máximo no exceda al admisible, según la ecuación (9-12), viene dado por:

$$\left[\sigma = \frac{4M_e}{\pi r^3}\right] \qquad 100 \times 10^6 = \frac{4(1200)}{\pi r^3} \quad \text{o bien,} \quad r = 24.8 \times 10^{-3} \text{ m} = 24.8 \text{ mm}$$

El mayor de los dos valores obtenidos cumple ambas condiciones y, por tanto, es el diámetro necesario.

$$d = 2 \times 24.8 = 49.6 \text{ mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

945. Diseñar un eje circular macizo que pueda soportar las cargas indicadas en la figura 9-25 si $\tau_{máx} \leq 70$ MPa y $\sigma_{máx} \leq 120$ MPa. Las correas de transmisión de las poleas *B* y *C* son verticales y las de la polea *E* son horizontales. Se desprecian el peso de las poleas y el del árbol.

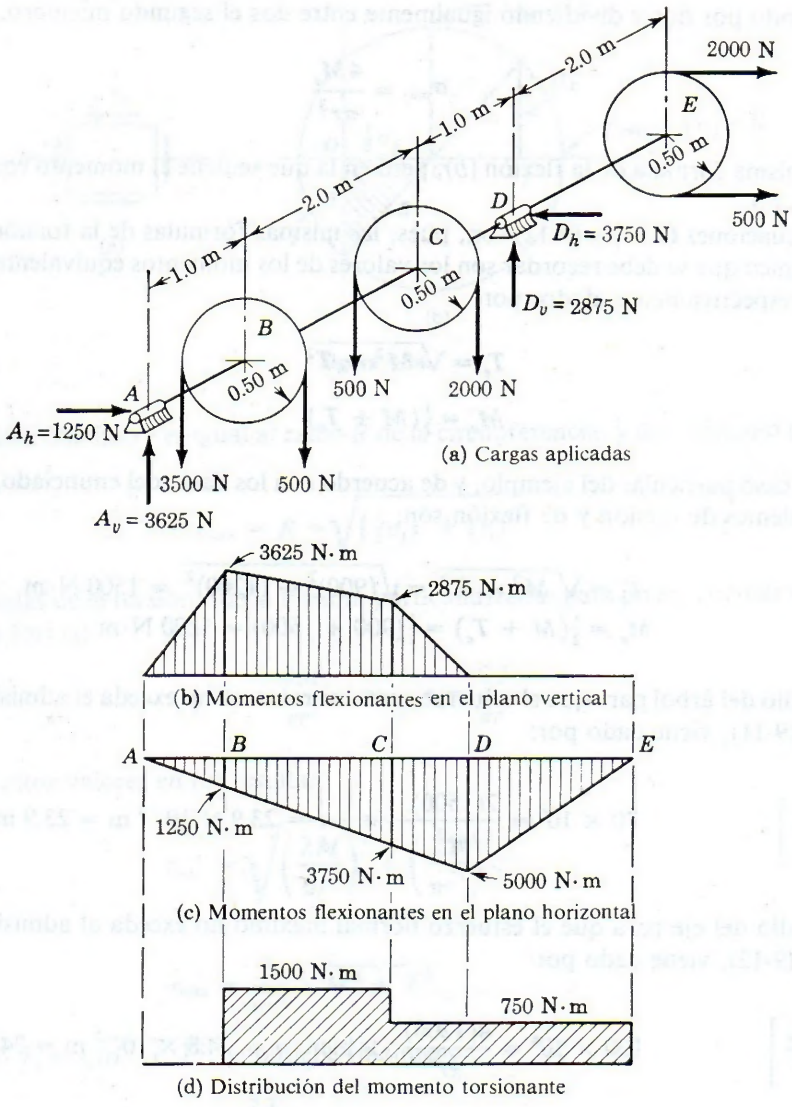


Figura 9-25.

Solución: Las cargas aplicadas producen, además de una torsión, una flexión en el plano horizontal y otra en la vertical. En las figuras 9-25b y 9-25c se han representado los diagramas de momentos flexionantes en dichos planos. El momento flexionante resultante en cualquier sección viene dado por $M = \sqrt{M_h^2 + M_v^2}$. Por tanto, en los puntos B, C y D los momentos flexionantes son $M_B = 3834$ N · m, $M_c = 4725$ N · m y $M_D = 5000$ N · m. Combinando estos momentos con la distribución de momentos torsionantes en el eje, figura 9-25d, se deduce que las secciones más peligrosas son C y D.

Como en estos dos puntos se conocen los valores del momento torsionante y del momento flexionante, se aplica el método del problema 944. De acuerdo con las ecuaciones (9-13)

y (9-14), los momentos equivalentes a torsión y a flexión en aquellos puntos son:

En C:
$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{(4725)^2 + (1500)^2} = 4957 \text{ N·m}$$
$$M_e = \tfrac{1}{2}(M + T_e) = \tfrac{1}{2}(4725 + 4957) = 4841 \text{ N·m}$$

y en D:
$$T_e = \sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{(5000)^2 + (750)^2} = 5056 \text{ N·m}$$
$$M_e = \tfrac{1}{2}(M + T_e) = \tfrac{1}{2}(5000 + 5056) = 5028 \text{ N·m}$$

En las ecuaciones (9-11) y (9-12) se han tenido en cuenta los valores máximos de M_e y T_e. Como el máximo momento T_e tiene lugar en C y el máximo M_e aparece en D, resulta:

$$\left[\tau = \frac{2T_e}{\pi r^3}\right] \qquad 70 \times 10^6 = \frac{2(5056)}{\pi r^3} \qquad r = 35.8 \times 10^{-3} \text{ m} = 35.8 \text{ mm}$$

$$\left[\sigma = \frac{4M_e}{\pi r^3}\right] \qquad 120 \times 10^6 = \frac{4(5028)}{\pi r^3} \qquad r = 37.7 \times 10^{-3} \text{ m} = 37.7 \text{ mm}$$

El mayor de estos dos valores determina el radio necesario. De ahí que el del eje sea $d = 2 \times 37.7 = 75.4$ mm. En vista de que los ejes tienen diámetros estándar, debe especificarse uno de 80 mm.

PROBLEMAS

946. Explicar por qué las trayectorias de esfuerzo, en la figura 9-22, tienden a ser horizontales al aproximarse al empotramiento. ¿En donde son exactamente horizontales? ¿Cuáles son las trayectorias de esfuerzo en el caso de tensión o compresión axiales?

947. El árbol de una turbina pequeña tiene un diámetro de 100 mm y está sujeto a una carga de 140π kN. Calcular la máxima potencia que puede transmitirse a 4 r/s sin exceder un esfuerzo cortante máximo de 70 MN/m^2 ni un máximo esfuerzo normal de 90 MN/m^2.

Resp. 273 kW

948. Un eje macizo de 100 mm de diámetro está sujeto simultáneamente a una fuerza de compresión de 600 kN y a un par de torsión que lo deforma un ángulo de 1.5° en una longitud de 8 m. Si $G = 80 \times 10^9$ N/m^2, calcular los máximos esfuerzos normal y cortante a que está sometido el eje.

Resp. $\tau = 40.4$ MN/m^2

949. Un eje de 100 mm de diámetro soporta simultáneamente una carga axial de tensión de 50π kN, un momento flexionante máximo de 2π kN · m y un par de torsión de 3π kN · m. Calcular los máximos esfuerzos cortantes y normales, tanto de tensión como de compresión.

Resp. $\sigma_t = 106$ MPa;
$\sigma_c = 74.8$ MPa;
$\tau = 63.8$ MPa

950. Repetir el problema 949 suponiendo que se invierte el sentido de la carga axial, al mismo tiempo que su magnitud se abate a 40π kN.

951. Un eje de 80 mm de diámetro está sujeto a un momento flexionante máximo de 80π N · m y a una fuerza axial de tensión de 40π kN. Calcular el par de torsión máximo que pueda aplicarse si los valores máximos admisibles del esfuerzo son 100 MN/m^2 para el normal y 80 MN/m^2 para el cortante.

952. Un eje de sección circular se emplea para transmitir simultáneamente un par de 2600 N · m y un momento flexionante máximo de 2000 N · m. Calcular el radio mínimo que pueda tener la sección del eje si $\sigma_{máx} \leq 80$ MPa y $\tau_{máx} \leq 60$ MPa.

Resp. $r = 34.8$ mm

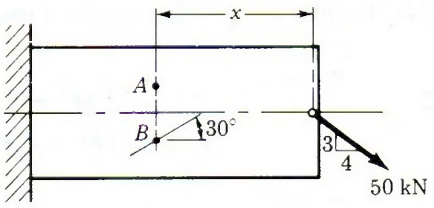
953. Un eje de 80 mm de diámetro soporta un momento flexionante máximo de 3 kN · m. ¿Qué par se puede aplicar, además, sin exceder un valor máximo del esfuerzo cortante de 80 MN/m^2 ni uno del esfuerzo normal de 120 MN/m^2?

954. Un recipiente de forma cilíndrica, con sus extremos cerrados tiene un diámetro exterior de 400 mm y un espesor de 20 mm. Si soporta simultáneamente una presión interna de 4 MPa, un par de torsión de 80 KN · m y un momento flexionante de 20 KN · m, calcular el máximo esfuerzo de tensión sobre sus paredes, descartando la posibilidad de pandeo.

Resp. $\sigma_T = 53.9$ MPa

955. Un recipiente como el del problema anterior tiene un diámetro exterior de 300 mm y está construido con placa de acero de 10 mm de espesor. Si el tanque está sujeto a una presión interna de 6 MN/m^2, calcular el máximo par de torsión que pueda aplicársele si el esfuerzo normal en sus paredes está limitado a 100 MN/m^2. Descartar la posibilidad de pandeo.

956. Calcular los esfuerzos principales y el máximo esfuerzo cortante en el punto A de la figura P-956 en la sección localizada a $x = 250$ mm. La viga es de sección rectangular, teniendo 20 mm de ancho, 120 mm de altura y el punto A se encuentra 20 mm arriba de la línea neutra. Supóngase que la carga de 50 kN actúa en el centroide de la sección. Mostrar las respuestas en



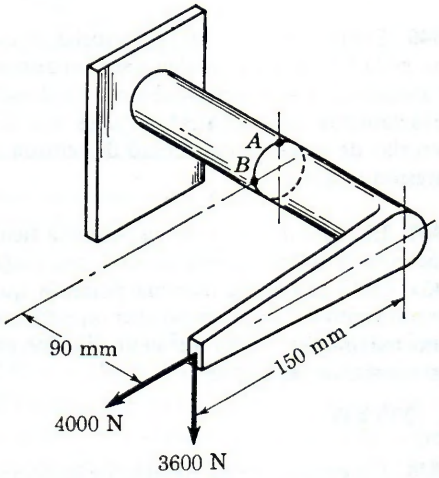
Figuras P-956 y P-957.

forma gráfica sobre elementos diferenciales adecuados. *Indicación*: Asegurarse de incluir el esfuerzo cortante causado por la carga aplicada.

Resp. $\sigma_{máx} = 72.6$ MPa a $\theta = -12.9°$

957. Dada la viga descrita en el problema 956, calcule las componentes de esfuerzo a lo largo del plano que forma con el eje neutro un ángulo de 30° y que pasa por B. Suponer, para esto, que $x = 300$ mm y que B está 20 mm abajo del eje neutro. Mostrar sus resultados gráficamente sobre un elemento diferencial.

958. Un soporte de 50 mm de diámetro, firmemente empotrado en un extremo, soporta en el otro unas cargas horizontal y vertical, como indica la figura P-958. Calcular los esfuerzos resultantes máximos en el punto A de la fibra superior.



Figuras P-958 y P-959.

Resp. $\sigma_{máx} = 41.2$ MN/m^2

959. Repetir el problema anterior para el punto B.

960. Un árbol de 100 mm de diámetro soporta una carga consistente en la fuerza P y el par T, como se muestra en la figura P-960. Calcular los esfuerzos normal y cortante sobre el cordón de soldadura de forma helicoidal que forma un ángulo de 30° con el eje del árbol.

Resp. $\sigma = 18.4$ MPa; $\tau = -16.5$ MPa

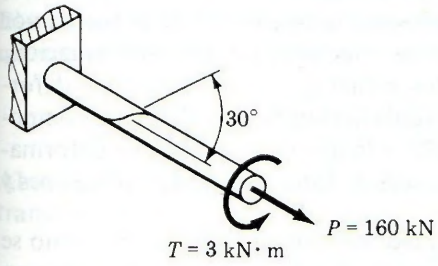


Figura P-960.

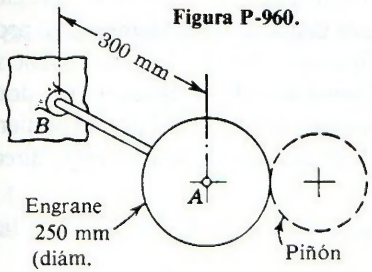


Figura P-961.

961. Un reductor de velocidad transmite una potencia de 20 kW. En cierta parte de dicho reductor, un piñón hace girar el engrane A del árbol AB a 6 r/s. Determinar el diámetro mínimo del árbol AB si $\tau_{máx} \leq 60$ MN/m^2 y $\sigma_{máx} \leq 80$ MN/m^2. Considere sólo esfuerzos por torsión y por flexión en el eje.

962. Un eje de transmisión por correas de 50 mm de diámetro está sometido a las fuerzas indicadas en la figura P-962. Las fuerzas sobre la polea A son horizontales y las de B son verticales. Calcular los esfuerzos resultantes normal y cortante máximos en el árbol.

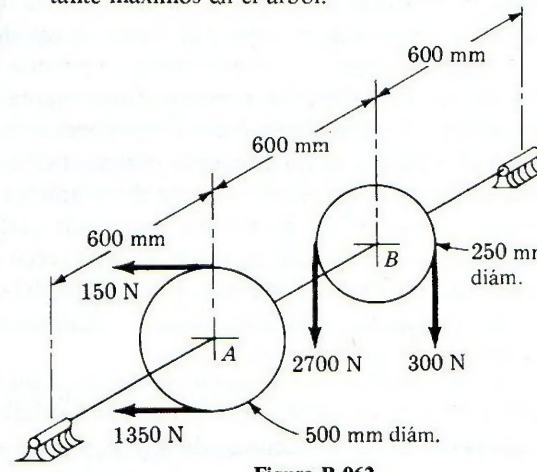


Figura P-962.

963. Diseñar un árbol circular macizo para que soporte las cargas indicadas en la figura P-963 si $\tau_{máx} \leq 60$ MPa y $\sigma_{máx} \leq 80$ MPa. Las correas de transmisión de las poleas A y C son horizontales y las de la polea E son verticales.

Resp. $d = 68.4$ mm

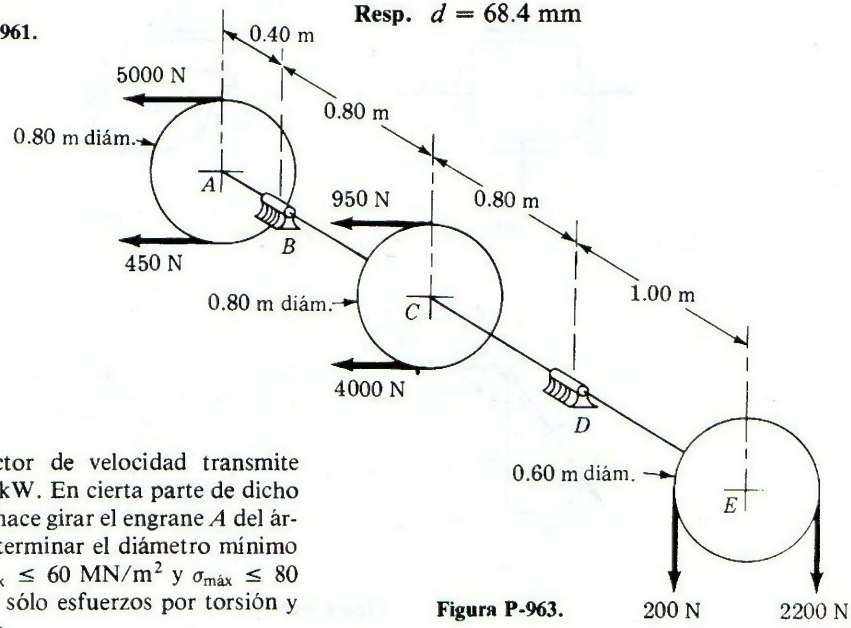


Figura P-963.

9-9. TRANSFORMACIÓN DE LAS COMPONENTES DE LA DEFORMACIÓN

Muchos de los problemas de ingeniería suponen una combinación de esfuerzos axiales, por torsión y por flexión en barras prismáticas de materiales homogéneos. En estos casos se calculan los esfuerzos como se ha dicho en las secciones anteriores, y los esfuerzos máximos son los que sirven de base para el diseño de los elementos. Sin embargo, hay ocasiones en que por irregularidades de la estructura, o porque las condiciones en que se aplican las fuerzas no corresponden a las hipótesis fundamentales de las teorías de la flexión y de la torsión, se requiere el empleo de métodos experimentales para determinar los esfuerzos. Ahora bien, como el esfuerzo es un concepto matemático que representa la intensidad de la fuerza por unidad de área, no puede medirse directamente. Pero las relaciones esfuerzo-deformación, definidas por la ley de Hooke, permiten calcular los esfuerzos partiendo de las deformaciones, que sí se pueden medir. En esta sección se estudia la transformación de las componentes de la deformación con la orientación del elemento, y la determinación de las deformaciones principales, y en la siguiente se verán las aplicaciones de la medida de deformaciones y su conversión en esfuerzos.

Consideremos un elemento sometido a un estado bidimensional de esfuerzos, como se indica en la figura 9-26a. Los esfuerzos normales, supuestos positivos o de tensión, alargan el elemento en las direcciones de X y Y, y el esfuerzo cortante distorsiona el elemento al producir una deformación angular γ_{xy}, como se observa en la figura, 9-26b. En la figura 9-26c se aprecia el efecto de estas deformaciones sobre un elemento lineal OA de la figura 9-26a, donde OA se alarga hasta OA' y su orientación varía en un pequeño ángulo β. El desplazamiento de A hasta A' es el vector suma de los alargamientos $\epsilon_x dx$ en la dirección X, $\epsilon_y dy$ en la direc-

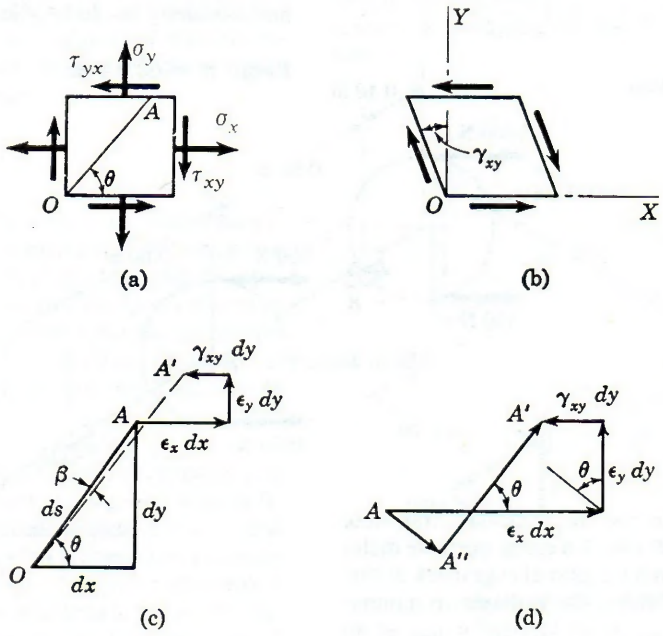


Figura 9-26.

ción Y y la distorsión $\gamma_{xy}dy$ en la dirección X. Estos desplazamientos de A aparecen exagerados en la figura 9-26d, en donde se observa la descomposición vectorial a lo largo de direcciones paralela y perpendicular a OA. La componente paralela $A''A'$, representa un aumento de longitud de OA, mientras que la componente perpendicular AA'' da lugar a la variación β en la posición angular de OA.

El módulo de $A''A'$ se obtiene proyectando $\epsilon_x\, dx$, $\epsilon_y\, dy$ y $\gamma_{xy}\, dy$ sobre la dirección de OA, es decir,

$$A''A' = \epsilon_x\, dx \cos\theta + \epsilon_y\, dy \operatorname{sen}\theta - \gamma_{xy}\, dy \cos\theta \qquad (a)$$

El incremento de OA dividido entre su longitud inicial ds es el alargamiento unitario o deformación ϵ_a en la dirección OA:

$$\epsilon_a = \frac{A''A'}{ds} = \frac{\epsilon_x\, dx \cos\theta}{ds} + \frac{\epsilon_y\, dy \operatorname{sen}\theta}{ds} - \frac{\gamma_{xy}\, dy \cos\theta}{ds} \qquad (b)$$

Ahora bien, en la figura 9-26c, $dx/ds = \cos\theta$ y $dy/ds = \operatorname{sen}\theta$, con lo cual la ecuación (b) se transforma en

$$\epsilon_a = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta - \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad (c)$$

y escribiendo $\cos^2\theta$ y $\operatorname{sen}^2\theta$ en función de 2θ se obtiene finalmente:

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \qquad (9\text{–}15)$$

La desviación angular β de OA se determina dividiendo la componente perpendicular AA'' entre la longitud inicial ds de OA. Proyectando el movimiento del punto A sobre la normal a OA, se obtiene como se observa en la figura 9-26d,

$$AA'' = \epsilon_x\, dx \operatorname{sen}\theta - \epsilon_y\, dy \cos\theta - \gamma_{xy}\, dy \operatorname{sen}\theta$$

de donde,

$$\beta = \frac{AA''}{ds} = \frac{\epsilon_x\, dx \operatorname{sen}\theta}{ds} - \frac{\epsilon_y\, dy \cos\theta}{ds} - \frac{\gamma_{xy}\, dy \operatorname{sen}\theta}{ds}$$
$$= \epsilon_x \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \epsilon_y \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \gamma_{xy} \operatorname{sen}^2\theta \qquad (e)$$

Para el elemento perpendicular a OA, su desviación β' se halla sustituyendo θ por $(\theta + 90°)$, y como $\operatorname{sen}(90° + \theta) = \cos\theta$ y $\cos(90° + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$, de (e) resulta

$$\beta' = -\epsilon_x \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \epsilon_y \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \gamma_{xy} \cos^2\theta \qquad (f)$$

Como β y β' giran en diferente sentido,* su suma aritmética es igual a su diferencia algebraica, por lo que la variación total del ángulo recto entre OA y su normal OB, que define la distorsión para un elemento a $\theta°$ de los ejes X-Y, viene dada por:

$$\gamma_{ab} = \beta - \beta' = \epsilon_x(2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta) - \epsilon_y(2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta)$$
$$+ \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

* Si β y β' giran en el mismo sentido no habría variación del ángulo recto, es decir, distorsión, lo que se comprueba fácilmente sumando β y β'.

que en función del ángulo doble 2θ, se transforma en:

$$\frac{1}{2}\gamma_{ab} = \frac{(\epsilon_x - \epsilon_y)}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\theta \tag{9-16}$$

Comparando las ecuaciones (9-15) y (9-16) con las expresiones (9-5) y (9-6), que definen la variación de los esfuerzos cortantes y normales, se observa su analogía formal, por lo que se puede establecer la representación de las deformaciones normales y cortantes mediante un círculo de Mohr de deformaciones, trazado en la misma forma que el de esfuerzos, *salvo que en ordenadas se lleva la mitad del valor de la distorsión* en lugar de la distorsión total.

En el círculo de Mohr de deformaciones, se emplea el criterio de signos siguiente: Las deformaciones de alargamiento (tensión) se consideran positivas y las de acortamiento (compresión) negativas, y las distorsiones se consideran positivas si incrementan el ángulo recto inicial del elemento sin deformar*. Es posible establecer un criterio de signos más general para la distorsión angular, representando la distorsión entre las direcciones OA y OB por γ_{ab}, en la que el primer subíndice indica la dirección OA, asociada al ángulo θ. La distorsión entonces se considerará positiva si la dirección asociada al primer subíndice se mueve en el sentido del reloj respecto de la dirección asociada al segundo, y viceversa. Este criterio lleva implícito que $\gamma_{ab} = -\gamma_{ba}$, y concuerda con el convenio adoptado para los esfuerzos, en el que $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$, así como en los productos de inercia, en donde $P_{xy} = -P_{yx}$.

La analogía formal entre las componentes del esfuerzo y de la deformación también se manifiesta en la siguiente relación. Un círculo de Mohr de deformaciones se transforma en una circunferencia concéntrica de esfuerzos mediante las siguientes transformaciones de escala y origen:

$$R_\sigma = R_\epsilon \frac{E}{1+\nu} \tag{9-17}$$

$$(OC)_\sigma = (OC)_\epsilon \frac{E}{1-\nu} \tag{9-18}$$

en donde R_σ y R_ϵ son los radios respectivos de los círculos de esfuerzo y de deformación, en la figura 9-27, y $(OC)_\sigma$ y $(OC)_\epsilon$ las abscisas de los centros de las citadas circunferencias. El mó-

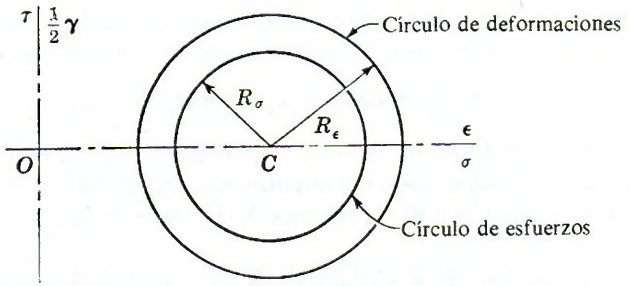


Figura 9-27. Transformación de la circunferencia de Mohr de deformaciones en el círculo de Mohr de esfuerzos.

* Esto es contrario a la convención adoptada en la teoría matemática de elasticidad, donde el *cerrarse* el ángulo recto se toma como distorsión positiva. El convenio adoptado en este texto no solamente logra la correspondencia entre los círculos de Mohr de momentos de inercia, de esfuerzos y de deformaciones, sino que evita la artificialidad de tener que tomar valores de una distorsión positiva en sentido negativo en el círculo de Mohr.

dulo elástico es E y ν es el coeficiente de Poisson. La demostración de estas relaciones se deja como ejercicio, pero su aplicación se muestra en el ejemplo que sigue.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

964. Sea un sólido en un estado de esfuerzo plano. En un cierto punto del mismo, las deformaciones son $\epsilon_x = 800 \times 10^{-6}$ m/m, $\epsilon_y = 200 \times 10^{-6}$ m/m, y $\gamma_{xy} = 600 \times 10^{-6}$ rad. Calcular: (*a*) las deformaciones y los ejes principales, y (*b*) la deformación ϵ_a en una dirección que forme 60° con el eje X, la deformación ϵ_b en dirección perpendicular, y la distorsión γ_{ab}. Además si $E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$, hallar los esfuerzos principales y los esfuerzos normal y cortante en un elemento que forme un ángulo de 60° con el eje X.

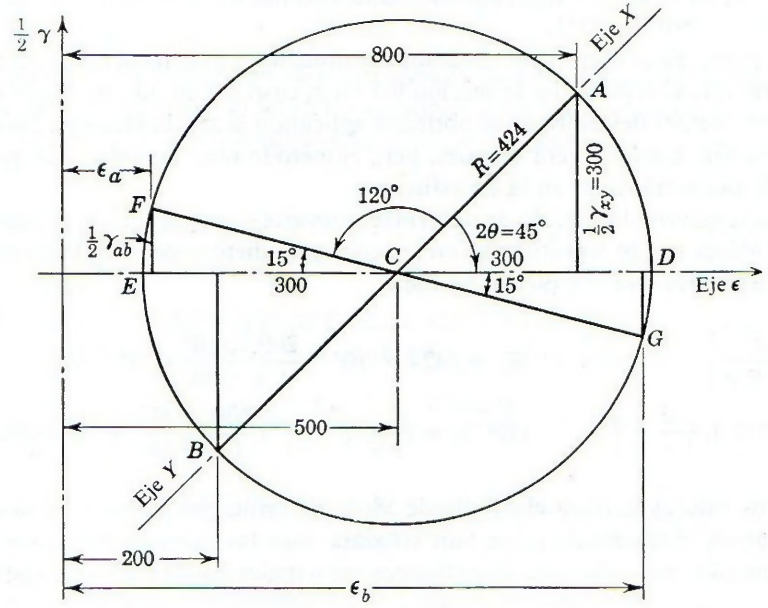


Figura 9-28. Círculo de deformación.

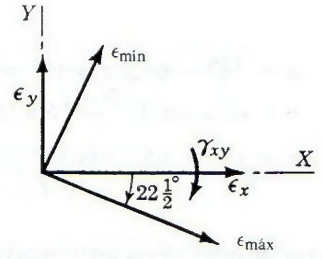


Figura 9-29.

Solución: El círculo de Mohr para el estado dado de deformaciones se representa en la figura 9-28. Prescindiendo del factor 10^{-6}, las coordenadas del punto A son $\epsilon_x = 800$ y $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = 300$, y las coordenadas de B son $\epsilon_y = 200$ y $\frac{1}{2}\gamma_{yx} = -300$. El eje X queda representado por el radio CA y el eje Y, por CB. El radio de la circunferencia, por el triángulo $CA'A$, es 424, por lo que la deformación principal máxima ϵ_1, representada por el punto D, es igual a $500 + 424 = 924 \times 10^{-6}$. La deformación principal mínima ϵ_2, representada por el punto E, es igual a $500 - 424 = 76 \times 10^{-6}$. El ángulo entre el eje de deformación máxima y el eje X es la mitad del ángulo ACD es decir, 22.5° en sentido del reloj a partir de OX, como se indica en la figura 9-29.

Para determinar la deformación ϵ_a se traza el radio CF que forme un ángulo de 120° (doble de 60°) con CA (que representa el eje X) en sentido del reloj. Las coordenadas del punto F son $\epsilon_a = 500 - 424 \cos 15° = 90 \times 10^{-6}$, y $\frac{1}{2}\gamma_{ab} = 424 \operatorname{sen} 15° = 110$, por lo que $\gamma_{ab} = 220 \times 10^{-6}$ radianes. Como las direcciones de ϵ_a y ϵ_b forman un ángulo de 90; el punto G representativo de la dirección ϵ_b es diametralmente opuesto al punto F. Por tanto, $\epsilon_b = 500 + 424 \cos 15° = 910. \times 10^{-6}$.

Vemos, pues, que, excepto por el cambio de notación y al considerar $\frac{1}{2}\gamma$, el procedimiento es el mismo que el seguido en la sección 9-7 en el caso del círculo de Mohr de esfuerzos.

Las componentes del esfuerzo se obtienen aplicando la ley de Hooke a las componentes de la deformación, como se verá después, pero el método más cómodo es la transformación del círculo de deformaciones en la de esfuerzos.

Los únicos valores del círculo de deformaciones que se necesitan son el radio y la abscisa del centro, valores que se transforman en los correspondientes del círculo de esfuerzos aplicando las ecuaciones (9-17) y (9-18). Se tiene:

$$\left[R_\sigma = R_\epsilon \frac{E}{1+\nu}\right] \qquad R_\sigma = (424 \times 10^{-6}) \frac{200 \times 10^9}{1 + 0.30} = 65.2 \text{ MPa}$$

$$\left[(OC)_\sigma = (OC)_\epsilon \frac{E}{1-\nu}\right] \qquad (OC)_\sigma = (500 \times 10^{-6}) \frac{200 \times 10^9}{1 - 0.30} = 143 \text{ MPa}$$

Con estos valores se traza el círculo de Mohr de esfuerzos, como se indica en la figura 9-30. Los puntos representativos se han señalado con las mismas letras que en la figura 9-28*. De acuerdo con todo ello, los esfuerzos principales (en D y E) son, respectivamente,

$$\text{En } D: \qquad \sigma_{\text{máx}} = 143 + 65.2 = 208 \text{ MPa}$$

$$\text{En } E: \qquad \sigma_{\text{mín}} = 143 - 65.2 = 77.8 \text{ MPa}$$

Para el elemento a 60° del eje X, las componentes del esfuerzo vienen dadas por los puntos F y G y sus valores son:

$$\text{En } F: \qquad \sigma = 143 - 65.2 \cos 15° = 80.0 \text{ MPa}$$

$$\tau = 65.2 \operatorname{sen} 15° = 16.9 \text{ MPa}$$

$$\text{En } G: \qquad \sigma = 143 + 65.2 \cos 15° = 206 \text{ MPa}$$

* No es necesario trazar cada figura por separado, ya que los círculos pueden trazarse concéntricos, pero su explicación podría dar lugar a confusiones.

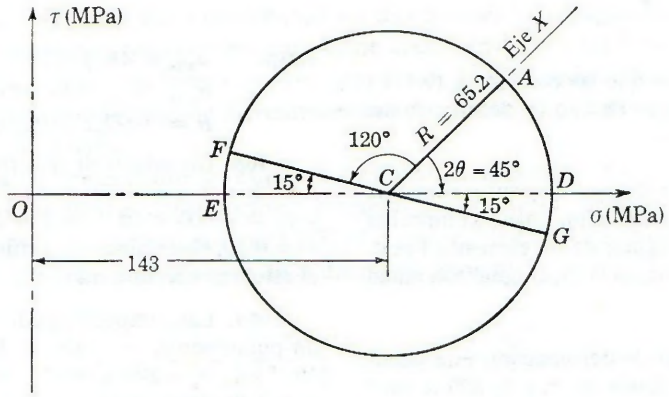


Figura 9-30. Círculo de esfuerzos.

En lugar de aplicar la circunferencia transformada de esfuerzos, también se pueden obtener éstos directamente a partir de las deformaciones, teniendo en cuenta la ley de Hooke para el esfuerzo biaxial (Sec. 2-4) mediante las ecuaciones siguientes:

$$\sigma_x = \frac{E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)}{1 - \nu^2}; \quad \sigma_y = \frac{E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)}{1 - \nu^2}; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{xy}$$

Sustituyendo las deformaciones principales de 924×10^{-6} y 76×10^{-6}, obtenidas en el círculo de deformaciones, figura 9-28, los esfuerzos principales son:

$$\sigma_{máx} = \frac{(200 \times 10^9)(924 + 0.30 \times 76)(10^{-6})}{1 - (0.30)^2} = 208 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{(200 \times 10^9)(76 + 0.30 \times 924)(10^{-6})}{1 - (0.30)^2} = 77.6 \text{ MPa}$$

que coinciden con los resultados obtenidos anteriormente. Por tanto, trazando una circunferencia de Mohr con los valores de los esfuerzos principales, el radio y el centro coincidirán con los valores que aparecen en la figura 9-30.

Análogamente, el esfuerzo normal y el cortante, en el elemento a 60° del eje X, se obtienen a partir de $\epsilon_a = 90 \times 10^{-6}$, $\epsilon_b = 910 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{ab} = 220 \times 10^{-6}$. Aplicando la ley de Hooke,

$$\sigma_a = \frac{(200 \times 10^9)(90 + 0.30 \times 910)(10^{-6})}{1 - (0.30)^2} = 79.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{ab} = \frac{(200 \times 10^9)(220 \times 10^{-6})}{2(1 + 0.30)} = 16.9 \text{ MPa}$$

Comparando ambos métodos de cálculo de esfuerzos, la ventaja de la transformación del círculo de deformaciones en uno de esfuerzos es realmente interesante.

PROBLEMAS

965. Demostrar que las ecuaciones (9-17) y (9-18) transforman un círculo de deformaciones en uno de esfuerzos.

966. Partiendo de un elemento sometido únicamente a esfuerzos principales, comprobar que la desviación angular de un elemento lineal, tal como OA de la figura 9-26, es igual a la mitad de la distorsión γ_{ab}.

967. Un estado de deformación está determinado por $\epsilon_x = -400 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 200 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = 800 \times 10^{-6}$. Si $E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$, calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, así como las componentes del esfuerzo en un elemento a $+ 40°$ del eje X.

Resp. $\sigma_{máx} = 48.3$ MPa;
$\sigma_{min} = -106$ MPa;
$\sigma = -97.2$ MPa; $\tau = -34.8$ MPa

968. Un estado de deformación está determinado por $\epsilon_x = -400 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 200 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = -600 \times 10^{-6}$. Si $E = 200 \times 10^9$ N/m^2 y $\nu = 0.30$, determinar los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo.

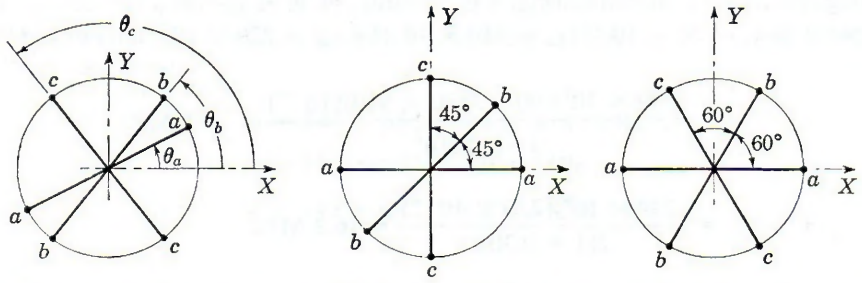
969. Las componentes de la deformación en un punto son $\epsilon_x = -800 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = 200 \times 10^{-6}$ y $\gamma_{xy} = -800 \times 10^{-6}$. Si $E = 200$ GN/m^2 y $\nu = 0.30$, determinar las componentes del esfuerzo en la cara cuya normal forma un ángulo de $+ 20°$ con el eje X.

Resp. $\sigma = -105$ MPa; $\tau = -96.6$ MPa

9-10. ROSETAS DE DEFORMACIONES

El esfuerzo en un barra sometida a esfuerzo axial simple se puede determinar experimentalmente mediante un extensómetro adherido a la barra y orientado en la dirección (conocida) del esfuerzo. Este se calcula en función de la deformación medida teniendo presente la relación $\sigma = \epsilon E$. Las deformaciones son, en general, muy pequeñas (inferiores a uno por mil) por lo que los extensómetros han de ser sumamente sensibles. Los aparatos primitivos eran de fundamento mecánico u óptico, pero hoy en día, han sido sustituidos casi por completo por los extensómetros eléctricos, que constan básicamente de un hilo o alambre de un material cuya resistencia eléctrica varía con su deformación. Aplicado el extensómetro al sólido en estudio, quedan determinadas las deformaciones en función del cambio de resistencia eléctrica del alambre. Estos tipos de extensómetros o defornúmetros tienen hoy en día un alto grado de precisión.

Como se ha dicho, un simple aparato orientado en la dirección de un esfuerzo axial basta para determinar el valor de dicho esfuerzo. En el caso de esfuerzo biaxial, se emplearían dos extensómetros siempre que se conocieran las direcciones de los esfuerzos principales, lo



(a) Roseta general (b) Roseta de 45° (c) Roseta de 60°

Figura 9-31. Rosetas de deformaciones.

que no es el caso general. Para determinar las direcciones y las magnitudes de los esfuerzos principales, se necesitan conocer tres valores de la deformación. En la sección anterior se ha visto cómo se utilizan los valores ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} para ello. Desgraciadamente, no hay instrumento de medida alguno que indique directamente la distorsión γ_{xy}, de manera que hay que acudir a otro procedimiento.

Se demuestra ahora cómo un estado de deformación queda unívocamente determinado mediante la medida de tres deformaciones lineales ϵ_a, ϵ_b, ϵ_c en tres direcciones arbitrarias θ_a, θ_b, θ_c en el mismo punto, como en la figura 9-31. En efecto, sustituyendo estas deformaciones en la ecuación (9-15) resulta el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_a &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta_a - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta_a \\
\epsilon_b &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta_b - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta_b \\
\epsilon_c &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta_c - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta_c
\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

La solución de este sistema determina los valores de las componentes de la deformación ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy}.

Por conveniencia práctica se suelen obtener las deformaciones lineales utilizando una de estas dos combinaciones de tres extensómetros: (1) Tres instrumentos colocados con sus ejes a 45°, y (2) tres instrumentos colocados con sus ejes a 60°, como se indica en las figuras 9-31b y c. Estas disposiciones se llaman *rosetas de deformación*. Los tres extensómetros están eléctricamente aislados entre sí y miden las deformaciones en la superficie de la estructura a la que se haya aplicado. Veamos ahora cómo construir el círculo de Mohr de deformaciones a partir de cada una de estas rosetas.

LA ROSETA DE DEFORMACIÓN A 45° O RECTANGULAR

Haciendo $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 45°$ y $\theta_c = 90°$ en el sistema (*a*), se obtiene:

$$\epsilon_x = \epsilon_a, \qquad \epsilon_y = \epsilon_c, \qquad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \epsilon_b \qquad (9\text{-}19)$$

valores de ϵ_x, ϵ_y, y γ_{xy} que definen un estado de deformaciones a partir del cual se puede trazar el círculo de Mohr correspondiente y luego el de esfuerzos, tal como se ha explicado en la sección anterior.

Estos resultados también se obtienen directamente trazando un círculo de Mohr en la forma que a continuación se indica. En la figura 9-32, cada una de las tres deformaciones ϵ_a, ϵ_b y ϵ_c, a 45°, se representa por los tres radios *CA*, *CB* y *CD*, separados 90°. El centro *C* está en el punto medio entre *G* y *E*, de manera que un lado (*CE*) del triángulo *ACE* es conocido. Hay que calcular el otro lado (*AE*) de este triángulo. Como los triángulos *CBF* y *CAE* son iguales, $AE = CF$ y $CF = OC - OF$, por lo que

$$AE = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - \epsilon_b \qquad (b)$$

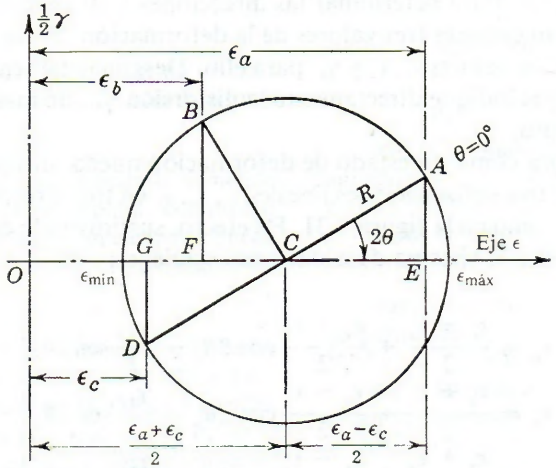


Figura 9-32. Círculo de Mohr para la roseta de deformación a 45°.

y también

$$CE = \frac{\epsilon_a - \epsilon_c}{2} \tag{c}$$

Por tanto, el radio $R = CA$ viene determinado por:

$$R = \sqrt{(CE)^2 + (AE)^2} \tag{d}$$

Se pueden confrontar estos resultados con los valores correspondientes en un círculo de Mohr construido a partir de las componentes de la deformación, según la ecuación (9-19).

LA ROSETA A 60° O EQUIANGULAR

Los ángulos de referencia son $\theta_a = \theta°$, $\theta_b = 60°$ y $\theta_c = 120°$. Al sustituirlos en (*a*) y resolver el sistema, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a) \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon_c - \epsilon_b) \end{aligned}\right\} \tag{9-20}$$

A partir de estos resultados se puede trazar el círculo de deformaciones y el de esfuerzos, como ya se ha dicho en la sección anterior.

PROBLEMAS

970. Comprobar que las expresiones en (9-20), para la roseta a 60° son correctas.

971. Demostrar que, para la roseta a 60°, las deformaciones principales son:

$$\epsilon_{\substack{máx \\ mín}} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\epsilon_a(\epsilon_a - \epsilon_b) + \epsilon_b(\epsilon_b - \epsilon_c) + \epsilon_c(\epsilon_c - \epsilon_a)}$$

y la dirección de la deformación principal máxima queda definida por:

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}\,(\epsilon_b - \epsilon_c)}{2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c}$$

en donde los valores positivos de θ se miden en sentido contrario al del reloj a partir de ϵ_a.

972. Demostrar que en la roseta a 45° las deformaciones principales vienen dadas por:

$$\epsilon_{\substack{\text{máx.}\\ \text{mín.}}} = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2 + (\epsilon_b - \epsilon_c)^2}$$

y la dirección de la deformación principal máxima, por:

$$\tan 2\theta = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c - 2\epsilon_b}{\epsilon_a - \epsilon_c}$$

973. Las tres lecturas, en *millonésimas*, en una roseta de deformación a 45° han sido: $\epsilon_a = 400$, $\epsilon_b = -200$ y $\epsilon_c = -100$. Si $E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$, determinar los esfuerzos principales.

Resp. $\sigma_{máx} = 109$ MPa en $\theta = -27.2°$

974. Repetir el problema anterior si $\epsilon_a = 300$, $\epsilon_b = 600$ y $\epsilon_c = 100$.

975. Las deformaciones, en millonésimas, medidas en una roseta a 60° han sido: $\epsilon_a = 300$, $\epsilon_b = 400$ y $\epsilon_c = 100$. Con $E = 200$ GN/m^2 y $\nu = 0.30$, calcular el esfuerzo cortante máximo y los esfuerzos principales.

Resp. $\sigma_{máx} = 64.2$ MN/m^2 en $\theta = -22.0°$

976. Una roseta a 60° aplicada en un punto de la envolvente de aluminio del fuselaje de un avión mide las siguientes deformaciones en millonésimas: $\epsilon_a = 200$, $\epsilon_b = 200$ y $\epsilon_c = 400$. Si $E = 70$ GPa y $\nu = \frac{1}{3}$, calcular los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo.

977. Repetir el problema anterior con $\epsilon_a = -100$, $\epsilon_b = 200 \times 10^{-6}$ y $\epsilon_c = -400$.

Resp. $\sigma_{máx} = 7.7$ MPa en $\theta = 45°$

9-11. RELACIÓN ENTRE EL MÓDULO ELÁSTICO TRANSVERSAL Y EL MÓDULO ELÁSTICO LONGITUDINAL

En la sección 2-4 se estableció la relación $G = E/2(1 + \nu)$ que ahora se demuestra. El estado de esfuerzos representado en la figura 9-33a consiste en una tensión σ_x y una compresión σ_y de la misma magnitud. En el círculo de Mohr correspondiente, figura 9-33b, se observa que un elemento a 45°, como el de la figura 9-33c, está sometido a esfuerzo cortante puro τ, numéricamente igual a σ_x y a σ_y. Este esfuerzo cortante deforma al elemento *abcd* según el contorno punteado $a'b'c'd'$ de la figura 9-33a. El ángulo recto en a ha disminuido a $(90° - \gamma)$, si γ es la distorsión o deformación angular. Al mismo tiempo, el ángulo recto en b ha aumentado en γ, por lo que ahora vale $(90° + \gamma)$.

Consideremos la deformación del triángulo rectángulo isósceles *aob*. Como $\sigma_x = -\sigma_y = \tau$, de las ecuaciones (2-9) y (2-10), se deducen las deformaciones ϵ_x y ϵ_y.

$$\epsilon_x = \frac{\tau(1 + \nu)}{E}, \qquad \epsilon_y = -\frac{\tau(1 + \nu)}{E}$$

por lo que los lados *oa* y *ob*, una vez deformados, valen, respectivamente,

$$\overline{oa'} = \overline{oa}\left[1 + \frac{\tau(1 + \nu)}{E}\right], \qquad \overline{ob'} = \overline{ob}\left[1 - \frac{\tau(1 + \nu)}{E}\right]$$

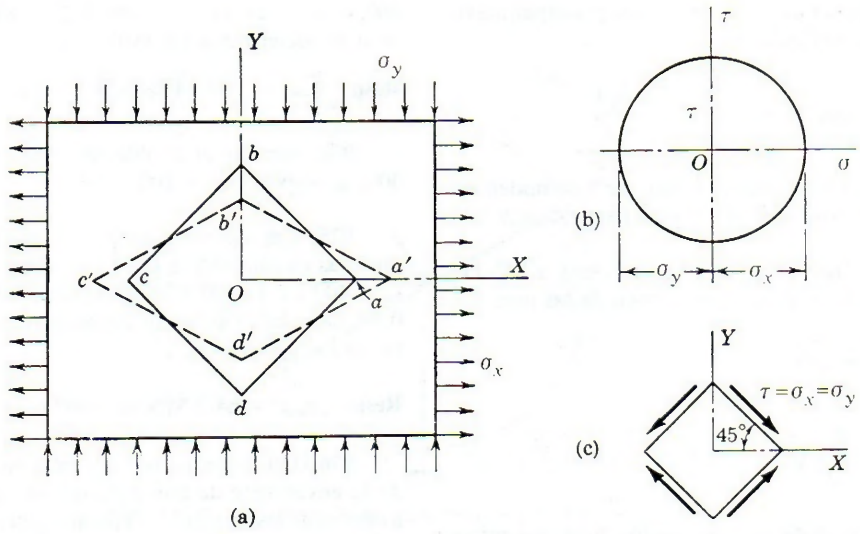


Figura 9-33. Esfuerzo cortante puro y distorsión.

Así, en el triángulo rectángulo $oa'b'$ tenemos

$$\tan oa'b' = \tan\left(45° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\overline{ob'}}{\overline{oa'}} = \frac{1 - \dfrac{\tau(1+\nu)}{E}}{1 + \dfrac{\tau(1+\nu)}{E}} \qquad (a)$$

Ahora bien,

$$\tan\left(45° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan 45° - \tan\dfrac{\gamma}{2}}{1 + \tan 45° \tan\dfrac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \dfrac{\gamma}{2}}{1 + \dfrac{\gamma}{2}} \qquad (b)$$

ya que para ángulos muy pequeños γ como son los de distorsión, la tangente coincide con el ángulo expresado en radianes. Igualando (a) y (b) resulta:

$$\frac{1 - \dfrac{\gamma}{2}}{1 + \dfrac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \dfrac{\tau(1+\nu)}{E}}{1 + \dfrac{\tau(1+\nu)}{E}}$$

que, se reduce a

$$\gamma = \frac{2\tau(1+\nu)}{E} \quad \text{o sea,} \quad \frac{\tau}{\gamma} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Sustituyendo τ/γ por G, según la ley de Hooke para el cortante (ecuación 2-6), se obtiene finalmente:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (2\text{-}13)$$

que expresa la relación que existe entre las tres constantes E, G y ν.

RESUMEN

Los esfuerzos normales a que da lugar una combinación de cargas axiales y de flexión vienen dadas por:

$$\sigma = \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} \frac{P}{A} \pm \frac{My}{I} \tag{9-1}$$

en donde el signo más corresponde a la tensión y el signo menos a la compresión. Los signos dentro del círculo indican que el esfuerzo axial es uniforme y del mismo signo en toda la sección transversal, mientras que el valor y el signo del esfuerzo de flexión varía con el punto de la sección que se considere.

El núcleo (Sec. 9-3) es la parte de la sección recta a través de la cual debe pasar la resultante de una fuerza de compresión para que no aparezcan esfuerzos de tensión en punto alguno de la sección.

En los sólidos sometidos a otras combinaciones de esfuerzos, en cualquier punto aparecen esfuerzos normales y cortantes. Los esfuerzos, en un elemento cualquiera, varían con su orientación y vienen expresados por las siguientes ecuaciones, obtenidas en la sección 9-6,

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{9-5}$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{9-6}$$

Sin embargo, las reglas dadas para el círculo de Mohr hacen innecesario tener que recordar estas ecuaciones, así como las que proporcionan los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo, ya que el círculo de Mohr da toda la información necesaria para el cálculo de los esfuerzos que se necesite. En la sección 9-8 se ven otras aplicaciones del círculo de Mohr en el diseño de elementos de máquina.

En la sección 9-9 se describe la utilización del círculo de Mohr de deformaciones. El procedimiento es en todo análogo al de esfuerzos, excepto que en ordenadas se llevan los valores *mitad de la distorsión*. Un círculo de deformaciones se transforma en el correspondiente de los esfuerzos por medio de las expresiones:

$$R_\sigma = R_\epsilon \frac{E}{1 + \nu} \tag{9-17}$$

$$(OC)_\sigma = (OC)_\epsilon \frac{E}{1 - \nu} \tag{9-18}$$

con lo que los esfuerzos principales se determinan con suma facilidad. Para la determinación experimental de los esfuerzos se emplea (Sec. 9-10) la roseta de deformaciones. Las deformaciones normales o lineales según tres direcciones dadas, determinan un estado de deformación a partir del cual se puede trazar el círculo de Mohr correspondiente y luego transformarlo en el círculo de esfuerzos.

10
vigas reforzadas

10-1. INTRODUCCIÓN

En los tiempos de escasez y carestía de acero surgió la tendencia de reforzar las vigas de madera mediante placas de acero, en lugar de emplear perfiles laminados. Hoy en día ya no suelen emplearse las vigas de madera reforzadas, excepto en aquellos casos en que exista abundancia y bajo costo de la madera y el costo del transporte del acero sea elevado. El tipo de viga reforzada más utilizado es la de concreto armado.

La teoría de la flexión estudiada no se puede aplicar directamente a las vigas compuestas (o de varios materiales), ya que aquélla se basa en la hipótesis de homogeneidad de la viga, lo que lleva consigo que, al permanecer planas las secciones planas, las deformaciones sean directamente proporcionales a la distancia a la línea neutra, y lo mismo ocurre con los esfuerzos. En el estudio de las vigas compuestas se hace la misma hipótesis de que las secciones planas permanecen planas, es decir, que la deformación es directamente proporcional a la distancia a la línea neutra, pero no ocurre igual con los esfuerzos, al no ser homogéneo el material.

El mètodo a seguir en el estudio de las vigas compuestas suele ser su transformación en una viga homogénea equivalente a la que se aplique directamente las fórmulas de la flexión. Los principios en que se basa esta transformación son que la deformación y la capacidad de carga no varíen. Examinemos, en primer lugar, el caso general de vigas compuestas de diferentes materiales, y después el de las vigas de concreto armado, aplicando a estas últimas un método más directo y que se suele emplear en la teoría del concreto (u hormigón) armado, aunque también se puede utilizar la transformación en una viga equivalente.

10-2. VIGAS DE DISTINTOS MATERIALES

La viga de madera de la figura 10-1a está reforzada en su cara inferior con una placa de acero firmemente asegurada a la madera de forma que no pueda haber deslizamiento entre

ambos materiales cuando la viga se deforme. En este caso, no se cumplen todas las hipótesis que se hicieron en la sección 5-1 para la flexión, por que allí se suponía la viga homogénea y, por tanto, no se pueden aplicar directamente los resultados obtenidos a la viga que ahora se considera. Sin embargo, mediante ciertas modificaciones o transformaciones es posible obtener una sección equivalente que sea de uno solo de los materiales, y a la que se puedan aplicar las conocidas fórmulas de la flexión.

Para ello, consideremos una fibra longitudinal de acero en el punto A. Puesto que se supone que la madera y el acero están perfectamente unidos (atornillados, por ejemplo), las deformaciones de las fibras del acero y de la madera en el punto A han de ser iguales, es decir, $\epsilon_a = \epsilon_m$. Expresando esta relación en función de los esfuerzos y de los módulos elásticos se tiene:

$$\frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_m}{E_m} \qquad (a)$$

Esta misma relación se ha de cumplir entre los esfuerzos y los módulos elásticos en cualquier punto del acero, entre la fibra de metal que pasa por él y la fibra de madera equivalente. Además, para la equivalencia completa, las cargas soportadas por una fibra cualquiera de acero y su equivalente en madera han de ser iguales, es decir, $P_a = P_m$, lo que en función de las secciones de la fibra de acero y de su equivalente en madera permite escribir:

$$A_a\sigma_a = A_m\sigma_m \qquad (b)$$

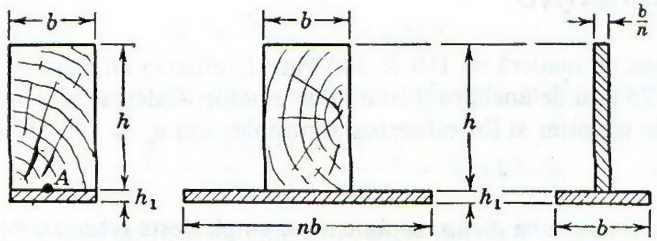
De las ecuaciones (a) y (b) resulta:

$$A_a\left(\frac{E_a}{E_m}\right)\sigma_m = A_m\sigma_m$$

Dividiendo entre σ_m y llamando n a la relación E_a/E_m, se obtiene finalmente:

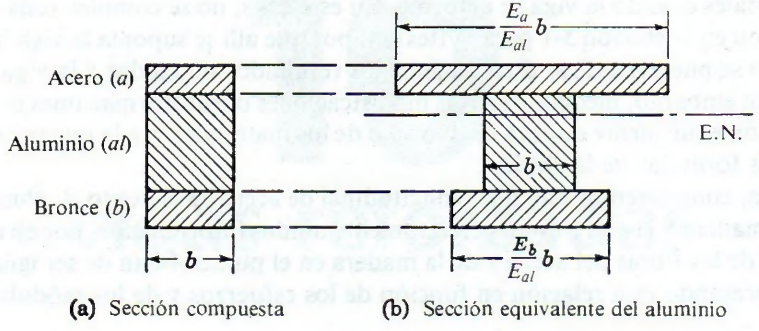
$$\boldsymbol{A_m = nA_a} \qquad \textbf{(10–1)}$$

Esto significa que el área de la sección equivalente en madera (equivalente a la sección de cada fibra de acero) es n veces el área de la sección de acero. La forma, dimensiones y situación del área equivalente quedan completamente determinadas por la condición de que



(a) Sección real de madera y acero (b) Sección equivalente de madera (c) Sección equivalente de acero

Figura 10-1. Secciones equivalentes.



(a) Sección compuesta **(b)** Sección equivalente del aluminio

Figura 10-2.

las fibras de madera, equivalentes a las fibras de acero, tienen que estar a la misma distancia de la línea neutra, para que se verifique la condición de igual deformación de la ecuación (*a*). En resumen, la sección de madera equivalente a la de acero es n veces más ancha. En la figura 10-1b aparece representada la sección equivalente de madera. Se puede proceder a la inversa, es decir, obtener la sección equivalente en acero sustituyendo la parte de madera por otra de acero de anchura $1/n$ de la que tenía la madera, como se observa en la figura 10-1c.

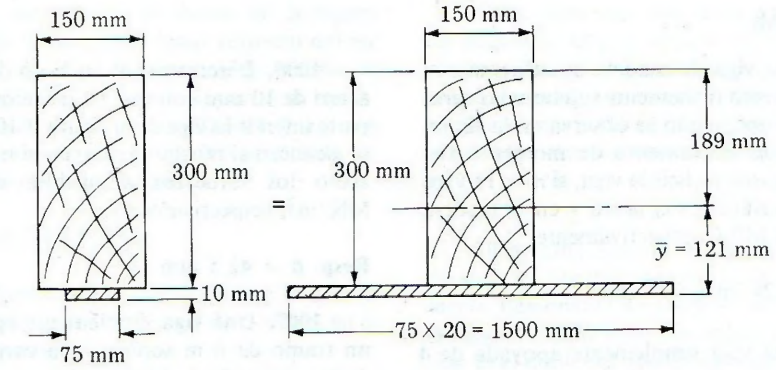
En estas condiciones, ya se puede aplicar directamente la fórmula de flexión a cualquiera de las secciones equivalentes. Si se aplica a la sección equivalente en madera, el esfuerzo real en el acero es, de acuerdo con la ecuación (*a*), n veces el esfuerzo en la madera equivalente. Si se aplica a la sección equivalente en acero, el esfuerzo real en la madera es $1/n$ del esfuerzo en el acero equivalente a esta madera.

El mismo procedimiento se emplea en vigas compuestas de más de dos materiales. Por ejemplo, en la sección experimental de la figura 10-2a, que consiste en un núcleo o alma de aluminio, se han asegurado firmemente una placa de acero y otra de bronce. Aplicando al acero y al bronce las relaciones de sus módulos elásticos al del aluminio, la sección compuesta se transforma en su equivalente en aluminio que muestra la figura 10-2b, a la cual se aplica la fórmula de la flexión. En todos los casos, la línea neutra pasa por el centro de gravedad de la sección equivalente, y el momento de inercia por emplear es el de la sección transformada con respecto a la línea neutra.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1001. Una viga de madera de 150 × 300 mm se refuerza en su parte inferior con una placa de acero de 75 mm de anchura y 10 mm de espesor. Calcular el momento flexionante máximo que puede soportar si los esfuerzos admisibles son $\sigma_a \leq 120$ MPa y $\sigma_m \leq 8$ MPa. $E_a/E_m = n = 20$.

Solución: Aunque como se ha dicho, raramente se emplea este refuerzo de las vigas de madera con placas de acero, este problema aclara varios conceptos y detalles de cálculo que luego aparecerán en las vigas de concreto armado. El primer punto por considerar es el de la posición de la línea neutra. Como ésta pasa por el centro de gravedad de la sección equiva-



(a) Sección real (b) Sección equivalente

Figura 10-3.

lente, figura 10-3b, tomando momentos de las áreas, con respecto a un eje que pase por el borde inferior de la viga, resulta:

$$[A\bar{y} = \Sigma ay] \qquad [(45 \times 10^3) + (15 \times 10^3)]\bar{y} = (45 \times 10^3)(160) + (15 \times 10^3)(5)$$

$$\bar{y} = 121 \text{ mm}$$

Para calcular el momento de inercia con respecto al E.N., se determina con respecto al eje que pasa por la unión del alma y el ala de la viga en T invertida que es la sección equivalente, y se aplica después el teorema de Steiner como se indica:

$$\left[I = \Sigma \frac{bh^3}{3}\right] \qquad I = \frac{150(300)^3}{3} + \frac{1500(10)^3}{3} = 1350 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$[\bar{I} = I - Ad^2] \qquad I_{E.N.} = (1350 \times 10^6) - (60 \times 10^3)(111)^2 = 611 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

El momento que puede soportar la sección, en función del esfuerzo admisible en la madera, es:

$$\left[M = \frac{\sigma I}{y}\right] \qquad M_m = \frac{(8 \times 10^6)(611 \times 10^{-6})}{189 \times 10^{-3}} = 25.9 \text{ kN·m}$$

En la madera equivalente al acero, el esfuerzo máximo es

$$\sigma_m = \frac{\sigma_a}{n} = \frac{120}{20} = 6 \text{ MPa}$$

por lo que el momento correspondiente al esfuerzo admisible en el acero es:

$$\left[M = \frac{\sigma I}{y}\right] \qquad M_a = \frac{(6 \times 10^6)(611 \times 10^{-6})}{121 \times 10^{-3}} = 30.3 \text{ kN·m}$$

El menor de los dos momentos obtenidos, es decir, $M_m = 25.9$ kN · m , es el momento máximo que puede soportar la sección. En este caso hay exceso de acero, por lo que la viga se llama sobrearmada o sobrerreforzada. (Conviene que el lector resuelva este problema utilizando una sección equivalente de acero.)

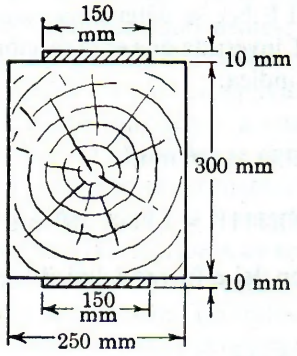
PROBLEMAS

1002. Una viga de madera se refuerza con dos placas de acero firmemente sujetas a las caras superior e inferior, como se observa en la figura P-1002. Calcular el aumento de momento flexionante que puede resistir la viga, si $n = 15$ y los esfuerzos admisibles en el acero y en la madera son de 120 y 8 MPa, respectivamente.

Resp. 52.2 kN·m

1003. Una viga simplemente apoyada de 4 m de longitud tiene la sección recta representada en la figura P-1003. Soporta una carga uniformemente repartida de 20 kN/m sobre la mitad central del tramo. Si $n = 15$, calcular los esfuerzos máximos en la madera y en el acero.

1004. Repetir el problema 1002 si los refuerzos son de aluminio, con un esfuerzo admisible de 80 MN/m^2 y $n = 5$.



Figuras P-1002, P-1003, P-1004.

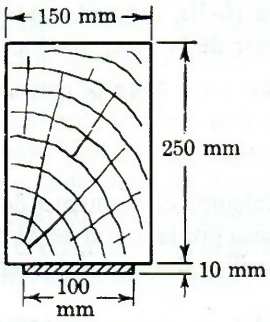
1005. Una viga de madera simplemente apoyada, de 150 × 250 mm de sección, se refuerza solamente en su parte inferior con placa de acero, como se indica en la figura P-1005. Calcular la carga concentrada que puede aplicarse en el centro de un tramo de 6 m si $n = 20$, $\sigma_a \leq 120$ MPa y $\sigma_m \leq 8$ MPa. Comprobar que la línea neutra queda a 170.2 mm por debajo del borde superior de la viga y que $I_{L.N.} = 416 \times 10^6$ mm^4.

Resp. $P = 13.1$ kN

1006. Determinar el ancho b de la placa de acero de 10 mm con que ha de reforzarse por su parte inferior la viga de la figura P-1006, para que se alcancen al mismo tiempo en la madera y en el acero los esfuerzos admisibles de 8 y 120 MN/m^2, respectivamente.

Resp. $b = 42.5$ mm

1007. Una viga simplemente apoyada sobre un tramo de 6 m soporta una carga uniformemente repartida de 4 kN/m. La sección recta está representada en la figura P-1007. Si $n = 20$, calcular los esfuerzos máximos en la madera y en el acero. (La carga incluye su peso propio.)



Figuras P-1005, P-1006, P-1007.

1008. Una viga de madera de 150 × 250 mm se refuerza con dos placas de acero de 10 mm de espesor en las caras superior e inferior. Calcular la anchura que deban tener los refuerzos si la viga soportará un momento máximo de 50 kN · m y los esfuerzos admisibles son de 8 y 110 MPa, en la madera y el acero respectivamente. Se considerará $n = 15$.

Resp. $b = 143$ mm

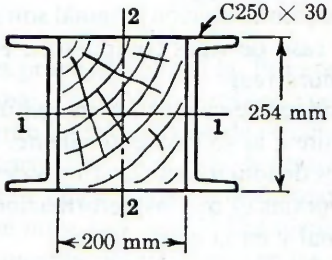
1009. Una viga de madera de 150 × 200 mm se refuerza en sus caras superior e inferior con placas de aluminio de 6 mm de espesor. Calcular su anchura si la viga ha de soportar un momento flexionante de 16 kN · m. Se considerará $n = 5$ y los esfuerzos admisibles 8 y 70 MN/m^2 en la madera y el aluminio, respectivamente.

1010. Un par de perfiles C250 × 30 están firmemente atornillados a una viga de madera de

200 × 254 mm, como se indica en la figura P-1010. Si la flexión tiene lugar respecto del eje 1-1, es decir, en el plano vertical, determinar el momento máximo que puede soportar si los esfuerzos admisibles son $\sigma_a = 120$ MPa y $\sigma_m = 8$ MPa. Se considerará $n = 20$. (El peralte de los canales es también de 254 mm.)

Resp. $M = 74.7$ kN·m

1011. Repetir el problema 1010 si la flexión tiene lugar con respecto al eje 2-2, es decir, en el plano horizontal.



Figuras P-1010 y P-1011.

1012. Un perfil de aluminio de las mismas dimensiones que un perfil W200 × 46 de sección, se refuerza remachando a sus alas unas placas de acero de 6 mm de espesor y 203 mm de anchura, como indica la figura P-1012. Los esfuerzos admisibles en el aluminio y en el acero son de 100 y 140 MPa, respectivamente, y la relación $E_a/E_{al} = 3$. Determinar (a) el incremento de resistencia del perfil original de aluminio, en tanto por ciento de la resistencia del perfil aislado, y (b) el tanto por ciento de incremento de la rigidez EI.

Resp. (a) +21.4%; (b) +175%

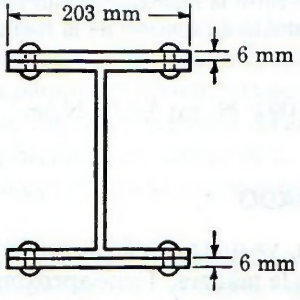


Figura P-1012.

1013. Una viga maciza de acero, de 50 mm de diámetro, está protegida contra la corrosión mediante una capa de aluminio de 6 mm de espesor, firmemente unida a ella. Calcular el momento flexionante máximo que puede soportar la sección compuesta si $\sigma_a \leq 120$ MPa, $\sigma_{al} \leq 100$ MPa. y $E_a/E_{al} = 3$.

1014. Una sección rectangular de 150 mm de anchura por 250 mm de altura soporta un momento flexionante de 140 kN · m. El material de la viga no es isótropo, y su módulo elástico a tensión es el doble del módulo a compresión. Calcular los esfuerzos máximos de tensión y de compresión en la viga.

Resp. $\sigma_t = 108$ MPa; $\sigma_c = 76.5$ MPa

1015. Resolver el problema 1014 si el módulo elástico a compresión es 1.5 veces mayor que a tensión.

1016. Una viga experimental está compuesta de tres materiales, como se observa en la figura P-1016. Las tres partes se hallan firmemente unidas entre sí de manera que no existe posibilidad de deslizamiento entre ellas. Determinar el momento de seguridad que pueden soportar si los esfuerzos admisibles son $\sigma_a \leq 120$ MN/m^2, $\sigma_{al} \leq 80$ MN/m^2, $\sigma_m \leq 10$ MN/m^2, y los módulos elásticos $E_a = 200$ GN/m^2, $E_{al} = 70$ GN/m^2 y $E_m = 10$ GN/m^2.

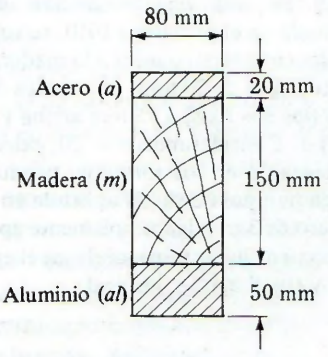


Figura P-1016.

Resp. $M = 33.8$ kN·m

1017. En una sección como la de la figura 10-2a, p. 337, el espesor b es 140 mm para cada material. Las dimensiones verticales son: 20 mm para el acero, 150 mm para el aluminio y 50 mm para el bronce. Suponiendo que los materiales están firmemente unidos, calcule el máximo esfuerzo en cada material cuando la sección resista un momento flexionante de 70 KN · m si $E_a = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa y $E_b = 80$ GPa.

10-3. ESFUERZO CORTANTE Y DEFORMACIÓN EN LAS VIGAS COMPUESTAS DE VARIOS MATERIALES

La fórmula del esfuerzo cortante horizontal, ecuación (5-4), desarrollada para las vigas homogéneas, se aplica exactamente igual a la sección equivalente de una viga compuesta, ya que su determinación se basa en la diferencia de fuerzas normales entre dos secciones adyacentes, y puesto que las fuerzas en la sección equivalente y en la sección original son las mismas (Sec. 10-2), la ecuación (5-4) será válida para este caso de vigas compuestas. Hay que considerar I y M_e en la sección equivalente, y b la anchura real.

Las deformaciones o deflexiones en estas vigas también se calculan como en una viga homogénea, pero tomando el valor de EI correspondiente a la sección equivalente. Esto es válido, ya que la flexión es el resultado de las variaciones de longitud de las fibras de una viga, y uno de los fundamentos del cálculo de vigas compuestas es que las deformaciones unitarias (en las fibras) son las mismas en la sección original y en la equivalente.

PROBLEMAS

1018. Calcular la fuerza cortante vertical admisible en una viga que tiene la sección recta del problema 1005, si $n = 20$ y el esfuerzo cortante máximo ha de ser de 800 kN/m^2.

Resp. $V = 23.0$ kN

1019. En una viga de sección igual a la representada en el problema 1010, se supone que los perfiles en U están unidos a la madera por dos filas de tornillos de 20 mm, espaciados 300 mm y situados (las dos filas) a 75 mm arriba y abajo de la línea 1-1. Considerando $n = 20$, calcular el esfuerzo cortante en los tornillos, producido por una carga puntual de 80 kN aplicada en el centro de un claro de 3 m (viga simplemente apoyada) si el pandeo tiene lugar respecto de (a) el eje 1-1 horizontal y (b) el eje 2-2 vertical.

Resp. (b) $\tau = 74.8$ MPa

1020. La viga del problema 1002 soporta una carga uniformemente repartida de 30 kN/m, apoyada sobre un claro de 5 m de longitud. Con los valores $E_a = 200$ GN/m^2 y $E_m = 10$ GN/m^2, calcular la deflexión en el centro.

Resp. $\delta = 12.2$ mm

1021. En el problema 1016 calcular el flujo de cortante (Sec. 5-7) que existe entre el acero y la madera, y entre la madera y el aluminio. Expresar el resultado en función de la fuerza cortante vertical V.

Resp. $5.09V$ N/m; $5.12V$ N/m

10-4. VIGAS DE CONCRETO (U HORMIGÓN) ARMADO

El concreto es un excelente material de construcción, ya que además de ser barato e incombustible, ni se oxida como el hierro, ni se pudre como la madera. Tiene aproximadamente la misma resistencia a la compresión que una buena madera, pero su resistencia a la ten-

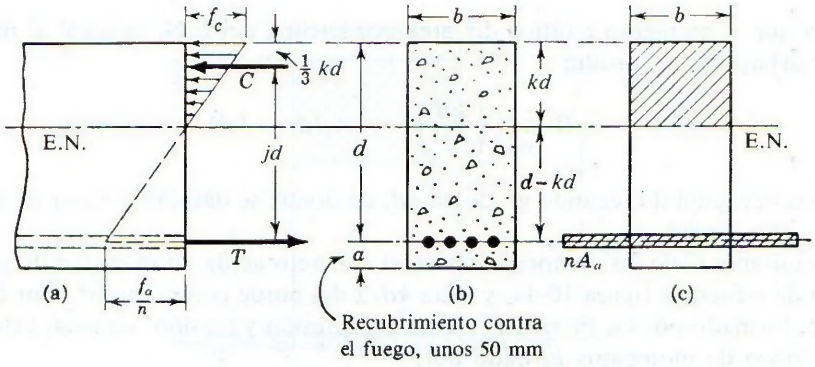


Figura 10-4. Viga de concreto armado y sección equivalente.

sión es prácticamente nula. Por esta razón, la parte de sección que en las vigas de concreto ha de trabajar a tensión se refuerza con barras de acero. Lo ideal sería que estas barras de acero siguieran las trayectorias de esfuerzo de la tensión, pero en la práctica se colocan en una o varias capas, junto a la cara de tensión de la viga. Una característica importantísima es la existencia de una adherencia o trabazón natural entre el concreto y el acero, de manera que en la flexión no se produce deslizamiento entre ambos materiales* y, por tanto, se pueden aplicar los principios desarrollados en las secciones anteriores. También, y afortunadamente, el acero y el concreto tienen aproximadamente el mismo coeficiente térmico de dilatación.

Para efectos de cálculo se supone que el concreto no soporta tensión alguna, de manera que la zona de tensión de la viga no sirve sino para fijar la posición de los refuerzos, que son los que soportan la tensión total. Se supone también que el acero está sometido a un esfuerzo uniforme, como si toda la sección estuviera a la misma distancia de la línea neutra, y que la línea de acción de la resultante de las tensiones está en el centro de las armaduras. Respecto al concreto, se supone que el esfuerzo de compresión varía linealmente con la distancia a la línea neutra, por lo que la resultante de las fuerzas de compresión pasa por el centro de gravedad del triángulo de esfuerzos de compresión (con anchura constante), como se observa en la figura 10-4a. El valor de E para el concreto se suele tomar entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{6}$ de valor de E para el acero, según la calidad del hormigón.

La viga de concreto armado de la figura 10-4a tiene la sección recta que muestra la figura 10-4b. La sección equivalente en concreto, figura 10-4c, se ha obtenido aplicando la ecuación (10-1) para transformar el área A_c, del acero, en el área equivalente en concreto nA_a, siendo n la relación E_a/E_c de los módulos elásticos del acero y del concreto. Las zonas sombreadas de la figura 10-4c indican las áreas que soportan el momento flexionante. La distancia del borde superior de la viga, mejor dicho, de la zona comprimida, al centro de las armaduras se llama *peralte efectivo d*, y la posición de la línea neutra viene determinada por una fracción k de este peralte efectivo d. (También suele utilizarse la letra h para esta distancia.)

Conociendo los valores de b, d, A_a y n, queda determinada la posición del E.N., puesto que pasa por el centro de gravedad de las secciones sombreadas de la figura 10-4c. Teniendo

* En las vigas largas, la adherencia es lo suficientemente grande para que las barras de acero se puedan disponer sin más sujeción adicional, pero en las vigas cortas, se curvan los extremos de las barras en forma de gancho, para que queden ancladas firmemente en el concreto.

en cuenta que el momento estático del área por encima del E.N. es igual al momento del área por debajo de él, resulta

$$(b\ kd)\left(\frac{kd}{2}\right) = nA_a(d - kd) \qquad \textbf{(10-2)}$$

Esta es una ecuación de segundo grado en kd, de donde se despeja el valor de k, o directamente el valor de kd.

La resultante C de las compresiones en el concreto actúa en el centro de gravedad del triángulo de esfuerzos figura 10-4a, y dista $kd/3$ del borde comprimido*. Por tanto, el par resistente, formado por las fuerzas C y T de compresión y tensión, de igual valor absoluto, tiene un brazo de momentos jd dado por:

$$jd = d\ \tfrac{1}{3}\ (kd) \qquad \textbf{(10-3)}$$

Sea f_c el esfuerzo máximo en el concreto y f_a el correspondiente al acero. Conocida la posición de la línea neutra se calcula el momento de inercia de la sección equivalente y se aplica la fórmula de la flexión como en los casos anteriores. Sin embargo, es más directo calcular el momento resistente mediante el par formado por las fuerzas C y T, de valor $C(jd)$ o $T(jd)$.

En estas condiciones, como el esfuerzo medio de compresión en el concreto es $\frac{1}{2}f_c$, la fuerza de compresión C, que es el esfuerzo medio por el área comprimida, se expresa por:

$$C = \tfrac{1}{2} f_c\ (b\ kd) \qquad \textbf{(10-4)}$$

El momento flexionante que puede soportar la sección en función del esfuerzo máximo en el concreto es:

$$M_c = C(jd) = \tfrac{1}{2} fc\ (b\ kd)(jd) \qquad \textbf{(10-5)}$$

La fuerza de tensión T, en el acero, es el producto del área A_a por su esfuerzo f_a y, por tanto, el momento que puede soportar la sección, en función del esfuerzo en el acero es:

$$M_a = T(jd) = f_a A_a(jd) \qquad \textbf{(10-6)}$$

El momento flexionante de seguridad es el menor de estos dos valores M_a y M_c.

En la solución de los problemas es preferible, antes de aplicar las fórmulas directamente, seguir los distintos pasos de la deducción. El primer paso es la determinación de la posición del E.N. A continuación se calcula el brazo de momento del par. Y finalmente, se halla el momento resistente mediante el producto de la fuerza C o T por el brazo de momento jd.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

1022. En una viga de concreto armado, $b = 300$ mm, $d = 500$ mm, $A_a = 1500$ mm^2 y $n = 8$. Calcular los esfuerzos máximos en el concreto y en el acero si el momento flexionante máximo es de 70 kN · m.

* Compárese este proceso con el seguido en el estudio de una sección rectangular homogénea al final de la sección 5-2.

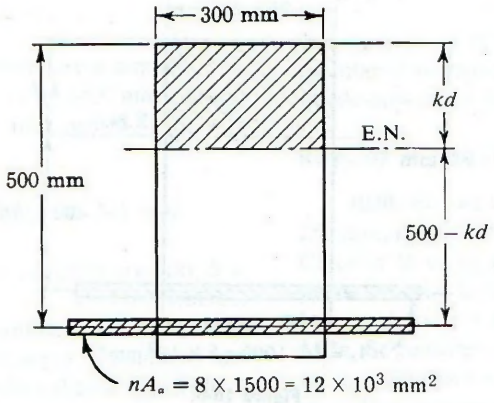


Figura 10-5.

Solución: La sección equivalente de la viga es la representada en la figura 10-5. Como el momento estático del área respecto de la línea neutra es cero,

$$[\Sigma ay = 0] \qquad 300\ kd\left(\frac{kd}{2}\right) = (12 \times 10^3)(500 - kd)$$

es decir,

$$(kd)^2 + 80\ kd - (40 \times 10^3) = 0$$

de donde

$$kd = 164 \text{ mm} = 0.164 \text{ m}$$

El brazo de momento es

$$\left[jd = d - \tfrac{1}{3}kd\right] \qquad jd = 500 - \tfrac{1}{3}(164) = 445 \text{ mm} = 0.445 \text{ m}$$

En función del concreto, el momento resistente es

$$\left[M = \tfrac{1}{2}f_c(b\ kd)(jd)\right] \qquad 70 \times 10^3 = \tfrac{1}{2}f_c(0.300)(0.164)(0.445)$$

por lo que el esfuerzo máximo en el concreto es

$$f_c = 6.39 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

En función del acero, el momento resistente es

$$\left[M = f_c A_a jd\right] \qquad 70 \times 10^3 = f_a(1500 \times 10^{-6})(0.445)$$

de donde el esfuerzo en el acero es

$$f_a = 105 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

1023. En una viga de concreto armado, $b = 250$ mm, $d = 400$ mm, $A_a = 1000$ mm² y $n = 8$. Si los esfuerzos admisibles son $f_c \leq 12$ MPa y $f_a \leq 140$ MPa, determinar el momento

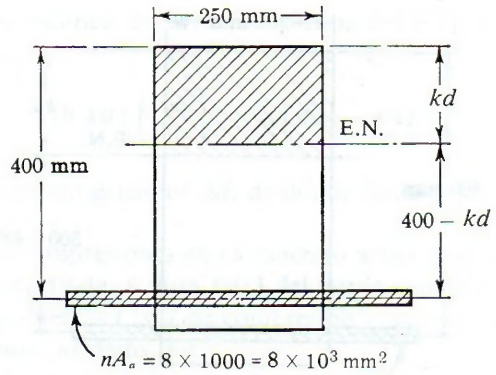


Figura 10-6.

flexionante máximo que puede aplicarse. ¿La armadura es la estricta, o el armado tiene exceso o deficiencia de acero?

Solución: La sección equivalente se indica en la figura 10-6. Procediendo como en el problema anterior, se determinan las distancias kd y jd

$$[\Sigma ay = 0] \qquad 250\ kd\left(\frac{kd}{2}\right) = (8 \times 10^3)(400 - kd)$$

de donde $$kd = 131 \text{ mm} = 0.131 \text{ m}$$

$$[jd = d - \tfrac{1}{3}kd] \qquad jd = 400 - \tfrac{1}{3}(131) = 356 \text{ mm} = 0.356 \text{ m}$$

Para que el esfuerzo en el concreto alcance su valor máximo, se requiere un momento flexionante.

$$[M_c = \tfrac{1}{2} f_c\ (b\ kd)(jd)] \qquad M_a = \tfrac{1}{2}(12 \times 10^6)(0.250)(0.131)(0.356)$$
$$= 70.0 \text{ kN·m}$$

Para que el esfuerzo en el acero alcance su límite, el momento flexionante que se requiere es

$$[M_a = f_a A_a jd] \qquad M_a = (140 \times 10^6)(1000 \times 10^{-6})(0.356)$$
$$= 49.8 \text{ kN·m}$$

El momento flexionante de seguridad es, pues, de 49.8 kN · m. Como el acero alcanza antes el esfuerzo admisible, se deduce que hay deficiencia de refuerzo; es decir, la viga está subarmada o reforzada escasamente*.

* **N. de T.** Como una deficiencia de acero equivale a un exceso de concreto, normalmente se denominan las secciones por su altura o peralte respecto a la sección de acero. Entonces, cuando se alcanzan al mismo tiempo los esfuerzos admisibles en el acero y en el hormigón, se dice que la altura es *estricta*. Si hay exceso de acero y, por tanto, se alcanza antes el esfuerzo admisible en el concreto, la sección es *rebajada*, con altura menor que la estricta. Si se alcanza antes el esfuerzo admisible en el acero, hay falta de armado o refuerzo y exceso de concreto: la sección es entonces *sobreperaltada*, con altura mayor que la estricta.

En este caso, la sección es peraltada.

PROBLEMAS

1024. En una viga de concreto armado, b = 200 mm, d = 400 mm, A_a = 1400 mm^2. Determinar la posición de la línea neutra si (a) n = 6, y (b) n = 10.

Resp. (b) kd = 177 mm; jd = 341 mm

1025. En una viga de concreto armado, b = 250 mm, d = 450 mm y n = 10. Los esfuerzos máximos desarrollados son de 6 MPa en el concreto y de 120 MPa en el acero. Calcular el momento flexionante aplicado y el área requerida de acero.

Resp. M = 45.0 kN · m; A_a = 938 mm^2

1026. Repetir el problema 1025 si d = 540 mm.

1027. Calcular los esfuerzos máximos en el concreto y en el acero en una viga de concreto armado en la que b = 300 mm, d = 500 mm, A_a = 1200 mm^2 y n = 8, al aplicarle un momento flexionante de 70 kN · m.

Resp. f_c = 6.91 MN/m^2; f_a = 130 MN/m^2

1028. En una viga de concreto armado, b = 500 mm, d = 750 mm, A_a = 6000 mm^2 y n = 10. ¿Qué esfuerzos máximos producirá un momento flexionante de 270 kN · m?

1029. Las dimensiones de una viga de concreto armado son b = 300 mm, d = 450 mm, A_a = 1400 mm^2 y n = 8. Si los esfuerzos admisibles son $f_c \leq$ 12 MN/m^2, y $f_a \leq$ 140 MN/m^2 calcular el momento flexionante máximo que se puede aplicar. ¿Cómo está calculada la viga?

Resp. M = 78.4 kN · m; subdimensionada

1030. En una viga de concreto armado, b = 250 mm, d = 450 mm, A_a = 1400 mm^2 y n = 8. Calcular la carga uniformemente repartida que puede soportar la viga, simplemente apoyada, sobre un claro de 4 m, si $f_c \leq$ 12 MPa y $f_a \leq$ 140 MPa. Se considera un recubrimiento de armaduras e = 50 mm y se incluye el peso propio de la viga. El concreto pesa, aproximadamente, 2400 kg/m^3.

1031. En una viga de concreto armado, b = 300 mm, d = 600 mm y n = 9. Al aplicar un momento flexionante de 80 kN · m, el esfuerzo máximo en el concreto es de 5 MPa. ¿Qué esfuerzo aparecerá en el acero? ¿Cuál será el área de acero requerida?

Resp. f_a = 90 MPa; A_a = 1670 mm^2

1032. Resolver el problema anterior con M = 70 kN · m sin variar los otros datos.

1033. Resolver el problema 1027 calculando el momento de inercia de la sección equivalente y aplicando la fórmula de la flexión de acuerdo con lo indicado en la sección 10-2. La distancia del área equivalente del concreto a la línea neutra de la sección transformada puede tomarse como su radio de giro con respecto a este eje.

1034. Resolver el problema 1029 empleando el procedimiento descrito en el problema 1033.

10-5. DISEÑO DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

En la sección anterior se conocían las dimensiones de la viga de concreto armado, lo que fija la posición de la línea neutra. Como los esfuerzos son directamente proporcionales a la distancia al E.N., el momento flexionante aplicado puede hacer que el concreto alcance su esfuerzo admisible, cuando el acero todavía no ha alcanzado el suyo. En estas condiciones, la viga está armada en exceso, o como se ha dicho anteriormente, la sección es rebajada. La condición opuesta, de que sea el acero el que alcance antes su esfuerzo admisible, es consecuencia de que la sección de acero es escasa, o como se ha dicho anteriormente, la sección es peraltada. Para obtener la máxima economía, ambos materiales deben alcanzar al mismo tiempo sus esfuerzos admisibles, que es la condición de armadura estricta, o de altura estricta. (Este cálculo se llama también *diseño equilibrado.*)

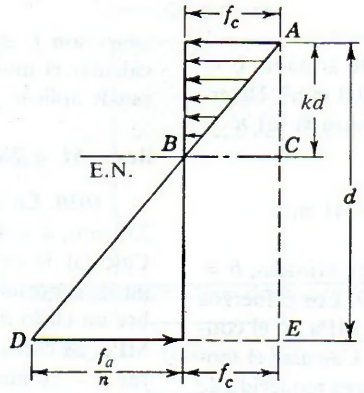


Figura 10-7. Distribución de esfuerzos.

En el diseño de una viga de concreto armado de altura estricta se empieza por determinar la posición del E.N. con la condición de que ambos materiales alcancen al mismo tiempo sus esfuerzos admisibles, es decir, que en la sección equivalente se alcancen al mismo tiempo los valores de f_c y de f_a/n. Esta condición se indica en la figura 10-7. Por la proporcionalidad entre los triángulos ABC y ADE se tiene,

$$\frac{kd}{d} = \frac{f_c}{\frac{f_a}{n} + f_c}$$

o bien,

$$k = \frac{f_c}{\frac{f_a}{n} + f_c} \qquad \textbf{(10–7)}$$

Calculando k en función de los esfuerzos admisibles, se obtiene el valor de j de la ecuación (10-3):

$$j = 1 - \tfrac{1}{3}k \qquad \textbf{(10–8)}$$

Una vez determinados los valores de k y de j, la ecuación (10-5) da el valor de bd^2. Cuanto mayor sea el peralte de una viga, mayor es el brazo de momento y, por tanto, menores son las fuerzas C y T y menor en la anchura b. Una viga de gran peralte requiere menos concreto y acero que una de poca altura, pero, por otra serie de consideraciones teóricas y prácticas, se suele limitar la altura a $1.5b$. De esta relación, y del valor obtenido para bd^2, se obtienen los valores de b y d.

Como paso final, se calcula la sección de acero mediante la ecuación (10-6), o mejor, por la condición $C = T = f_a A_a$, en donde A_a es la incógnita. En la mayoría de los casos, con las varillas existentes en el comercio no puede obtenerse exactamente el área o sección de acero precisa, por lo que la armadura por emplear sólo es aproximadamente estricta.

Para la mayoría de las vigas de sección rectangular, los valores de k y j resultan muy próximos a $k = \frac{3}{8}$ y $j = \frac{7}{8}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (10-5) se tiene un cálculo

de las dimensiones con suficiente aproximación*,

$$bd^2 = \frac{6M}{f_c} \tag{10-9}$$

Con el valor de bd^2, dando valores a b y a d, se calcula la fuerza de tensión en el acero y la sección por las fórmulas:

$$T = \frac{M}{\frac{7}{8}d} \quad \text{y} \quad A_a = \frac{T}{f_a} \tag{10-10}$$

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1035. Diseñar una viga de concreto armado de altura estricta para soportar un momento de 90 kN · m si los esfuerzos admisibles son $f_c = 12$ MPa, $f_a = 140$ MPa y $n = 8$.

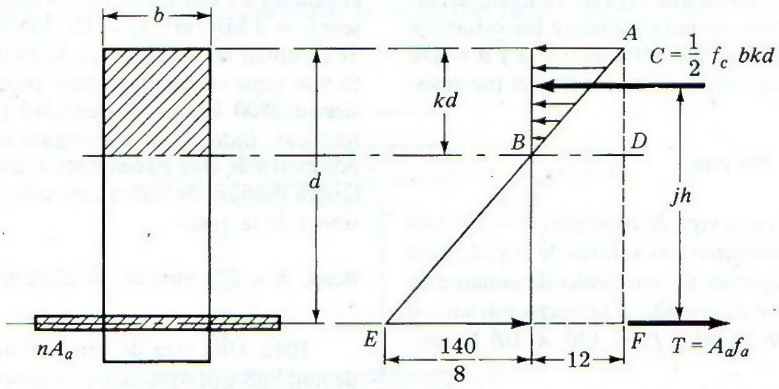


Figura 10-8.

Solución: Con armadura estricta, los esfuerzos en el concreto y en el concreto equivalente al acero han de tener los valores indicados en la figura 10-8. Por la semejanza de los triángulos ABD y AEF se obtiene el valor de k:

$$\frac{kd}{d} = \frac{12}{(140/8) + 12}; \quad k = 0.407$$

por lo que el valor de j es:

$$j = 1 - \tfrac{1}{3}k = 1 - \tfrac{1}{3}(0.407) = 0.864$$

En función de f_c el momento resistente es $C(jd)$, o sea,

$$\left[M_c = C \cdot (jd) = (\tfrac{1}{2}f_c\, bkd)(jd)\right] \qquad 90 \times 10^3 = \tfrac{1}{2}(12 \times 10^6)\,(bd^2)(0.407)(0.864)$$

$$bd^2 = 0.0427\ \text{m}^3 = 42.7 \times 10^6\ \text{mm}^3 \qquad (a)$$

*La analogía de esta fórmula con la fórmula de la flexión, $\sigma = 6M/bd^2$, permite recordarla fácilmente.

Con $d = 1.5b$, de la ecuación (a), $b = 267$ mm y $d = 400$ mm.

Se calcula ahora la sección de acero necesaria. Como la tensión T ha de ser igual a la compresión C en el concreto resulta

$$\left[\tfrac{1}{2} f_c bkd = A_a f_a\right] \qquad \tfrac{1}{2}(12 \times 10^6)(0.267)(0.407)(0.400) = A_a(140 \times 10^6)$$

de donde

$$A_a = 1.86 \times 10^{-3}\ \text{m}^2 = 1860\ \text{mm}^2$$

En general con los aceros comerciales no se tendrá esta sección exacta, de modo que la sección definitiva no será exactamente estricta, pero sí muy aproximada.

PROBLEMAS

1036. Se diseña una viga de concreto armado para alcanzar simultáneamente los esfuerzos $f_c = 12$ MPa y $f_a = 140$ MPa. Si $n = 8$ y $d = 450$ mm, calcular el brazo de momento del par resistente.

Resp. $jd = 389$ mm.

1037. En una viga de concreto, $d = 600$ mm y $n = 9$. Determinar los valores de b y A_a para que pueda soportar un momento flexionante de 80 kN · m con el armado o refuerzo estricto, si $f_c = 9 \times 10^6$ N/m^2 y $f_a = 140 \times 10^6$ N/m^2.

1038. En una viga de concreto armado, $b = 250$ mm, $d = 450$ mm y $n = 9$; los esfuerzos admisibles son $f_c = 10$ MPa y $f_a = 140$ MPa. Determinar A_a para armadura estricta y el momento de seguridad.

1039. Diseñar una viga de concreto armado de altura estricta para resistir un momento flexionante de 140 kN · m, considerando $d = 1.5$b, $f_c = 12$ MPa y $f_a = 160$ MPa. Se considerará $n = 8$.

Resp. $b = 316$ mm; $A_a = 2100$ mm^2

1040. Resolver el problema anterior si $b = \tfrac{3}{4}d$.

1041. Se diseña una viga simplemente apoyada de 6 m de claro para soportar una carga concentrada de 80 kN en el centro del tramo. Calcular b y A_a si la altura útil $d = 600$ mm, la armadura es estricta y los esfuerzos admisibles son $f_c = 8$ MN/m^2, $f_a = 120$ MN/m^2, y $n = 10$. Se recubren las armaduras con 50 mm de concreto y se tiene en cuenta el peso propio de la viga, siendo 2400 kg/m^3 la densidad (o masa volumétrica). *Indicación*: Supóngase un peso inicial por metro de viga y confróntese con el que se obtendrá después de haber determinado las dimensiones de la viga.

Resp. $b = 278$ mm; $A_a = 2220$ mm^2

1042. Una viga de concreto armado de 6 m de longitud y perfectamente empotrada en sus extremos ha de soportar una carga uniformemente repartida de 20 kN/m además de su peso propio. Con $d = 600$ mm, diseñar una viga de altura estricta, con $f_c = 6$ MPa y $f_a = 120$ MPa, siendo $n = 10$. Téngase en cuenta también un recubrimiento de 50 mm sobre las armaduras. La masa unitaria del concreto es 2400 kg/m^3. Léase la indicación del problema anterior.

Resp. $b = 219$ mm; $A_a = 1100$ mm^2

1043. Diseñar una viga de concreto armado para soportar una carga repartida de 80 kN/m sobre un tramo de 4 m simplemente apoyada. Emplear $f_c = 12$ MN/m^2, $f_a = 140$ MN/m^2 y $n = 8$. Tómese el recubrimiento de 50 mm sobre las armaduras e inclúyase el peso propio de la viga, con una densidad del concreto de 2400 kg/m^3. Considerar el valor de $b = 200$ mm. Emplee la indicación del problema 1041.

10-6. VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE SECCION EN T

El método aplicado a las secciones rectangulares resulta muy complicado si se intenta aplicar a las vigas en T. Debido a las alas de la T, el centro de gravedad de la sección comprimida no está a $kd/2$ de la línea neutra, ni la resultante C de las fuerzas de compresión pasa a $kd/3$ del borde superior de la viga. Como consecuencia de ello, es muy engorroso aplicar el procedimiento de la sección 10-4, aunque en los textos y manuales dedicados exclusivamente al concreto armado se desarrollan fórmulas y expresiones que permiten resolver el problema por ese procedimiento. Para el alumno es preferible aplicar la fórmula de la flexión a la sección equivalente, como se ha indicado en la sección 10-2, y como se hace en el problema siguiente.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1044. La viga en T de la figura 10-9 se arma con 2400 mm^2 de acero. Suponiendo $n = 8$, $f_c \leq 12$ MPa y $f_a \leq 140$ MPa, determinar el momento flexionante máximo que puede soportar.

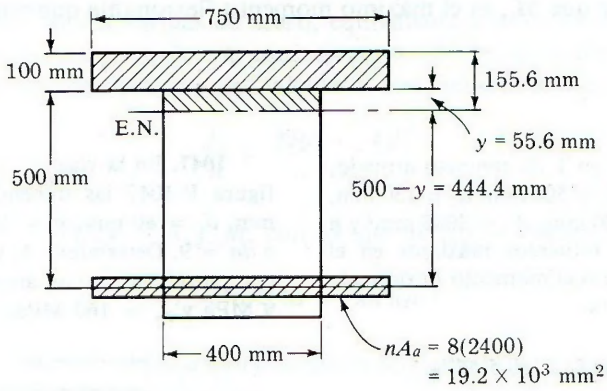


Figura 10-9.

Solución: Sea y la distancia desde la parte inferior del ala a la línea neutra. Tomando momentos de las áreas con respecto a esta línea neutra se tiene:

$$[\Sigma ay = 0] \qquad (750 \times 100)(y + 50) + (400y)\left(\frac{y}{2}\right) - (19.2 \times 10^3)(500 - y) = 0$$

Haciendo operaciones,

$$y^2 + 471y - (29.25 \times 10^3) = 0$$

de donde

$$y = 55.6 \text{ mm}$$

El momento de inercia con respecto al E.N., se obtiene considerando el área comprimida como un rectángulo de 750 × 155.6 mm del que se resta otro rectángulo de 350 × 55.6 mm. Por tanto,

$$I = \frac{750(155.6)^3}{3} - \frac{350(55.6)^3}{3} + (19.2 \times 10^3)(444.4)^2$$
$$= 4714 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 4714 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

La distancia 444.4 mm se puede considerar como radio de giro de la sección de concreto equivalente al acero.

En función del esfuerzo admisible en el concreto, la fórmula de la flexión permite escribir:

$$\left[M = \frac{\sigma I}{y} \right] \qquad M_c = \frac{(12 \times 10^6)(4714 \times 10^{-6})}{155.6 \times 10^{-3}} = 364 \text{ kN·m}$$

En función del concreto equivalente al acero, el esfuerzo admisible es de $f_a/n = 140/8 = 17.5$ MPa, y la fórmula de la flexión permite escribir:

$$\left[M = \frac{\sigma I}{y} \right] \qquad M_a = \frac{(17.5 \times 10^6)(4714 \times 10^{-6})}{444.4 \times 10^{-3}} = 186 \text{ kN·m}$$

Como éste es menor que M_c, es el máximo momento flexionante que puede soportar la sección.

PROBLEMAS

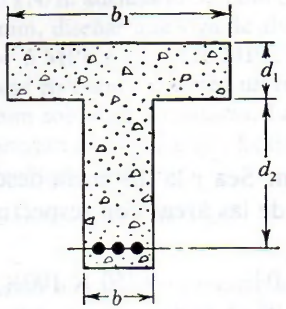
1045. En la viga en T de concreto armado, de la figura P-1045, $b_1 = 500$ mm, $d_1 = 150$ mm, $b = 250$ mm, $d_2 = 500$ mm, $A_a = 3000$ mm² y $n = 10$. Calcular los esfuerzos máximos en el concreto y en el acero si el momento flexionante aplicado es 140 kN · m.

Resp. $f_c = 4.45$ MPa; $f_a = 80.5$ MPa

1046. Las dimensiones de la viga en T de concreto armado, de la figura P-1046 son $b_1 = 750$ mm, $d_1 = 100$ mm, $b = 300$ mm y $d = 450$ mm. Si $n = 8$ y $A_a = 3300$ mm², calcular el momento flexionante máximo que se puede aplicar sin exceder $f_c = 12$ MN/m² y $f_a = 140$ MN/m²

Resp. $M = 231$ kN · m

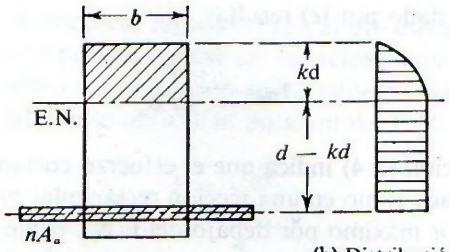
1047. En la viga de concreto armado, de la figura P-1047 las dimensiones son $b_1 = 900$ mm, $d_1 = 80$ mm, $b = 300$ mm, $d = 520$ mm y $dn = 9$. Determinar A_a y el momento máximo que puede resistir con armadura estricta si $f_c = 9$ MPa y $f_a = 160$ MPa.



Figuras P-1045, P-1046, P-1047.

10-7. ESFUERZO CORTANTE Y DE ADHERENCIA

En la flexión de vigas de concreto armado, el acero no puede deslizar debido a la adherencia con el hormigón que le rodea. El esfuerzo desarrollado entre el concreto y la superficie



(a) Sección equivalente (b) Distribución del esfuerzo cortante

Figura 10-10.

de las varillas, y que tiende a deslizar el armado con respecto al hormigón, se suele llamar *esfuerzo de adherencia* y es análogo al esfuerzo cortante en vigas homogéneas. Se calcula aplicando la ecuación (5-4) a la sección equivalente de concreto de la figura 10-10. Y así:

$$\left[\tau = \frac{V}{Ib} A'\bar{y}\right] \qquad \tau = \frac{V}{Ib'}(nA_a)(d - kd) \tag{a}$$

b' es el ancho efectivo de las varillas de acero, equivalente a su perímetro total Σo.

El momento de inercia de la sección equivalente se obtiene de la fórmula de la flexión. Puesto que en la sección de concreto equivalente al acero el esfuerzo es f_a/n,

$$\left[\sigma = \frac{My}{I}\right] \qquad \frac{f_a}{n} = \frac{M(d - kd)}{I} \tag{b}$$

Ahora bien, $M = T(jd) = A_a f_a jd$, con lo que de (b) se obtiene

$$I = nA_a(d - kd)(jd) \tag{c}$$

Por otra parte, $nA_a(d - kd) = (bkd)(kd)$, según la ecuación (10-2), con lo que el momento de inercia también se puede expresar por

$$I = \tfrac{1}{2} b(kd)^2(jd) \tag{d}$$

Sustituyendo en (a) el valor (c) de I resulta:

$$\tau = \frac{V(nA_a)(d - kd)}{[nA_a(d - kd)(jd)]b'}$$

de donde se obtiene el valor del esfuerzo de adherencia:

$$\tau = \frac{V}{jdb'} = \frac{V}{jd\,\Sigma o} \tag{10-11}$$

Análogamente, el esfuerzo cortante en la línea neutra es:

$$\left[\tau = \frac{V}{Ib} A'\bar{y}\right] \qquad \tau_{\text{máx}} = \frac{V}{Ib}(nA_a)(d - kd)$$

Sustituyendo el valor de I dado por (c) resulta:

$$\tau_{máx} = \frac{V}{jd\ b} \tag{10-12}$$

El estudio de la ecuación (5-4) indica que el esfuerzo cortante en la zona comprimida varía con una ley parabólica como en una sección rectangular homogénea, permaneciendo constante e igual a su valor máximo por debajo del E.N., como muestra la figura 10-10b. Comparando las expresiones (10-11) y (10-12) se deduce que el esfuerzo de adherencia es mayor que el esfuerzo cortante en la superficie neutra si Σo es menor que la anchura b de la viga. Para aumentar Σo sin variar A_a, se aumenta el número de barras disminuyendo su diámetro.

PROBLEMAS

1048. La viga de concreto armado del problema 1028 está sometida a una fuerza cortante vertical de 120 kN. Calcular el esfuerzo cortante máximo y el esfuerzo de adherencia si los refuerzos consisten de 6 varillas de 20 mm.

Resp. 373 kPa; 389 kPa

1049. Determinar la fuerza cortante vertical que puede ser soportada por la viga del problema 1027 si el refuerzo consta de 4 varillas de 10 mm. Supóngase que el esfuerzo cortante admisible es de 350 kN/m^2 y el esfuerzo de adherencia admisible, de 550 kN/m^2.

Resp. V = 39.6 kN

RESUMEN

La sección de una viga de dos materiales (no homogénea) se puede transformar en una sección equivalente de uno solo de ellos. Por ejemplo, considerando madera (m) (o bien, concreto) y acero (a):

$$\boldsymbol{A_b = A_m = nA_a} \tag{10-1}$$

en donde n es la razón del módulo elástico del material por transformar al del material equivalente. Ahora se puede aplicar directamente la fórmula de la flexión a la sección transformada o equivalente, como se indica en la secciones 10-2 y 10-6.

En las vigas de concreto armado se suele emplear el procedimiento de la sección 10-4. Es preferible seguir el cálculo paso a paso, es decir, seguir numéricamente la deducción de las ecuaciones siguientes mejor que aplicarlas directamente,

$$(b\ kd)\left(\frac{kd}{2}\right) = nA_a(d - kd) \tag{10-2}$$

$$jd = d - \tfrac{1}{3}(kd) \tag{10-3}$$

Los esfuerzos se obtienen de las ecuaciones que siguen. Si se dan los esfuerzos admisibles, el momento de seguridad debe ser el menor de estos valores:

$$M_c = C(jd) = \tfrac{1}{2} f_c(b\ kd)(jd) \tag{10-5}$$

$$M_a = T(jd) = f_a A_a (jd) \tag{10-6}$$

Al diseñar una viga de concreto reforzado con altura estricta, las dimensiones son desconocidas, por lo que no se pueden aplicar las ecuaciones anteriores. Sin embargo, puede trazarse un diagrama de esfuerzos en función de los esfuerzos admisibles dados, como se observa en la figura 10-7, del que se obtiene la posición del E.N., en función de k:

$$k = \frac{f_c}{\frac{f_a}{n} + f_c} \qquad \textbf{(10-7)}$$

Esta ecuación se basa en la hipótesis de armadura o altura estricta, es decir, que el concreto y el acero alcanzan simultáneamente sus esfuerzos admisibles. Cuando se dan las dimensiones de la viga no hay tal relación entre los esfuerzos, por lo que la ecuación (10-7) no se puede utilizar como simplificación de la ecuación (10-2) al determinar la posición de la línea neutra.

El esfuerzo cortante máximo en las vigas de concreto armado de sección rectangular viene dado por:

$$\tau_{máx} = \frac{V}{jd\ b} \qquad \textbf{(10-12)}$$

El esfuerzo de adherencia, o esfuerzo tangencial en la superficie de las varillas de refuerzo, viene dado por:

$$\tau = \frac{V}{jd\ \Sigma o} \qquad \textbf{(10-11)}$$

siendo Σo la suma de los perímetros de las varillas empleadas.

11 columnas

11-1. INTRODUCCIÓN

Una columna es un elemento axial sometido a compresión, lo bastante delgado respecto de su longitud, para que bajo la acción de una carga gradualmente creciente se rompa por flexión lateral o pandeo ante una carga mucho menor que la necesaria para romperlo por aplastamiento. Esto se diferencia de un poste corto sometido a compresión, el cual, aunque esté cargado excéntricamente, experimenta una flexión lateral despreciable. Aunque no existe un límite perfectamente definido entre elemento corto y columna, se suele considerar que un elemento a compresión es una columna si su longitud es más de diez veces su dimensión transversal menor. Las columnas se suelen dividir en dos grupos: *Largas* e *intermedias*. A veces, los elementos cortos a compresión se consideran como un tercer grupo de las columnas. Las diferencias entre los tres grupos vienen determinadas por su comportamiento. Las columnas largas se rompen por pandeo o flexión lateral; las intermedias, por una combinación de aplastamiento y pandeo, y los postes cortos, por aplastamiento. Examinaremos ahora con detalle estas diferencias.

Una columna ideal es un elemento homogéneo, de sección recta constante, inicialmente perpendicular al eje, y sometido a compresión. Sin embargo, las columnas suelen tener siempre pequeñas imperfecciones de material y de fabricación, así como una inevitable excentricidad accidental en la aplicación de la carga. Todo esto se representa muy exageradamente en la figura 11-1. La curvatura inicial de la columna, junto con la posición de la carga, dan lugar a una excentricidad indeterminada e, con respecto al centro de gravedad, en una sección cualquiera $m - n$. El estado de carga en esta sección es similar al de un poste corto cargado excéntricamente (Sec. 9-3), y el esfuerzo resultante está producido por la superposición del esfuerzo directo de compresión y el esfuerzo de flexión (o mejor dicho, por flexión).

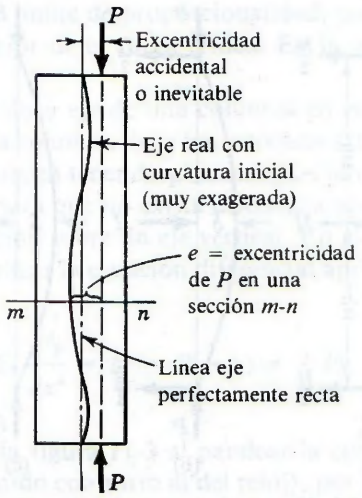


Figura 11-1. Factores que intervienen en la excentricidad de las cargas en las columnas.

Si la excentricidad es pequeña y el elemento es corto, la flexión lateral es despreciable, y el esfuerzo de flexión es insignificante comparado con el esfuerzo de compresión directo. Sin embargo, en un elemento largo, que es mucho más flexible ya que las deflexiones son proporcionales al cubo de la longitud, con un valor relativamente pequeño de la carga P puede producirse un esfuerzo de flexión grande, acompañado de un esfuerzo directo de compresión despreciable. Así, pues, en las dos situaciones extremas, una columna corta soporta fundamentalmente el esfuerzo directo de compresión, y una columna larga está sometida principalmente al esfuerzo de flexión. Cuando aumenta la longitud de una columna disminuye la importancia y efectos del esfuerzo directo de compresión y aumenta correlativamente los del esfuerzo de flexión. Por desgracia, en la zona intermedia no es posible determinar exactamente la forma en que varían estos dos tipos de esfuerzos, o la proporción con la que cada una contribuye al esfuerzo total. Es esta indeterminación la que da lugar a la gran variedad de fórmulas para las columnas intermedias, que se examinan en la sección 11-5.

No se ha dado, hasta aquí, criterio alguno de diferenciación entre columnas largas e intermedias, excepto en su forma de trabajar, es decir, la columna larga está sometida esencialmente a esfuerzos de flexión y la intermedia lo está a esfuerzos de flexión y de compresión directa. La distinción entre ambos tipos de acuerdo con su longitud sólo puede comprenderse después de haber estudiado las columnas largas.

11-2. CARGA CRÍTICA

Coloquemos verticalmente una viga muy esbelta, articulémosla en sus extremos mediante rótulas que permitan la flexión en todas sus direcciones. Apliquemos una fuerza horizontal H en su punto medio, de manera que produzca flexión según la dirección de máxima flexibilidad, como se indica en la figura 11-2a. Como los esfuerzos de flexión son proporcionales a la deflexión, no experimentarán variación alguna si se añade una fuerza axial P en cada extremo, como en la figura 11-2b, y haciendo que H disminuya simultáneamente con el

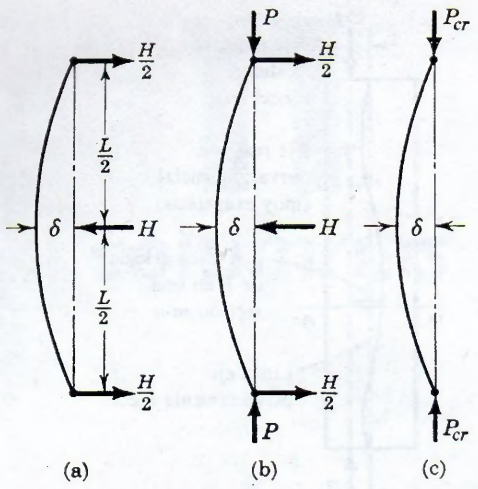


Figura 11-2. Viga y columna con la misma flexión.

aumento de P de manera que la deflexión δ en el centro no varíe. En estas condiciones, el momento flexionante en el centro es

$$M = \frac{H}{2}\left(\frac{L}{2}\right) + P\delta$$

y, en el límite, cuando H ha disminuido hasta anularse,

$$M = (P_{cr})\delta$$

Entonces, como se indica en la figura 11-2c, P_{cr} es la carga crítica necesaria para mantener la columna deformada sin empuje lateral alguno. Un pequeño incremento de P sobre este valor crítico hará que aumente la deflexión δ, lo que incrementará M, con lo cual volverá aumentar δ y así sucesivamente hasta que la columna se rompa por pandeo. Por el contrario, si P disminuye ligeramente por debajo de su valor crítico, disminuye la deflexión, lo que a su vez hace disminuir M, vuelve a disminuir δ, etc., y la columna termina por enderezarse por completo. Así, pues, la carga crítica puede interpretarse como la carga axial máxima a la que puede someterse una columna permaneciendo recta, aunque en equilibrio inestable, de manera que un pequeño empuje lateral haga que se deforme y quede pandeada, como en la figura 11-2c. En la sección siguiente se hace el cálculo de la carga crítica.

11-3. FÓRMULA DE EULER PARA COLUMNAS LARGAS O MUY ESBELTAS

En el año 1757, el gran matemático suizo Leonhard Euler realizó un análisis teórico de la carga crítica para columnas esbeltas basado en la ecuación diferencial de la elástica $EI(d^2y/dx^2) = M$. Ahora se sabe que este análisis solamente es válido hasta que los esfuerzos alcanzan el límite de proporcionalidad*. En tiempos de Euler no se habían establecido

* Investigaciones realizadas por A. van de Broek indicaron desde hace cierto tiempo la posibilidad de utilizar la resistencia de las estructuras cargadas por encima del límite de proporcionalidad. Ver *Theory of Limit Design*, Wiley, Nueva York.

los conceptos de esfuerzo, ni de límite de proporcionalidad, por lo que él no tuvo en cuenta la existencia de un límite superior de la carga crítica. En la sección 11-4 se considera este límite superior.

La figura 11-3 muestra la línea eje de una columna en equilibrio bajo la acción de la carga crítica P. Se supone que la columna tiene los extremos articulados (mediante rótulas, o pasadores) de manera que no pueden tener desplazamientos laterales. La deflexión máxima δ es lo suficientemente pequeña para que no exista diferencia apreciable entre la longitud inicial de la columna y su proyección sobre un eje vertical. En estas condiciones, la pendiente dy/dx es pequeña y se puede aplicar la ecuación diferencial aproximada de la elástica de una viga:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = P(-y) = -Py \qquad (a)$$

El momento M es positivo en la figura 11-3 al pandear la columna en el sentido indicado (basta girar la figura 90° en sentido contrario al del reloj), por lo que al ser la y negativa, ha de ir precedida del signo menos. Si la columna se pandeara en sentido contrario, es decir, en la dirección de y positiva, el momento flexionante sería negativo, de acuerdo con el criterio de signos adoptado en la sección 4-2 para los momentos y, por tanto, habría que poner también el signo menos.

La ecuación (*a*) no se puede integrar directamente, como se hacía en la sección 6-2, ya que allí M solamente era función de x. Sin embargo, presentamos dos métodos para resolverla. Conociendo algo de dinámica nos damos cuenta que la ecuación (*a*) es semejante a la ecuación de un cuerpo que vibra simplemente:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

para la cual una solución general es

$$x = C_1 \operatorname{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + C_2 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

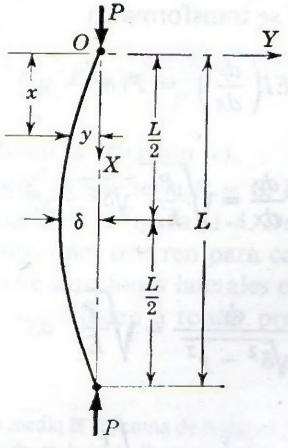


Figura 11-3.

De aquí, por analogía, la solución de la ecuación (*a*) viene dada por

$$y = C_1 \operatorname{sen}\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) + C_2 \cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \qquad (b)$$

Al aplicar las condiciones de frontera para $x = 0$, $y = 0$, lo que da $C_2 = 0$; para $x = L$, $y = 0$, de la que se obtiene

$$0 = C_1 \operatorname{sen}\left(L\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$$

ecuación de condición que se cumple para $C_1 = 0$, en cuyo caso no existe flexión en la columna, o para

$$L\sqrt{\frac{P}{EI}} = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

de donde

$$P = n^2 \frac{EI\pi^2}{L^2} \qquad (c)$$

Si se carece de conocimientos de ecuaciones diferenciales podemos resolver la ecuación (*a*) escribiéndola en la forma

$$EI\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -Py$$

que, después de multiplicar por 2 dy para obtener diferenciales exactas da, por integración:

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -Py^2 + C_1 \qquad (d)$$

Ahora, de acuerdo con la figura 11-3, para $dy/dx = 0$, $y = \delta$. Sustituyendo en (*d*) da $C_1 = P\delta^2$, por lo que la ecuación (*d*) se transforma en

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = P(\delta^2 - y^2)$$

o sea,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{P}{EI}}\sqrt{\delta^2 - y^2}$$

Separando variables,

$$\frac{dy}{\sqrt{\delta^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{P}{EI}}\,dx$$

cuya integración da

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{\delta} = x\sqrt{\frac{P}{EI}} + C_2$$

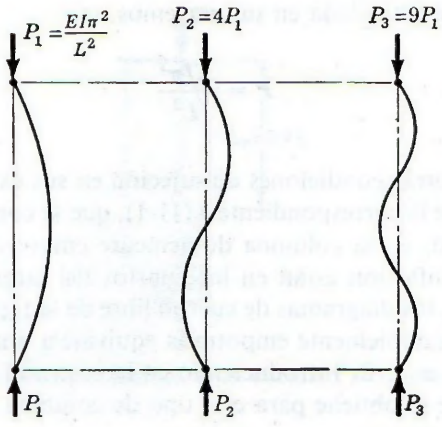


Figura 11-4. Efecto de n en el valor de la carga crítica.

Para hallar C_2 se aplica la condición $y = 0$ para $x = 0$, de donde $C_2 = 0$. Así, pues,

$$\operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{\delta} = x\sqrt{\frac{P}{EI}} \quad \text{o} \quad y = \delta \operatorname{sen}\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \tag{e}$$

lo que indica que la forma de la elástica es senoidal. Haciendo $y = 0$ para $x = L$ en esta última ecuación se obtiene

$$\operatorname{sen}\left(L\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) = 0$$

o bien,

$$L\sqrt{\frac{P}{EI}} = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

de donde

$$P = n^2 \frac{EI\pi^2}{L^2} \tag{f}$$

que coincide con el valor obtenido en la ecuación (*c*).

El valor $n = 0$ no tiene sentido, ya que sería $P = 0$. Para los demás valores de n la columna se pandea en la forma indicada en la figura 11-4. De estas posibles soluciones, la más importante es la (a). Las otras soluciones ocurren para cargas mayores, pero sólo son posibles físicamente si la columna tiene sujeciones laterales en el punto medio o en los tercios del largo, respectivamente*, que la obliguen a tomar precisamente esta forma. La carga

* Arriostrando lateralmente en el punto medio la columna de la figura 11-4b, cada una de las mitades tiene la forma de la figura 11-4a con una longitud equivalente de ½ L. Sustituyendo ½ L en lugar de L en la ecuación (11-1), la carga crítica queda multiplicada por 4, lo que concuerda con la ecuación (*f*) para $n = 2$.

crítica, para una columna articulada en sus extremos, es

$$P = \frac{EI\pi^2}{L^2} \tag{11-1}$$

Para columnas con otras condiciones de sujeción en sus extremos se puede expresar la carga crítica en función de la correspondiente a (11-1), que se considera como un caso fundamental. Así, por ejemplo, en la columna doblemente empotrada de la figura 11-5a, por simetría, los puntos de inflexión están en los cuartos del largo, y como el momento flexionante es nulo en éstos, los diagramas de cuerpo libre de la figura 11-5b indican que la mitad central de la columna doblemente empotrada equivale a una columna articulada en sus extremos, de longitud $L_e = L/2$. Introduciendo en la ecuación (11-1) esta longitud equivalente, la carga crítica que se obtiene para este tipo de columna es:

$$P = \frac{EI\pi^2}{L_e^2} = \frac{EI\pi^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = 4\frac{EI\pi^2}{L^2} \tag{11-2}$$

La columna doblemente empotrada es, pues, cuatro veces más resistente que la doblemente articulada.

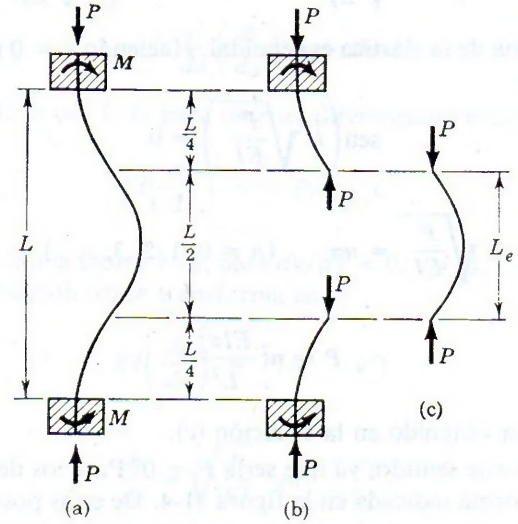


Figura 11-5. Columna doblemente empotrada y diagrama de cuerpo libre.

La figura 11-5a, permite determinar también la carga crítica para una columna empotrada en un extremo y libre en el otro (tipo mástil). Las cargas críticas en este tipo, figura 11-5b, y en la doblemente empotrada, figura 11-5a, son iguales, pero teniendo en cuenta que esta última es cuatro veces más larga que la primera. En otras palabras, en la ecuación (11-2)

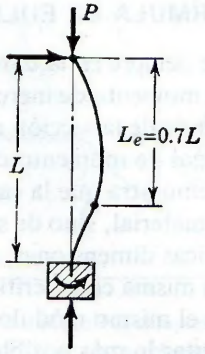


Figura 11-6. Columna empotrada en un extremo y articulada en el otro.

hay que poner una longitud L_e igual a cuatro veces la longitud real de la columna tipo mástil, con lo que la carga crítica para este tipo de columna viene dada por:

$$P = \frac{4EI\pi^2}{L_e^2} = \frac{4EI\pi^2}{(4L)^2} = \frac{1}{4}\frac{EI\pi^2}{L^2} \tag{11-3}$$

que es una cuarta parte de la correspondiente al caso fundamental, doblemente articulada.

Otro tipo de columna que suele presentarse es la empotrada en un extremo y articulada en el otro, como se indica en la figura 11-6. El punto de inflexión aparece, como puede demostrarse, a $0.7L$ del extremo articulado, por lo que introduciendo en la ecuación (11-1) del caso fundamental una longitud $L_e = 0.7L$, da como valor de la carga crítica

$$P = \frac{EI\pi^2}{L_e^2} = \frac{EI\pi^2}{(0.7L)^2} = 2\frac{EI\pi^2}{L^2} \text{ (muy aproximadamente)} \tag{11-4}$$

El efecto de la condición de sujeción de los extremos en la carga crítica se puede hacer intervenir en la fórmula de la carga crítica para el caso fundamental de columna doblemente articulada de dos formas. Multiplicándola por un factor N que depende de las condiciones de sujeción, como se resume en la tabla que viene a continuación, o mejor, sustituyendo la longitud L de la ecuación (11-1) por los valores tabulados de la longitud modificada o efectiva, es decir,

$$P = N\frac{EI\pi^2}{L^2} = \frac{EI\pi^2}{L_e^2}$$

CONDICIONES DE SUJECIÓN	N = coeficiente para multiplicar por P_{crit} del caso fundamental	L_e = longitud efectiva
Ambos extremos empotrados	4	$\frac{1}{2}L$
Un extremo empotrado y el otro articulado	2	$0.7L$
Ambos extremos articulados	1	L
Un extremo empotrado y el otro libre	$\frac{1}{4}$	$2L$

11-4. LIMITACIONES DE LA FÓRMULA DE EULER

Una columna tiende a pandearse siempre en la dirección en la cual es más flexible. Como la resistencia a la flexión varía con el momento de inercia, el valor de I en la fórmula de Euler es siempre el menor momento de inercia de la sección recta. La tendencia al pandeo tiene lugar, pues, con respecto al eje principal de momento de inercia mínimo de la sección recta.

La fórmula de Euler también demuestra que la carga crítica que puede producir el pandeo no depende de la resistencia del material, sino de sus dimensiones y del módulo elástico. Por este motivo, dos barras de idénticas dimensiones, una de acero de alta resistencia y otra de acero suave, se pandearán bajo la misma carga crítica, ya que aunque sus resistencias son muy diferentes tienen prácticamente el mismo módulo elástico. Así, pues, para aumentar la resistencia al pandeo, interesa aumentar lo más posible el momento de inercia de la sección. Para un área dada, el material debe distribuirse tan lejos como sea posible del centro de gravedad y de tal manera que los momentos de inercia con respecto a los ejes principales sean iguales, o lo más parecidos posible. (Recuérdese el ejemplo clásico de la columna hueca de sección circular.)

Para que la fórmula de Euler sea aplicable, el esfuerzo que se produzca en el pandeo no debe exceder al límite de proporcionalidad. Para determinar este esfuerzo, se sustituye en la fórmula el momento de inercia I por Ar^2, donde A es el área de la sección recta y r el radio de giro mínimo*. Para el caso fundamental (ec. 11-1) se tiene:

$$\frac{P}{A} = \frac{E\pi^2}{(L/r)^2} \tag{11-5}$$

Para otros casos, se pondría en lugar de L la longitud equivalente de la tabla de la sección anterior.

El valor P/A es el *esfuerzo medio* en la columna cargada con su carga crítica, y se llama *esfuerzo crítico*. Su límite superior es el *esfuerzo en el límite de proporcionalidad*. La relación L/r se llama esbeltez mecánica, o simplemente *esbeltez*, de la columna. Como una columna cargada axialmente tiende a pandearse respecto del eje I mínimo, para hallar la esbeltez de una columna se divide la longitud equivalente o efectiva entre el radio de giro mínimo de la sección recta.

Por conveniencia, se definen como columnas largas o muy esbeltas aquellas a las que se puede aplicar la fórmula de Euler. La esbeltez mínima, que fija el límite inferior de aplicación de la fórmula de Euler, se obtiene sustituyendo en la ecuación (11-5) los valores conocidos del límite de proporcionalidad y del módulo elástico de cada material. Así, pues, el límite mínimo de la esbeltez varía con el material y también con los diferentes tipos dentro de cada material.

Como ejemplo, para un acero que tenga un límite de proporcionalidad de 200 MPa, como $E = 200$ GPa, el límite mínimo de la esbeltez mecánica con el que puede aplicarse la fórmula de Euler es

$$\left(\frac{L}{r}\right)^2 = \frac{(200 \times 10^9)\pi^2}{200 \times 10^6} \approx 10\,000 \quad \text{o sea,} \quad \frac{L}{r} \approx 100$$

* Aquí se emplea r para designar el radio de giro utilizado en la notación de la AISC. No debe confundirse con la r que suele emplearse para designar el radio de una circunferencia.

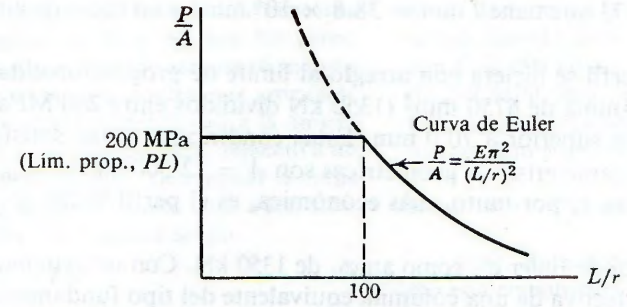


Figura 11-7. El esfuerzo crítico o admisible es el representado por la línea continua. La parte punteada de la curva de Euler no es aplicable.

Por debajo de este valor, como se indica en la figura 11-7, en la parte punteada de la curva de Euler el esfuerzo que daría la carga de Euler excedería al límite de proporcionalidad, por lo que para $L/r < 100$ la fórmula de Euler no es aplicable, y hay que considerar como esfuerzo crítico el límite de proporcionalidad. La curva muestra también que el esfuerzo crítico en una columna disminuye rápidamente cuando aumenta la esbeltez, por lo que al proyectar una pieza de este tipo, conviene que la esbeltez sea la menor posible.

Finalmente se debe observar que la fórmula de Euler da la carga crítica y no la carga de trabajo. Por ello es preciso dividir la carga crítica entre el correspondiente factor de seguridad, que suele ser de 2 a 3 según el material y las circunstancias, para obtener el valor de la carga admisible.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1101. Elegir el perfil W más económico para trabajar como columna de 7 m de altura que ha de soportar una carga axial de 450 kN con un factor de seguridad igual a 3. Supóngase (*a*) extremos articulados, y (*b*) un extremo empotrado y el otro articulado. Emplee $\sigma_{PL} = 200$ MPa y $E = 200$ GPa.

Solución: *Parte* (*a*). Para un acero con límite de proporcionalidad de 200 MPa, la aplicación de la fórmula de Euler para el caso fundamental requiere que la esbeltez L/r sea mayor de 100. Si es menor, se tomará como esfuerzo límite el del límite de proporcionalidad.

La carga de trabajo, multiplicada por el factor de seguridad 3, da una carga crítica de 1350 kN. Aplicando la fórmula de Euler y despejando I se obtiene:

$$\left[P = \frac{EI\pi^2}{L^2} \right] \qquad I = \frac{PL^2}{E\pi^2} = \frac{(1350 \times 10^3)(7)^2}{(200 \times 10^9)(\pi^2)}$$

$$= 33.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^4 = 33.5 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

Ahora bien, la esbeltez es $L/r \geq 100$. Por tanto, el radio de giro mínimo ha de ser

$$r \leq \frac{L}{100} = \frac{7000}{100} = 70.0\ \text{mm}$$

Así, pues, acorde con estos criterios, la sección debe tener un momento de inercia mínimo mayor que 33.5×10^6 mm^4 y un radio de giro mínimo menor de 70 mm. Se puede

elegir un perfil W250 × 73 que tiene I min = 38.8 × 10^6 mm^4 y un radio de giro mínimo de 64.6 mm.

Si la elección del perfil se hiciera con arreglo al límite de proporcionalidad, la sección debería tener un área mínima de 6750 mm^2 (1350 kN divididos entre 200 MPa), y un valor del radio de giro mínimo superior a 70.0 mm. Estas condiciones serían satisfechas por un perfil W310 × 97 cuyas características geométricas son A = 12 300 mm^2 y r_{min} = 76.9 mm.

La sección más ligera y, por tanto, más económica, es el perfil W250 × 73.

Parte (*b*). La carga crítica de Euler es, como antes, de 1350 kN. Con un extremo fijo y el otro articulado, la longitud efectiva de una columna equivalente del tipo fundamental es $0.7L$ = 4.9 m. Teniendo en cuenta esta longitud efectiva en lugar de la real, los criterios de elección, según la fórmula de Euler, son:

$$I \geqslant \frac{PL^2}{E\pi^2} = \frac{(1350 \times 10^3)(4.9)^2}{(200 \times 10^9)\pi^2} = 16.4 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

y

$$\geqslant 16.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$r \leqslant \frac{L}{100} = \frac{4900}{100} = 49.0 \text{ mm}$$

El perfil más liviano que cumple estas condiciones es W360 × 64 con I_{min} = 18.8 × 10^6 mm^4 y r_{min} = 48.1 mm.

De acuerdo con el criterio del límite de proporcionalidad,

$$A \geqslant \frac{1350 \times 10^3}{200 \times 10^6} = 6.75 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 6750 \text{ mm}^2 \quad \text{y}$$

$$r \geqslant 49.0 \text{ mm}$$

se necesitaría un perfil W250 × 58, con A = 7420 mm^2 y r_{min} = 50.4 mm.

Comparando ambas soluciones se deduce que la más económica es la segunda.

Si la elección se hubiera basado ên el valor de I, sin comprobar r, se podría elegir un perfil W200 × 52 con I_{min} = 17.8 × 10^6 mm^4. Pero, como para esta sección r_{min} = 51.8 mm y A = 6660 mm^2, el esfuerzo resultante excedería al límite de proporcionalidad de 200 MPa, lo cual no es aceptable ya que entonces no se cumpliría la proporcionalidad esfuerzo-deformación en que se basa la fórmula de Euler.

Este problema muestra la importancia de la esbeltez en el análisis de las columnas. En la parte (*a*) la elección de la sección ha quedado determinada por la estabilidad elástica, es decir, por la fórmula de Euler, mientras que en la parte (*b*), lo ha sido por el límite de proporcionalidad.

PROBLEMAS

1102. Una pieza de madera escuadrada de 50 × 100 mm se emplea como columna con los extremos empotrados. Calcular la longitud mínima para que pueda aplicarse la fórmula de Euler si E = 10 GPa y el límite de proporcionalidad es de 30 MPa. ¿Qué carga axial podrá soportar con un factor de seguridad igual a 2, si la longitud es de 2.50 m?

Resp. L = 1.66 m; P = 32.9 kN

1103. Un tornapuntas de aluminio tiene una sección rectangular de 20 × 50 mm. Un perno que atraviesa cada extremo lo asegura de manera que actúa como columna doblemente articulada con respecto a un eje perpendicular a la dimensión de 50 mm y como empotrada, respecto a un eje normal a la de 20 mm. Determinar la carga axial de seguridad con un factor igual a 2.5, siendo $E = 70$ GPa y la longitud de 2m.

Resp. $P = 9.24$ kN

1104. Una barra de aluminio de sección cuadrada y 3 m de longitud soporta una carga de 40 kN. Si los extremos están articulados con rótulas, determinar el lado de la sección, con valor de $E = 70$ GPa.

Resp. 50.0 mm

1105. Repetir el problema anterior si la barra fuera de madera con $E = 10$ GPa.

1106. Dos perfiles C310 × 45 se unen mediante placa en celosía de manera que el momento de inercia sea el mismo con respecto a los dos ejes principales de la sección compuesta así formada. Determinar la longitud mínima de esta columna, que se supone articulada en sus extremos, con $E = 200$ GPa y límite de proporcionalidad de 240 MPa para poder aplicar la fórmula de Euler, ¿Qué carga podría soportar con una longitud de 12 m y un factor de seguridad de 2.5?

Resp. $L = 9.89$ m; $P = 742$ kN

1107. Repetir el problema 1106 si un extremo está empotrado y el otro articulado.

1108. Escoger el perfil W más ligero para una columna de 8 m de longitud con extremos empotrados que ha de soportar una carga de 270 kN con un coeficiente de seguridad de 2.5. El límite de proporcionalidad es de 200 MPa y $E =$ 200 GPa.

Resp. W310 × 74

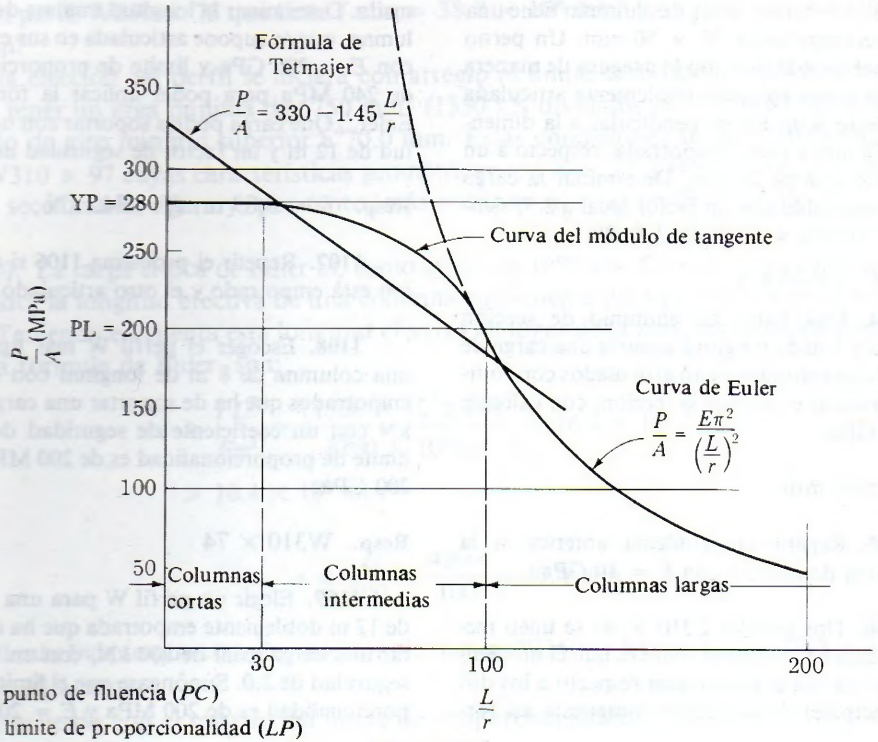
1109. Elegir un perfil W para una columna de 12 m doblemente empotrada que ha de soportar una carga axial de 700 kN, con un factor de seguridad de 2.0. Supóngase que el límite de proporcionalidad es de 200 MPa y $E = 200$ GPa.

11-5. COLUMNAS DE LONGITUD INTERMEDIA. FÓRMULAS EMPÍRICAS

El estudio realizado demuestra que en las columnas esbeltas es aplicable la fórmula de Euler siempre que la esbeltez mecánica sea mayor que el valor para el que el esfuerzo medio alcance el límite de proporcionalidad. En el caso de columnas de acero articuladas en sus extremos, este límite es $L/r \approx 100$ para un límite de proporcionalidad de 200 MPa. La fórmula de Euler no es válida para esbelteces menores.

La definición de columna corta como aquella en la que su longitud no excede diez veces su menor dimensión transversal, hace que el límite superior de la esbeltez mecánica, en columnas cortas de sección rectangular, sea aproximadamente igual a 30. Para todo efecto práctico, el esfuerzo límite en una columna corta es el del límite de cedencia, de manera que se requiere sumo cuidado para evitar el pandeo cuando alcanza este valor del esfuerzo. La figura 11-8 muestra estas condiciones para un acero con un límite de fluencia de 280 MPa y un límite de proporcionalidad de 200 MPa.

Se han propuesto varios métodos para cubrir la zona entre el límite superior de las columnas cortas y el inferior de las largas. Sin embargo, ninguno de ellos ha sido universalmente aceptado para las columnas intermedias, en parte por su desviación de la relación esfuerzo-deformación cuando los esfuerzos exceden al límite de proporcionalidad, y en parte por la indeterminación de la superposición de los esfuerzos directos y de flexión, al reducir la carga mediante un coeficiente de seguridad, para que los esfuerzos sean inferiores al límite de proporcionalidad.



YP: punto de fluencia (*PC*)
PL: límite de proporcionalidad (*LP*)

Figura 11-8.

Se han desarrollado muchas fórmulas empíricas para las columnas intermedias de acero, por ser un material muy empleado en las estructuras. Se examinan en primer lugar, y luego se verá la aplicación a otros materiales.

En uno de los métodos propuestos —el de la teoría del doble módulo*— se generaliza la aplicación de la fórmula de Euler a las columnas intermedias, con esfuerzos sobre el límite de proporcionalidad, sustituyendo el módulo elástico constante E por un módulo reducido $\bar{E}$, es decir,

$$\frac{P}{A} = \frac{\bar{E}\pi^2}{(L/r)^2} \qquad \textbf{(11–6)}$$

El módulo reducido $\bar{E}$, que también se llama módulo de tangente o tangencial, es la pendiente de la tangente al diagrama de esfuerzo-deformación en el punto que corresponde al esfuerzo medio en la columna. Esta fórmula proporciona una curva que empalma las dos gráficas representativas de las columnas cortas y largas. Aunque este método es empírico, ya que la fórmula de Euler se basa en la proporcionalidad esfuerzo-deformación, los ensayos reales demuestran una gran concordancia con la curva teórica†.

* Véase un artículo de W. R. Osgood, «The Double-Modulus Theory of Column Action», *Civil Engineering*, marzo 1935.

† Un estudio moderno del método del módulo tangencial se puede ver en *Strength of Materials*, de F. R. Shanley, McGraw-Hill, Nueva York, 1957, págs. 582-588.

Otros métodos son puramente empíricos. Uno de los más sencillos, propuesto en 1886 por T. H. Johnson, consiste en ajustar una recta a los valores medios de las series de numerosos ensayos obtenidos graficando los valores de P/A, (cuando se va a producir la rotura por pandeo), en función de los valores correspondientes de L/r. La ecuación general de esta fórmula lineal es:

$$\frac{P}{A} = \sigma - C\frac{L}{r}$$

en donde σ es la ordenada en el origen (para $L/r = 0$) y C es la pendiente de la recta.

Los resultados obtenidos por Tetmajer y Bauschinger en ensayos con varillas de acero estructural, con los extremos articulados, han sido muy utilizados y dan para la carga crítica la expresión*:

$$\frac{P}{A} = 330 - 1.45\frac{L}{r} \quad \text{MPa} \tag{11-7}$$

En la figura 11-8 se representa esta expresión. Como se ha dicho, el punto de cedencia es el límite práctico de P/A; en la ecuación (11-7), para un punto de cedencia de 280 MPa, el valor de la esbeltez es $L/r = 35$, que corresponde al límite inferior de aplicación de dicha fórmula.

Si la ecuación (11-7) se divide entre el coeficiente de seguridad 3, se obtiene una ecuación para las cargas de trabajo que ha sido muy empleada, y que aparecía antes en todos los reglamentos de construcción. Sin embargo, es tan conservadora, que ha sido sustituida en la mayoría de los tratados, y en la práctica, por otras que se examinan más adelante. En lo sucesivo se cita con el nombre de fórmula lineal expresada por:

$$\frac{P}{A} = 110 - 0.483\frac{L}{r} \quad \text{MPa} \tag{11-8}$$

Los límites de aplicación de esta fórmula son las esbelteces comprendidas entre 30 y 120 para elementos principales, pero puede aplicarse con esbelteces de 150 en elementos secundarios. Por debajo de $L/r = 30$ se utilizará $P/A = 96.5$ MPa.

Otra fórmula muy empleada es la de Rankine-Gordon, planteada hacia 1860. Supone que la deflexión máxima en una columna varía con L^2/c, es decir, $\delta_{máx} = \phi L^2/c$, siendo ϕ una constante que depende de las condiciones de sujeción de los extremos. En estas condiciones, el esfuerzo máximo en una columna viene dada por:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{(P\delta_{máx})c}{Ar^2} = \frac{P}{A}\left[1 + \phi\left(\frac{L}{r}\right)^2\right]$$

por lo que la fórmula para el esfuerzo medio P/A es:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma}{1 + \phi(L/r)^2}$$

* Los valores numéricos para las fórmulas empíricas de las columnas que aquí se dan constituyen una conversión aproximada en unidades SI.

Una forma muy utilizada de esta expresión, que se ha llamado de Rankine-Gordon, es:

$$\frac{P}{A} = \frac{124}{1 + \dfrac{1}{18 \times 10^3}\left(\dfrac{L}{r}\right)^2} \quad \text{MPa} \tag{11-9}$$

Esta expresión, que incluye un factor de seguridad, es válida para elementos principales con esbelteces comprendidas entre 60 y 120, y para elementos secundarios hasta $L/r = 200$. Por debajo de $L/r = 60$, se especifica tomar un esfuerzo de trabajo de $P/A = 103$ MPa.

Otra fórmula más para las columnas de longitud intermedia es la del tipo parabólico, propuesta en 1892 por el profesor J. B. Johnson. (No tiene nada que ver con T. H. Johnson, de la fórmula lineal.) La expresión tiene la forma general:

$$\frac{P}{A} = \sigma - C\left(\frac{L}{r}\right)^2$$

en la que σ es el esfuerzo en el punto de cedencia, y C una constante elegida de forma que la parábola sea tangente a la curva de Euler.

El AISC (American Institute of Steel Construction) define el límite entre columnas intermedias y largas como el valor de la relación de esbeltez C_C dado por

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{PC}}}$$

donde E es el módulo de elasticidad (200 GPa para la mayoría de los tipos de acero) y σ_{PC} es el esfuerzo en el punto de cedencia para el tipo particular de acero empleado. Para columnas de longitud efectiva L_e y radio de giro mínimo r, el AISC especifica que para $L_e/r > C_C$, el esfuerzo de trabajo, σ_T, está dado por

$$\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} \tag{11-10}$$

(Nótese que ésta es la fórmula de Euler con un factor de seguridad de $23/12 = 1.92$.) Para $L_e/r < C_C$, el AISC especifica la fórmula parabólica

$$\sigma_T = \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\frac{\sigma_{PC}}{\text{FS}} \tag{11-11}$$

donde el factor de seguridad, FS, está dado por

$$\text{FS} = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} \tag{11-12}$$

Obsérvese que el factor de seguridad es 1.92 cuando $L_e/r = C_C$ y disminuye al aumentar la relación de esbeltez. La variación de σ_T con L_e/r para diferentes tipos de acero se muestra en la figura 11-9.

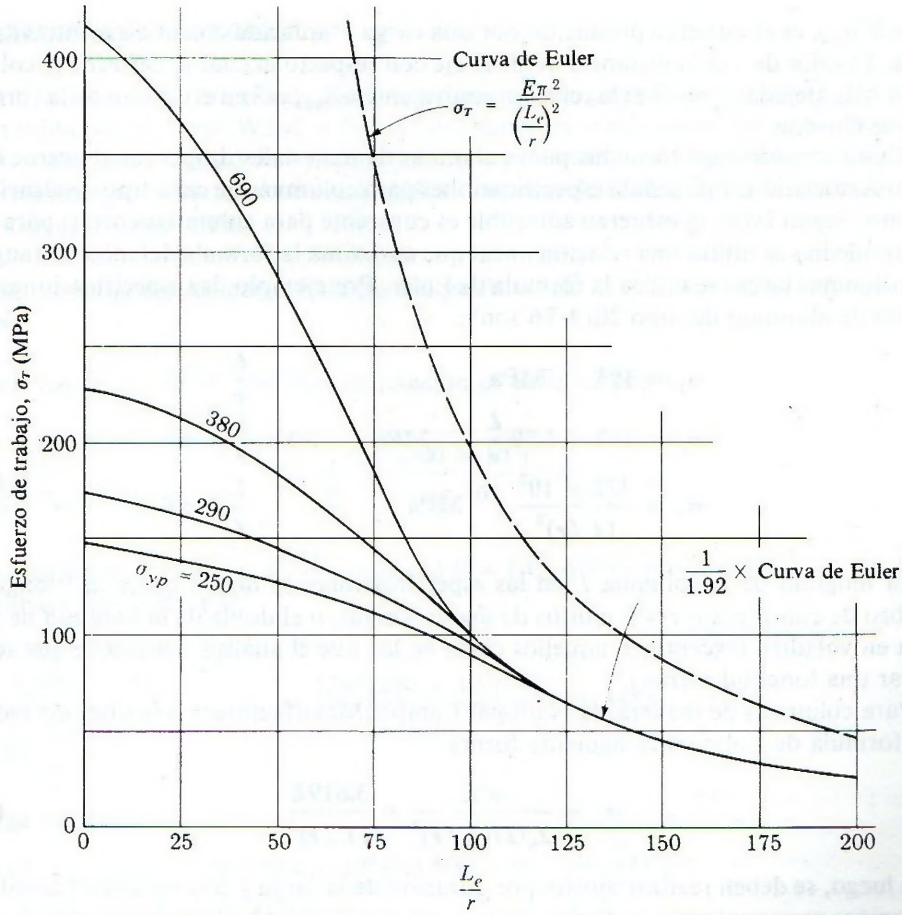


Figura 11-9. Esfuerzo de trabajo para columnas (especificaciones AISC) de diferentes tipos de acero.

Todas las fórmulas anteriores son para columnas del tipo fundamental (extremos articulados). Aunque el empotramiento de los extremos aumenta la capacidad de carga (Sec. 11-3), las columnas de las estructuras, que son en su mayoría de longitud intermedia, no suelen tener sus extremos perfectamente empotrados, por lo que es un buen criterio suponerlos articulados, aunque la columna esté remachada o sujeta de cualquier otra forma en sus extremos. En ocasiones, en un diseño económico de columnas, se puede aplicar la longitud efectiva o equivalente en el caso de empotramientos totales o parciales.

Mencionemos también una fórmula, que se estudia en la sección 11-7, llamada *fórmula de la secante*, en la que se supone una determinada excentricidad en la carga, y que teóricamente es correcta, si se conoce exactamente la excentricidad, pero excesivamente engorrosa de aplicar. Su expresión es:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)} \qquad (11\text{–}13)$$

en donde $\sigma_{máx}$ es el esfuerzo producido por una carga P aplicada con una excentricidad e conocida. El valor de c es la distancia desde el eje con respecto al cual se deforma la columna a la fibra más alejada, y ec/r^2 es la relación equivalente a $\delta_{máx}\, cr^2$ en el estudio de la fórmula de Rankine-Gordon.

Ahora considérense fórmulas para columnas de materiales diferentes al acero. La Aluminum Association, Inc. señala especificaciones para columnas de cada tipo de aleaciones de aluminio. Según éstas, el esfuerzo admisible es constante para columnas cortas; para columnas intermedias se utiliza una relación lineal que aproxima la fórmula del módulo tangencial. Para columnas largas se utiliza la fórmula de Euler. Por ejemplo, las especificaciones para la aleación de aluminio del tipo 2014-T6 son*:

$$\sigma_T = 193 \quad \text{MPa} \qquad \frac{L}{r} \leqslant 12 \tag{11-14}$$

$$\sigma_T = 212 - 1.59\frac{L}{r} \quad \text{MPa} \qquad 12 < \frac{L}{r} < 55 \tag{11-15}$$

$$\sigma_T = \frac{372 \times 10^3}{(L/r)^2} \quad \text{MPa} \qquad \frac{L}{r} \geqslant 55 \tag{11-16}$$

La longitud de la columna L en las especificaciones se define como la "longitud del miembro de compresión entre puntos de apoyo lateral, o el doble de la longitud de una columna en voladizo (excepto en aquellos casos en los que el análisis demuestre que se pueda emplear una longitud menor)".

Para columnas de madera, la National Lumber Manufacturers Association† recomienda la fórmula de Euler en la siguiente forma:

$$\sigma_T = \frac{\pi^2 E}{2.727(L/r)^2} = \frac{3.619E}{(L/r)^2} \tag{11-17}$$

Desde luego, se deben realizar ajustes por duración de la carga y contenido de humedad. Para columnas rectangulares con dimensión mínima d, $r = \sqrt{d/12}$ y la ecuación (11-17) se reduce a

$$\sigma_T = \frac{0.3E}{(L/d)^2} \tag{11-18}$$

Además de las fórmulas reseñadas se emplean otras muchas, e incluso en otras reglamentaciones, curvas o tablas que dan el esfuerzo medio P/A en función de la esbeltez L/r con coeficientes de seguridad constantes o variables, empezando con 2 para esbeltez cero, y aumentando progresivamente hasta 3 ó 3.5 para esbelteces grandes. De todas formas, no es necesario retener en la memoria ninguna de ellas, ya que siempre se debe especificar la fórmula que se emplea, o emplear las de la reglamentación de cada país. Todas ellas tienen algo en común; la carga de trabajo disminuye al aumentar la esbeltez, aunque en distintas proporciones. Según la fórmula empleada, la misma columna puede soportar en general varias cargas *legales* de seguridad.

* Los valores numéricos aquí consignados son conversiones aproximadas al SI de los valores que aparecen en *Specifications for Aluminum Structures,* 3a. ed., Construction Manual Series, Sec. 1, Aluminum Association, N. York, abril 1976, p. 21.

† *National Design Specification,* National Lumber Manufacturers Association, Washington, D. C., 1962.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

1110. Mediante la fórmula de AISC determinar la carga axial de trabajo en una columna constituida por un perfil W360 × 122 en las siguientes condiciones: (*a*) Articulada en sus extremos y con una longitud de 9 m. (*b*) Extremos perfectamente empotrados y longitud de 10 m. (*c*) Extremos perfectamente empotrados, longitud de 10 m y sujeta lateralmente en el centro. Use $\sigma_{PC} = 380$ MPa.

Solución: La tabla del Apéndice B da para el perfil W360 × 122, $A = 15500$ mm^2 y $r_{\text{mín}} = 63.0$ mm.

Parte (*a*). Para $\sigma_{PC} = 380$ MPa la relación de esbeltez límite es

$$\left[C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{PC}}} \right] \qquad C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2(200 \times 10^9)}{380 \times 10^6}} = 102$$

Aquí la relación de esbeltez es $L_e/r = 9000/63.0 = 143$, que es mayor que C_c. Así, el esfuerzo de trabajo está dado por

$$\left[\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23\left(\frac{L_e}{r}\right)^2} \right] \qquad \sigma_T = \frac{12\pi^2(200 \times 10^9)}{23(143)^2} = 50.4 \text{ MPa}$$

y la carga axial es

$$[P = \sigma A] \qquad P = (50.4 \times 10^6)(15\,500 \times 10^{-6}) = 781 \text{ kN} \qquad \textbf{Resp.}$$

Parte (*b*). Usando el concepto longitud efectiva, se obtiene que una columna con extremos empotrados es equivalente a una columna con extremos articulados de la mitad de longitud de aquella. De aquí, con $L_e = 0.5\text{L} = (0.5)(10) = 5$ m, la relación de esbeltez es $L_e/r = 5000/63.0 = 79.4$, que es menor que $C_C = 102$. De esta suerte, el esfuerzo de trabajo se determina como sigue

$$\left[\text{FS} = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3} \right] \qquad \text{FS} = \frac{5}{3} + \frac{3(79.4)}{8(102)} - \frac{(79.4)^3}{8(102)^3} = 1.90$$

donde

$$\left[\sigma_T = \frac{\left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\sigma_{PC}}{\text{FS}} \right]$$

$$\sigma_T = \frac{\{1 - [(79.4)^2/2(102)^2]\}}{1.90}(380 \times 10^6) = 139 \text{ MPa}$$

Finalmente la carga axial es

$$[P = \sigma A] \qquad P = (139 \times 10^6)(15\,500 \times 10^{-6})$$

$$= 2150 \text{ kN} \qquad \textbf{Resp.}$$

Parte (c). Arriostrada en su punto medio, la columna es equivalente a una de 5 m de longitud, fija en un extremo y articulada en el otro. La longitud efectiva es $L_e = 0.7L = 0.7\,(5) = 3.5$ m, de donde $L_e/r = 3500/63.0 = 55.6$, que es menor que $C_c = 102$. Procediendo como en la parte (*b*), obtenemos FS = 1.85 y $\sigma_T = 175$ MPa. De aquí que la carga de seguridad sea

$$[P = \sigma A] \qquad P = (175 \times 10^6)(15\,500 \times 10^{-6})$$

$$= 2710 \text{ kN} \qquad \textbf{Resp.}$$

Este problema ilustra cómo se aumenta considerablemente la resistencia de una columna cuyos extremos estén perfectamente empotrados. Ya que esta condición nunca se da en la realidad, es preferible suponer extremos articulados al determinar cargas admisibles, o bien, ser más realista al seleccionar una longitud efectiva con extremos empotrados de alrededor de $0.75L$, en lugar de $0.5L$.

1111. Determinar un perfil W para soportar una carga axial de 360 kN con una longitud de 4.6 m. Emplear las especificaciones AISC con $\sigma_{PC} = 250$ MPa.

Solución: Ya que tanto el área A como el radio de giro mínimo r son desconocidos, y no se puede establecer una relación conveniente entre ambos, la selección del perfil tiene que hacerse por ensayo y error. Los pasos son: (1) suponga un esfuerzo de trabajo; (2) calcule el área requerida; (3) seleccione el perfil W más ligero según área calculada en (2); y (4) para este perfil, calcule la carga admisible según las especificaciones de columnas. Si esta carga es igual (o ligeramente mayor que) la carga aplicada, el perfil seleccionado es el adecuado. Si la carga admisible es menor que la aplicada, debe buscarse un perfil más robusto y repetirse el procedimiento. Desde luego, el número de ensayos que deban realizarse antes de determinar el perfil adecuado depende de qué tan próximo esté el esfuerzo supuesto del esfuerzo real. Una recomendación es suponer un esfuerzo de trabajo inicial de 80% del esfuerzo para $L/r = 0$, determinando de las especificaciones para columnas.

Para el acero con $\sigma_{PC} = 250$ MPa, la relación de esbeltez límite es

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{PC}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200 \times 10^9)}{250 \times 10^6}} = 126$$

Primer ensayo. Para $L_e/r = 0$, FS $= \frac{5}{3}$ y $\sigma_T = \sigma_{PC}/\text{FS} = 250/\frac{5}{3} = 150$ MPa. Suponiendo un esfuerzo inicial de 0.80 (150) = 120 MPa, el área requerida es

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{360 \times 10^3}{120 \times 10^6} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^2 = 3000 \text{ mm}^2$$

Así, de la tabla B-2 del Apéndice B, se selecciona un perfil W200 × 27 con $A = 3390\ \text{mm}^2$ y $r = 31.2$ mm. Para este perfil, $L_e/r = 4600/31.2 = 147$, que es mayor que $C_c = 126$. Así, el esfuerzo de trabajo para esta sección es

$$\left[\sigma_T = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2}\right] \qquad \sigma_T = \frac{12\pi^2(200 \times 10^9)}{23(147)^2} = 47.7\ \text{MPa}$$

Por lo tanto, la carga admisible es $P = \sigma A = (47.7 \times 10^6)(3390 \times 10^{-6}) = 162$ kN. Ya que ésta es menor que la carga aplicada, el perfil se rechaza.

Segundo ensayo. Ahora selecciónese un perfil W200 × 36, que tiene mayor área y mayor radio de giro mínimo. Para esta sección, $A = 4580\ \text{mm}^2$, $r = 40.9$ mm y $L_e/r = 4600/40.9 = 112$, que es menor que $C_c = 126$. El esfuerzo de trabajo para esta sección se determina como sigue:

$$\left[\text{FS} = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3}\right] \qquad \text{FS} = \frac{5}{3} + \frac{3(112)}{8(126)} - \frac{(112)^3}{8(126)^3} = 1.91$$

de donde

$$\left[\sigma_T = \frac{\left[1 - \dfrac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\sigma_{PC}}{\text{FS}}\right] \qquad \sigma_T = \frac{\left[1 - \dfrac{(112)^2}{2(126)^2}\right]}{1.91}(250 \times 10^6) = 79.2\ \text{MPa}$$

Así, la carga admisible para esta sección es

$$P = \sigma A = (79.2 \times 10^6)(4580 \times 10^{-6}) = 363\ \text{kN}$$

Ya que esta carga es sólo ligeramente mayor que la aplicada de 360 kN, se acepta el perfil W200 × 36.

El procedimiento para seleccionar un perfil se simplifica grandemente usando tablas que den las cargas axiales admisibles para diferentes secciones de diversas longitudes. Tales tablas se encuentran en un manual para acero, como el publicado por la AISC. Sin embargo, este problema ilustra el método de ensayo y error que surge frecuentemente en el diseño estructural.

PROBLEMAS

1112. Determinar la relación de esbeltez de una columna de 4 m con extremos empotrados si su sección es (*a*) una circunferencia de 50 mm de radio y (*b*) un cuadrado de 40 mm de lado. Use el concepto de longitud efectiva.

Resp. (a) 80.0; (b) 173

1113. Usando especificaciones de la AISC, determinar la longitud máxima de un perfil W360 × 122 si se va usar como columna con extremos articulados para soportar una carga de 1200 kN, usando $\sigma_{PC} = 450$ MPa.

Resp. $L = 7.25$ m

1114. Aplicando las especificaciones de la AISC, determinar la máxima longitud que puede tener una columna formada con un perfil W250 × 167 para soportar una carga de 1600 kN, con extremos articulados. Use σ_{PC} = 380 MPa.

1115. Calcular el coeficiente de seguridad que debería emplearse en la fórmula de Euler para que diera la misma capacidad de carga, para el acero, dada por el límite superior para miembros primarios por la aplicación de: (*a*) la fórmula lineal dada por la ecuación (11-8); (*b*) la ecuación (11-9) de Rankine-Gordon.

1116. Un perfil W360 × 134 se usa como columna con extremos articulados. Usando las especificaciones de la AISC, determinar la carga máxima que puede aplicársele si (*a*) L = 9 m y (*b*) L = 15 m, usando σ_{PC} = 290 MPa en ambos casos.

Resp. (a) 1740 kN; (b) 687 kN

1117. Un perfil W200 × 100 se emplea como columna de 9 m con sus extremos empotrados. (a) Empleando las especificaciones de la AISC, calcular la carga de seguridad que puede aplicarse si la longitud efectiva es tres cuartos de la real. (b) Determinar la carga de seguridad si la columna estuviera también sujeta lateralmente en su punto medio. Use σ_{PC} = 380 MPa.

Resp. (a) 837 kN; (b) 2400 kN

1118. Repetir el problema 1117 suponiendo que la longitud de la columna sea de 14 m con un perfil W310 × 500.

1119. Una columna de acero de 10 m de longitud se construye con dos perfiles C250 × 45 unidos mediante celosía de manera que la sección compuesta tiene igual momento de inercia con respecto a los dos ejes principales. Determinar la carga de seguridad aplicando las especificaciones de la AISC, con σ_{PC} = 380 MPa.

Resp. P = 883 kN

1120. Cuatro ángulos de 100 × 100 × 10 mm se unen mediante placas en celosía para formar una sección compuesta, como se indica en la figura P-1120. Aplicando las especificaciones de la AISC, con σ_{PC} = 290 MPa, determinar la longitud máxima que puede tener si ha de soportar una carga de 500 kN. ¿Cuál debe ser la longitud libre entre ángulos, de manera que su esbeltez sea, como máximo, igual a las tres cuartas partes de la correspondiente a la sección compuesta?

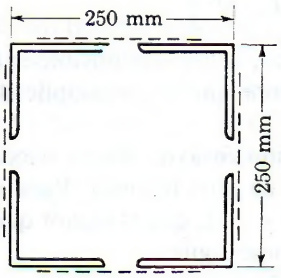


Figura P-1120.

1121. En la estructura de un puente, representada en la figura P-1121, la barra AB está formada por dos perfiles C230 × 30 unidos mediante celosías, de manera que la sección resultante tenga igual momento de inercia respecto de los ejes de simetría. Si la carga de seguridad P viene dada por la resistencia de la barra AB, determinarla mediante las especificaciones AISC con σ_{PC} = 290 MPa.

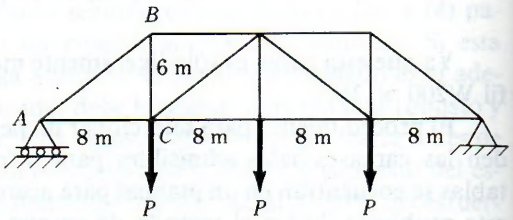


Figura P-1121.

Resp. P = 210 kN

1122. Determinar una sección W que pueda trabajar como columna de 4 m soportando una carga de 420 kN. Aplicar las especificaciones de la AISC, con σ_{PC} = 250 MPa.

Resp. W200 × 36

1123. Aplicando las especificaciones de la AISC, determinar el perfil W más ligero para so-

portar una carga de 700 kN con una longitud efectiva de 5.5 m, suponiendo $\sigma_{PC} = 250$ MPa.

1124. Repetir el problema anterior con una carga de 690 kN y $\sigma_{PC} = 345$ MPa.

1125. Una columna de acero, con extremos articulados, de 10 m de altura se construye con un perfil W200 × 46 y dos C310 × 45 soldados entre sí como se indica en la figura P-1125. Determinar la carga axial de seguridad aplicando las especificaciones de la AISC con $\sigma_{PC} = 250$ MN/m^2.

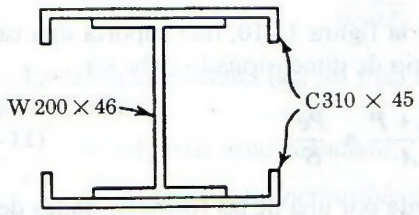


Figura P-1125.

Resp. $P = 1440$ kN

1126. La biela de una máquina tiene una sección recta con las siguientes propiedades: Área = 300 mm^2, $r_x = 3.00$ mm, $r_y = 1.40$ mm. Los pasadores de unión a la manivela y a la cruceta hacen que la biela trabaje como columna articulada con respecto al eje x y como empotrada con respecto al eje y. Teniendo en cuenta la longitud efectiva, determinar la carga de seguridad si la longitud real es de 250 mm, aplicando la ecuación (11-9) de Rankine-Gordon.

Resp. $P = 25.8$ kN

1127. Obtener una fórmula parabólica de la forma general $P/A = \sigma - C(L/r)^2$ que sea aplicable a las columnas de aleación de aluminio con extremos articulados. Supóngase que la fórmula parabólica tiene que ser tangente a la fórmula de Euler con un factor de seguridad igual a 2. $\sigma = 110$ MPa y $E = 70$ GPa. *Indicación*: En las dos fórmulas, igualar los valores de las cargas unitarias y de las derivadas de éstas con respecto a la esbeltez.

Resp. $\dfrac{P}{A} = (110 \times 10^6) - 8760\left(\dfrac{L}{r}\right)^2$

para $\dfrac{L}{r} < 79.3$

1128. Cuatro ángulos de 100 × 100 × 13 mm se remachan adosados como indica la figura P-1128. Determinar la carga de seguridad si se utilizan como columna de 4 m de extremos articulados. Aplicar las especificaciones de la AISC con $\sigma_{PC} = 250$ MPa.

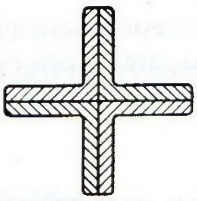


Figura P-1128.

1129. Determinar la carga axial de seguridad que pueda aplicarse a una columna de aleación de aluminio 2014-T6 si su longitud es (a) 1 m y (b) 3 m. Supóngase, en cada caso, que las propiedades geométricas del perfil son idénticas a las de un perfil de acero S310 × 52.

Resp. (a) 984 kN; (b) 172 kN

1130. Repetir el problema 1129 suponiendo que las propiedades geométricas del perfil son idénticas a las de un perfil de acero S250 × 52.

1131. Determinar la carga axial de seguridad en una columna de roble de sección rectangular de 150 × 200 mm si su longitud es (a) 2 m y (b) 4 m, empleando $E = 11.5$ GPa.

Resp. (a) 582 kN; (b) 146 kN

1132. Repetir el problema 1131 para una columna de pino de sección rectangular de 50 × 200 mm para la cual $E = 11.2$ GPa.

11-6. COLUMNAS CARGADAS EXCÉNTRICAMENTE

Las columnas se suelen diseñar para soportar cargas axiales, y las fórmulas que se han expuesto lo han sido con este criterio. Sin embargo, en ocasiones las columnas pueden estar sometidas a cargas con una determinada excentricidad, por ejemplo, cuando se remacha una viga al ala de una columna en la estructura de un edificio. La fórmula de la secante que se estudia en la sección siguiente es especialmente adecuada para tales casos, pero su aplicación numérica es tan engorrosa que suele emplearse con frecuencia el procedimiento simplificado que se indica a continuación.

Se estudia la columna excéntricamente cargada como si fuera, en lo que se refiere a los esfuerzos, un elemento corto (Sec. 9-3) cargado excéntricamente. Pero para eliminar la posibilidad del pandeo, de manera que pueda despreciarse el efecto de la flexión en el brazo de momento de la fuerza o carga excéntrica, se limita el esfuerzo máximo de compresión a la carga unitaria calculada con una cualquiera de las fórmulas expuestas en las secciones anteriores.

Aplicando este procedimiento a la columna de la figura 11-10, que soporta una carga axial P_0 y una carga P con excentricidad e, el criterio de dimensionado debe ser:

$$\sigma \geqslant \frac{\Sigma P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P_0 + P}{A} + \frac{Pe}{S} \qquad (11\text{–}19)$$

en donde σ es la carga unitaria de seguridad, calculada por una de las fórmulas dadas de las columnas (tomando como radio de giro para la determinación de la esbeltez siempre el menor, aunque la excentricidad no sea en esa dirección), I el momento de inercia correspondiente al eje con respecto al que se produce la flexión (eje X-X en la Fig. 11-10) y S el módulo resistente respecto del mismo eje.

Los modernos criterios de diseño han refinado el planteamiento de máximo esfuerzo para incluir los momentos, llamados secundarios, que se introducen debido a la deflexión del eje neutro (el llamado efecto P-δ). Estos efectos toman la forma, muy frecuentemente, de ecuaciones de interacción, que intentan sopesar la importancia relativa del esfuerzo axial y del esfuerzo por flexión.

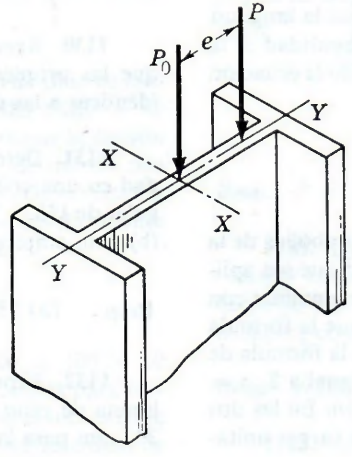


Figura 11-10. Carga axial P_0 y carga excéntrica P en una columna.

Por ejemplo, la AISC* recomienda que, cuando el esfuerzo axial calculado f_a sea menor que el esfuerzo real F_a que se permitiría si sólo actuara el esfuerzo axial, los momentos secundarios pueden despreciarse y el miembro debe satisfacer el siguiente criterio:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0 \qquad (a)$$

Cuando $f_a > 0.15\,F_a$, no pueden despreciarse los efectos del momento secundario. En estos casos, la AISC requiere que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx} f_{bx}}{\left(1 - \dfrac{f_a}{F'_{ex}}\right) F_{bx}} + \frac{C_{my} f_{by}}{\left(1 - \dfrac{f_a}{F'_{ey}}\right) F_{by}} \leq 1.0 \qquad (b)$$

$$\frac{f_a}{0.60 F_y} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0 \qquad (c)$$

En las desigualdades (a), (b) y (c) los diferentes términos tienen los siguientes significados:

f_a = esfuerzo axial *calculado*;

F_a = esfuerzo axial *permisible* si sólo actuara la fuerza axial;

f_{bx} = esfuerzo por flexión *calculado* con respecto al eje de momento de inercia mayor, despreciando el momento secundario;

f_{by} = esfuerzo por flexión *calculado* con respecto al eje de momento de inercia menor, despreciando el momento secundario;

F_{bx} = esfuerzo *permisible* de compresión por flexión con respecto al eje de momento de inercia mayor, como si sólo actuara el momento;

F_{by} = esfuerzo *permisible* de compresión por flexión con respecto al eje de momento de inercia menor, como si sólo actuara el momento;

F'_{ex} = esfuerzo de pandeo según Euler, con respecto al eje de momento de inercia mayor;

F'_{ey} = esfuerzo de pandeo según Euler, con respecto al eje de momento de inercia menor;

C_{mx}, C_{my} = factores de reducción para corregir cálculos demasiado conservadores en algunos casos del factor de amplificación $[1 - (f_a/F'_e]$.

F_y = esfuerzo de fluencia

Para miembros sometidos a compresión en marcos sujetos a desplazamientos de las uniones, se puede tomar $C_m = 0.85$.

Para miembros sometidos a compresión en marcos arriostrados para evitar desplazamientos transversales y sujetos a momentos en los extremos, pero no a cargas transversales

* La notación aquí empleada es la del *Manual for Steel Construction*, American Institute of Steel Construction, Nueva York, 1970.

entre apoyos, úsese $C_m = 0.6 - 0.4(M_1/M_2) \geq 0.4$, donde M_1/M_2 es la relación del menor al mayor de los momentos aplicados en los extremos. Esta relación es positiva cuando el miembro se flexiona en curvatura inversa y negativa, cuando lo hace en curvatura simple.

Para miembros sometidos a compresión en marcos arriostrados para evitar desplazamientos laterales en el plano de carga y sujetos a carga transversal entre los apoyos, C_m puede tomarse como 0.85 para miembros con extremos restringidos, y como 1.0 para miembros sin restricciones; C_m se puede determinar también mediante un análisis racional en este caso.

Las especificaciones de la AISC también incluyen fórmulas para la determinación de los esfuerzos permisibles debidos a flexión, F_b, como una fracción del esfuerzo de cedencia. El valor de F_b depende de la relación ancho/espesor de la sección y de los intervalos de arriostramiento.

Para otros materiales estructurales, tales como madera y aluminio, se han adoptado fórmulas de interacción semejantes a la fórmula de la AISC.

El diseño de miembros sujetos tanto a cargas axiales como de pandeo, es esencialmente un procedimiento de interacción. Así, mediante criterios apropiados se verifica si una sección seleccionada es adecuada o no. Este procedimiento se simplifica grandemente por las diversas tablas y gráficas de que dispone el diseñador. También existen programas de computadora para ayudar al diseñador a seleccionar la sección óptima que cumpla las fórmulas de interacción.

Los problemas siguientes ilustran la aplicación del enfoque del máximo esfuerzo. Para aplicaciones de las ecuaciones de interacción, se envía al lector a algún texto moderno de diseño estructural*.

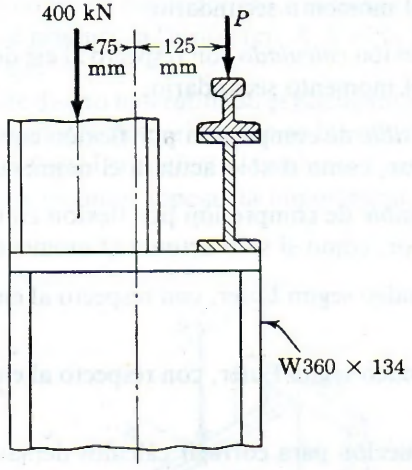


Figura 11-11.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1133. Un perfil W360 × 134 se emplea como columna de 7 m de longitud efectiva para soportar un carril de una grúa viajera en una nave industrial. Determinar la máxima reacción

* Véase, por ejemplo, L. A. Hill, Jr., *Fundamentals of Structural Design: Steel, Concrete and Timber,* Intext, N. York, 1975.

admisible P si la columna soporta también una carga de 400 kN procedente de la planta superior, como se indica en la figura 11-11. Use el enfoque del máximo esfuerzo (Sec. 11-19) y las especificaciones de la AISC, con $\sigma_{PC} = 250$ MPa.

Solución: La tabla B-2 del Apéndice B da las propiedades de un perfil W360 × 134 como $A = 17\ 100\ \text{mm}^2$, $S_x = 2330 \times 10^3\ \text{mm}^3$, y $r = 94.0$ mm. La relación de esbeltez $L_e/r = 7000/94.0 = 74.5$. Para $\sigma_{PC} = 250$ MPa, la relación de esbeltez crítica es

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{PC}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200 \times 10^9)}{250 \times 10^6}} = 126$$

Ya que $L_e/r < C_c$, la fórmula AISC apropiada (ec. 11-11) determina el esfuerzo de trabajo como sigue:

$$\left[\text{FS} = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3}\right] \qquad \text{FS} = \frac{5}{3} + \frac{3(74.5)}{8(126)} - \frac{(74.5)^3}{8(126)^3} = 1.86$$

de donde

$$\left[\sigma_T = \frac{\left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2}\right]\sigma_{PC}}{\text{FS}}\right] \qquad \sigma_T = \frac{\left[1 - \frac{(74.5)^2}{2(126)^2}\right]}{1.86}(250 \times 10^6) = 111\ \text{MPa}$$

Usando el enfoque del máximo esfuerzo consideramos que la columna actúa como un miembro corto sometido a compresión y cargado excéntricamente, limitado a su esfuerzo máximo de 111 MPa. Aplicando la ecuación (11-19) se obtiene

$$\left[\sigma = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{M}{S}\right] \qquad 111 \times 10^6 = \frac{(400 \times 10^3 + P)}{(17\ 100 \times 10^{-6})} + \frac{0.125P - 0.075(400 \times 10^3)}{2330 \times 10^{-6}}$$

de donde

$$P = 896 \times 10^3\ \text{N} = 896\ \text{kN} \qquad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

En los problemas siguientes use el planteamiento del máximo esfuerzo y las especificaciones de la AISC para columnas, a menos que se indique otra cosa.

1134. Un perfil W360 × 122 se emplea como columna de 10 m de longitud efectiva. Determinar la carga máxima que puede soportar con una excentricidad de 300 mm. ¿Dónde se debe situar la carga, sobre el eje X o sobre el Y? Supóngase $\sigma_{pc} = 290$ MPa.

Resp. $P = 190$ kN

1135. Repetir el problema anterior si la longitud es de 4.5 m.

1136. Una barra prismática de acero de 50 × 75 mm tiene una longitud de 1.5 m. Calcular la carga máxima que puede soportar con una excentricidad de 120 mm con respecto a los ejes geométricos. La barra soporta también una carga axial de 50 kN. Suponga $\sigma_{PC} = 250$ MN/m^2.

Resp. $P = 25.8$ kN

1137. Un tubo de acero de 2.5 m de longitud, empotrado en su extremo inferior y libre en el superior, soporta un gran cartel cuyo centro de gravedad dista 0.60 m del eje del tubo. Determinar su peso máximo si el diámetro exterior del tubo es de 140 mm, su sección, de 2800 mm^2 y su momento de inercia, de 6.32×10^6 mm^4. Use $\sigma_{PC} = 250$ MN/m^2.

1138. Un perfil W360 × 134 se emplea como columna de 6 m de longitud. Soporta una carga axial de 260 kN y otra excéntrica de 220 kN sobre el eje de menor momento de inercia. Determinar la excentricidad máxima admisible de la carga, con $\sigma_{PC} = 250$ MPa.

Resp. $e = 952$ mm

1139. Un canal C310 × 45 se usa como columna articulada en sus extremos, de 2.2 m de longitud. ¿A qué distancia del centro puede aplicarse una carga de 50 kN sobre el eje X? Suponga que $\sigma_{PC} = 380$ MPa y que el esfuerzo de tensión está limitado a 140 MN/m^2. ¿Sobre que lado del eje Y ha de aplicarse la carga?

Resp. 100 mm

1140. Repetir el problema 1139 usando un canal C310 × 31.

1141. Un perfil W360 × 134 va emplearse como columna con una longitud de 9 m. La columna soporta una carga axial de 260 kN y una excentricidad de 360 kN, que actúa sobre el eje Y. Determinar la excentricidad máxima de la carga de 360 kN usando el método del máximo esfuerzo y la fórmula lineal de la ecuación (11-8).

Resp. 178 mm

1142. Repetir el problema 1141 usando un perfil W360 × 347.

11-7. FÓRMULA DE LA SECANTE

Se puede obtener una expresión teóricamente correcta para las columnas excéntricamente cargadas, generalizando el análisis de Euler, en la forma siguiente. La figura 11-12 muestra la elástica de la línea media de una columna que soporta una carga P con una excentricidad e y que tiene una longitud L. Si se prolonga la columna como indica la línea de trazos, se transforma en una columna articulada de longitud λ. El valor indicado de P es la carga crítica para esta longitud λ desconocida. Esta columna tiene una forma de media sinusoide cuya ecuación, tomando como origen uno de los extremos, es

$$y = \delta \operatorname{sen}\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$$

Ahora bien, de la ecuación (11-1), $\sqrt{P/EI} = \pi/L$ para el caso fundamental de columna articulada. Por tanto,

$$y = \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \qquad (a)$$

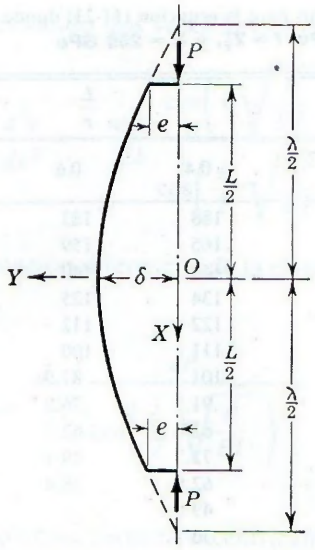


Figura 11-12. Columna excéntricamente cargada.

Si se considera el origen en el centro, la ecuación (*a*) en función de la longitud λ desconocida es

$$y = \delta \cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right) \tag{b}$$

Aplicando ahora la condición de que para $x = L/2$, $y = e$, se obtiene

$$e = \delta \cos\left(\frac{\pi L}{2\lambda}\right)$$

de donde se despeja el valor de δ que, introducido en la ecuación (*b*), resulta

$$y = e \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{\lambda}\right)}{\cos\left(\frac{\pi L}{2\lambda}\right)} \tag{c}$$

Para obtener el valor de λ se aplica la fórmula de Euler, dada por la ecuación (11-1), a una columna de longitud λ, es decir,

$$P = \frac{EI\pi^2}{\lambda^2}, \quad \text{o sea,} \quad \lambda = \pi\sqrt{\frac{EI}{P}} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Sustituyendo en (*c*) resulta la siguiente ecuación para la columna de la figura 11-12:

$$y = e \frac{\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)}{\cos\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)} \tag{d}$$

TABLA 11-1. Datos de diseño para la ecuación (11-21) donde se emplean σ_{PC} = 290 MPa, $f = 2\frac{1}{2}$, y E = 200 GPa

$\frac{P}{A}$	$\frac{L}{r}$				
(MPa)	$\frac{ec}{r^2} = 0.2$	0.4	0.6	0.8	1.0
20	193	188	183	178	172
25	171	165	159	153	146
30	155	148	140	133	125
35	142	134	125	116	107
40	131	122	112	102	90.9
45	122	111	100	88.6	74.6
50	113	101	87.9	73.6	56.9
55	106	91.7	76.2	58.4	34.1
60	98.9	82.4	63.7	39.5	—
65	92.1	72.7	49.1	—	—
70	85.3	62.0	28.4	—	—
75	78.1	49.0	—	—	—
80	70.2	30.1	—	—	—
85	60.8	—	—	—	—
90	48.1	—	—	—	—

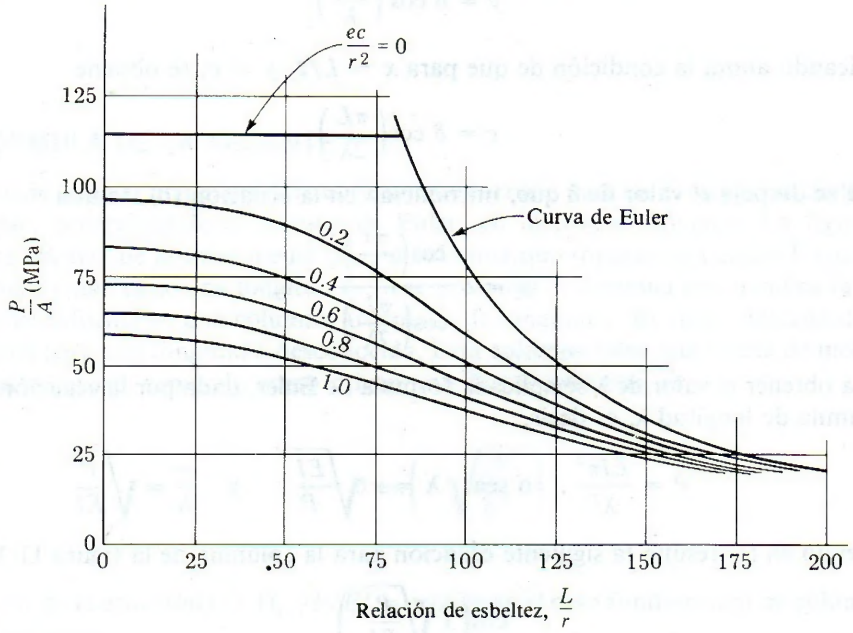


Figura 11-13. Curvas de diseño para la fórmula de la secante con un factor de seguridad de 2.5.

La curvatura se obtiene derivando dos veces la expresión (*d*),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{eP}{EI}\frac{\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)}{\cos\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)}$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación diferencial de la elástica, el momento flexionante máximo en $x = 0$ es

$$M = EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} = -\frac{eP}{\cos\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)} = -eP\sec\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \qquad (e)$$

El esfuerzo máximo en la columna cargada excéntricamente se compone del esfuerzo directo de compresión y del de flexión, como en una columna corta, es decir,

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

Por tanto, teniendo en cuenta $I = Ar^2$ y el valor de M de la ecuación (*e*) se obtiene

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right] \qquad (11\text{–}20)$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de *fórmula de la secante*. Para obtener la carga admisible, P_{adm} o de trabajo, hay que sustituir P por fP_{adm}, siendo f el coeficiente de seguridad, y tomar como $\sigma_{máx}$ el esfuerzo en el punto de cedencia. En estas condiciones, la ecuación (11-20) se transforma en

$$\sigma_{PC} = \frac{fP_w}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{fP_T}{EA}}\right)\right] \qquad (11\text{–}21)$$

Para aplicar esta ecuación hay que proceder por tanteos. Se facilita su aplicación hallando los valores de la esbeltez L/r para una serie de valores de P/A, y con distintos valores de la relación de excentricidad ec/r^2 tales como 0.2, 0.4, etc., 1.0. Este procedimiento da los resultados de la tabla 11-1, de los cuales se pueden graficar las curvas de diseño de la figura 11-13.

Es interesante observar que cuando la esbeltez se aproxima a cero el valor de la secante en la ecuación (11-20) tiende a la unidad y, por tanto, la ecuación (11-20) se transforma, en el límite,

$$\sigma_{máx.} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2}\right) = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

que es la ecuación para cargas excéntricas en elementos cortos.

RESUMEN

Las columnas largas se calculan por la fórmula de Euler. Para columnas con los extremos articulados la fórmula es

$$P = \frac{EI\pi^2}{L^2} \tag{11-1}$$

o bien,

$$\frac{P}{A} = \frac{E\pi^2}{(L/r)^2} \tag{11-5}$$

Para otras condiciones de sujeción de los extremos se sustituye L por una longitud efectiva cuyos valores están tabulados al final de la sección 11-3.

Las fórmulas de Euler son teóricamente correctas, siempre que el esfuerzo no sobrepase el límite de proporcionalidad. El límite inferior de validez de L/r se obtiene suponiendo que P/A representa el esfuerzo real en una columna recta, axialmente cargada, y sustituyendo P/A de la ecuación (11-5) por el valor del esfuerzo en el límite de proporcionalidad.

Las columnas con una esbeltez menor que el límite de la fórmula de Euler son columnas intermedias. Se han desarrollado varias fórmulas, que no son teóricamente correctas, para su cálculo. La más exacta es la fórmula de la secante de la ecuación (11-13). Sin embargo, esta fórmula no es cómoda de aplicar y en su lugar se emplean otras expresiones empíricas especificadas en las distintas normas de construcción de los diversos países.

Las columnas cargadas excéntricamente se analizan ya sea mediante el planteamiento del máximo esfuerzo o mediante ecuaciones de interacción. En el enfoque del máximo esfuerzo, las columnas se tratan como miembros cortos cargados excéntricamente (véase la Sec. 9-3) excepto que el valor del esfuerzo de trabajo se obtiene usando una fórmula especificada para columnas. Las ecuaciones de interacción intentan ponderar la importancia relativa de los esfuerzos axial y por flexión.

12
uniones conectadas y soldadas

12-1. INTRODUCCIÓN

En el análisis de las uniones *conectadas* (es decir, remachadas o atornilladas) y *por soldadura* existen tantos factores indeterminados que es imposible hallar una solución exacta del problema. Sin embargo, se pueden encontrar soluciones prácticas haciendo algunas hipótesis simplificativas. Una de las fundamentales es que si la carga aplicada pasa por el centro de gravedad de un grupo o conjunto de *conectores* (remaches o tornillos), cada uno transmite una fuerza igual a su capacidad de resistencia, a cortante o a la presión de contacto, dependiendo de cual sea menor. Esta hipótesis, junto con la de que la unión es de un material dúctil (mientras que las placas por unir se consideran perfectamente rígidas), permite considerar a las uniones conectadas como casos de distribución uniforme de esfuerzo.

Véase el capítulo 15, sección 15-2: *Uniones conectadas-Consideración adicional.*

12-2. TIPOS DE UNIONES CONECTADAS: REMACHADAS Y ATORNILLADAS —DEFINICIONES

En cuanto a la disposición de los elementos por unir existen dos tipos de uniones conectadas: juntas a traslape y juntas a tope. En una unión a traslape las placas a unir se colocan solapadas, una sobre otra, y se cosen entre sí mediante una o varias filas de conectores, como se observa en la figura 12-1.* En una unión a tope las dos placas a unir están colocadas en el mismo plano, con sus bordes a tope, y se sujetan mediante dos placas, una a cada lado de las placas a unir, que se llaman *cubrejuntas*, y que se unen a cada una de las placas principales. A veces incluso se coloca una sola placa cubrejunta. La junta se llama simple

* Por conveniencia, en lo que se sigue se indican todos los conectores como remaches en las ilustraciones.

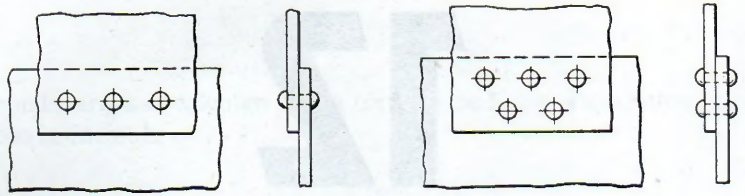


Figura 12-1. Uniones a traslape o solape.

o de una fila, doble o de dos filas, triple, etc., según sean una, dos, tres, etc., las filas de remaches que cosen entre sí las placas (Fig. 12-2). En las uniones de las calderas suele hacerse el cubrejunta exterior más estrecho que el interior, como en (c) y (d) de la figura 12-2, de manera que el cubrejunta exterior es lo suficientemente ancho para incluir sólo la fila de remaches en la que éstos están menos espaciados. Este tipo de unión se denomina *junta a presión*, y suelen además calafatearse o retacarse con el cincel y martillo las aristas de los bordes de los cubrejuntas exteriores para asegurar la hermeticidad del cierre

La separación entre los conectores de una fila se llama *paso*. cuando existen varias filas de conectores, el paso puede ser igual en todas ellas, o distinto de unas a otras. Cuando los remaches de dos filas consecutivas, con igual paso, están alternados, a la distancia entre uno de una fila y el correspondiente de la otra se le llama *paso diagonal*. La distancia entre filas paralelas de conectores se llama *gramil*.

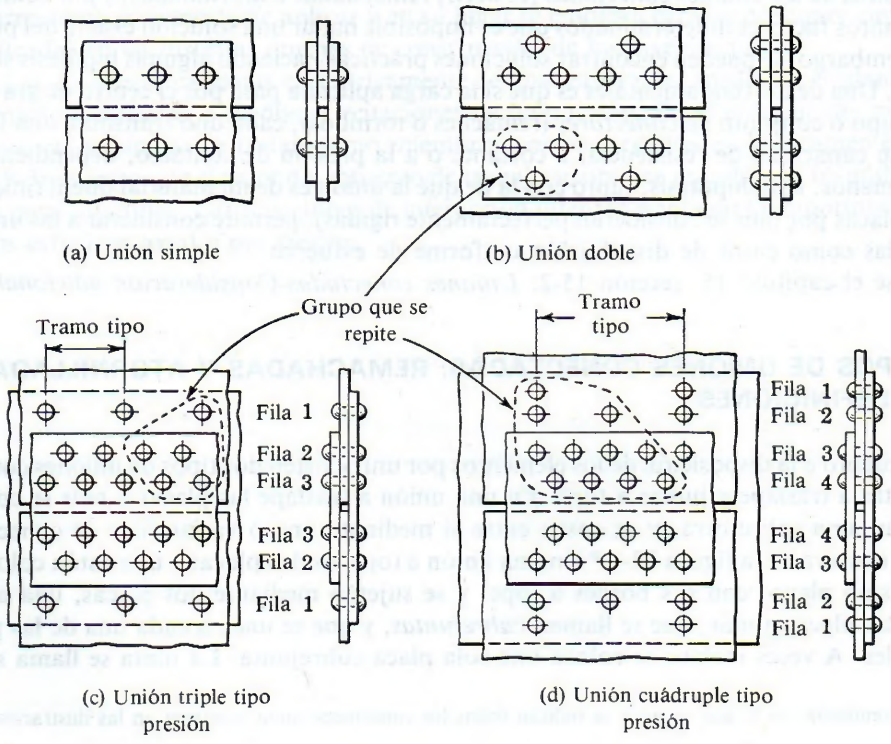


Figura 12-2. Uniones a tope.

Al determinar la resistencia de una unión conectada se suele referir los cálculos a la longitud de unión correspondiente a un grupo de conectores que se repiten, en distancias y disposición, a todo lo largo de la unión. La longitud del grupo que se repite, al que se suele llamar *tramo tipo*, es igual al paso mayor.

Para evitar confusiones en cuanto al número de remaches que constituyen el tramo tipo, tracemos dos líneas perpendiculares a la junta por los centros de dos conectores consecutivos de los que tienen el paso mayor y contemos los conectores, enteros o mitades, que existen entre dichas dos líneas paralelas. Por ejemplo, en la figura 12-2c hay cinco conectores efectivos en cada mitad (los que unen las cubrejuntas a una de las dos placas) del tramo tipo, dos medios en la fila 1, dos enteros en la fila 2 y un entero y dos medios en la fila 3. Análogamente, en cada mitad de la sección tipo de la unión cuádruple de la figura 12-2d hay once conectores.

La *eficacia* de una unión conectada indica si ha sido bien diseñada, y se mide por la relación entre la resistencia de la unión y la de la placa llena, es decir,

$$\text{Eficacia} = \frac{\text{Resistencia de la unión}}{\text{Resistencia de la placa llena}} \qquad (12\text{-}1)$$

Los orificios para los conectores se realizan por taladrado o por punzonado, retocándolos con un escariador de diámetro 1.5 mm mayor que el del conector. Se supone que, al situar los conectores, éstos entran tan ajustados, en este tipo de uniones a presión, que llenan por completo el orificio, y por ello en los cálculos se toma como diámetro de cálculo el del orificio. Las uniones estructurales se describen en la sección 12-6.

12-3. RESISTENCIA DE UNA UNIÓN SIMPLE, A TRASLAPE

Las uniones conectadas* se pueden considerar y estudiar como casos de esfuerzo uniforme en los que se verifica $P = A\sigma$ o $P = A\tau$. La aplicación de estas ecuaciones a los tipos fundamentales de ruptura de la unión se comprende fácilmente observando lo que pasa en una unión a traslape de una sola fila de conectores. Cualquier movimiento relativo que puedan tener las placas cosidas es equivalente a la ruptura o falla de la unión, ya que quedaría anulada su función, que es mantener una unión rígida y hermética.

En la figura 12-3 la ruptura por cortante del conector permite que las placas unidas deslicen una sobre otra. La carga de ruptura por cortante viene dada por:

$$P_s = A_s\tau = \frac{\pi d^2}{4}\tau \qquad (12\text{–}2)$$

siendo d el diámetro de cálculo del conector, es decir, el diámetro del orificio.

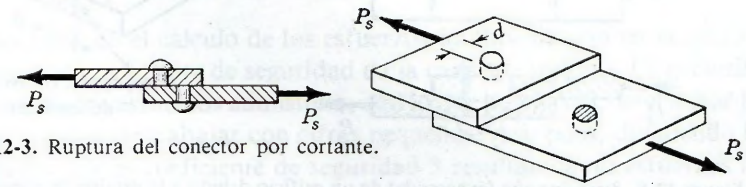


Figura 12-3. Ruptura del conector por cortante.

*En lo que sigue, al mencionar uniones conectadas se entenderá que son las de tipo remachado o con tornillos comunes.

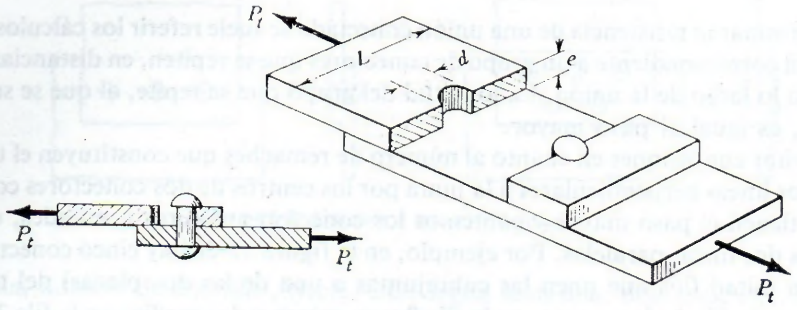


Figura 12-4. Ruptura de la placa, por tensión, en una sección normal a través de un orificio. $P_t = A\sigma_t = (L - d)t\sigma_t$.

La figura 12-4 representa la ruptura o falla por tensión en una de las placas cosidas. Este tipo de ruptura puede ocurrir en la sección que pasa por el centro del orificio, ya que es la de menor área, y menor resistencia. Llamando L al ancho del tramo tipo (o paso), el área resistente es la sección neta, o sea el producto del ancho neto $(L-d)$ por el espesor e. La carga de ruptura por tensión es:

$$P_t = A_t\sigma_t = (L - d)e\sigma_t \qquad \textbf{(12-3)}$$

Una tercera forma de ruptura, producida por una presión de contacto excesiva, es la indicada en la figura 12-5. En este caso, aunque no llegue a romperse, el movimiento relativo entre las placas cosidas está originado por la deformación permanente o alargamiento del orificio del conector, o por el aplastamiento del mismo.

En realidad, y como se indicó en la sección 1-5, la presión de contacto no es uniforme, sino que varía desde cero en los extremos hasta un máximo en el centro de la superficie de apoyo del conector contra el borde del orificio, pero se suele emplear un esfuerzo de contacto σ_b que se supone uniformemente distribuido sobre el área ed de la proyección del orificio sobre un plano normal a la dirección de la fuerza. Por tanto, la carga de ruptura o de falla por presión de contacto queda expresada por:

$$P_b = a_b\sigma = (ed)\sigma_b \qquad \textbf{(12-4)}$$

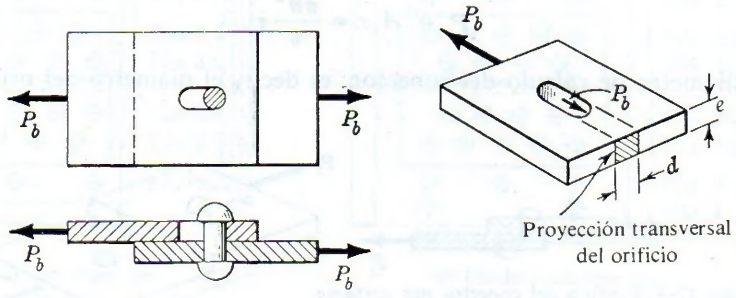
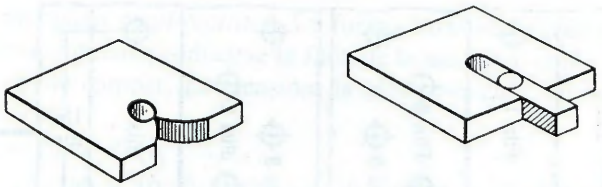


Figura 12-5. Deformación (exagerada) de un orificio debido a la presión de contacto. $P_b = A_b\sigma_b = (ed)\sigma_b$.



(a) Desgarramiento (b) Cortadura detrás del remache

Figura 12-6. Formas posibles de fallas de la unión si los orificios están demasiado cerca del borde de las placas.

Existen otros tipos o formas de ruptura, que no deben presentarse en una unión bien diseñada. Cabe citar la ruptura por desgarramiento de los bordes de la placa por detrás del orificio, y la ruptura por cortante de la placa por el mismo sitio, como indica la figura 12-6a y b, o una combinación de ambas. Estas formas de ruptura son poco probables si la distancia del centro del orificio al borde de las placas es igual o superior a 1.75 a 2 veces el diámetro. En todos los problemas de este capítulo se supone que esta condición se cumple, por lo que no hay que preocuparse por este tipo de falla de la junta.

12-4. RESISTENCIA DE UNA UNIÓN MÚLTIPLE, A TOPE

La resistencia de una unión de este tipo está limitada por la capacidad de resistencia de los conectores para transmitir la carga entre las placas o por la resistencia al desgarramiento por tensión de las placas. Naturalmente que la menor de todas ellas será la capacidad de carga de la unión. El diseño se realiza en dos fases: 1) Cálculos previos para determinar la carga que puede transmitir un conector, por cortante y por presión de contacto, y 2) cálculos para determinar las posibles formas de falla de la unión. En el ejemplo que sigue se ve el procedimiento a seguir y la forma de razonar.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1201. La figura 12-7 representa una unión remachada triple a tope, de presión, en la que la longitud del tramo tipo es de 180 mm. El diámetro de los orificios es $d = 20.5$ mm. El espesor de las placas por unir es de 14 mm, y el de cada cubrejunta es de 10 mm. Los esfuerzos de ruptura por cortante, al aplastamiento y a tensión son, respectivamente, $\tau = 300$ MPa, $\sigma_b = 650$ MPa, y $\sigma_t = 400$ MPa. Utilizando un coeficiente de seguridad de 5, determinar la resistencia de la unión en la longitud del tramo tipo, la eficacia y la máxima presión interior que puede soportar una caldera de 1.50 m de diámetro en la que este tipo de unión es la longitudinal.

Solución: La aplicación en el cálculo de los esfuerzos últimos determina la carga de ruptura que dividida entre el coeficiente de seguridad da la carga de trabajo. Es preferible aplicar directamente al cálculo los esfuerzos admisibles, con lo que además de determinar la carga de trabajo se tiene la ventaja de trabajar con cifras pequeñas. Así, pues, dividiendo los esfuerzos de ruptura dados por el coeficiente de seguridad 5 resultan como esfuerzos admisibles $\tau = 60$ MPa, $\sigma_b = 130$ MPa, y $\sigma_t = 80$ MPa.

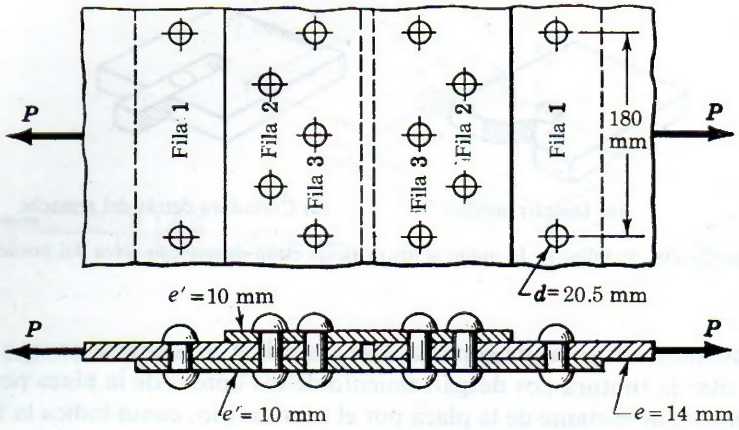


Figura 12-7.

Cálculos previos: En un remache a cortante simple:

$$P_s = \frac{\pi d^2}{4}\tau = \frac{\pi}{4}(20.5 \times 10^{-3})^2(60 \times 10^6) = 19.8 \text{ kN}$$

En un remache a cortante doble:

$$P_s = 2 \times 19.8 = 39.6 \text{ kN}$$

En un remache, por presión de contacto contra las placas principales:

$$P_b = (ed)\sigma_b = (14 \times 10^{-3})(20.5 \times 10^{-3})(130 \times 10^6) = 37.3 \text{ kN}$$

En un remache por presión de contacto contra los cubrejuntas:

$$P'_b = (e'd)\sigma_b = (10 \times 10^{-3})(20.5 \times 10^{-3})(130 \times 10^6) = 26.7 \text{ kN}$$

Posibles formas de falla de la unión: Generalmente sólo hay dos formas posibles de ruptura, determinadas por (*a*) la capacidad de los conectores para transmitir la carga y por (*b*) la resistencia al desgarramiento, por tensión, de las placas.

(*a*) *Capacidad de los remaches.* La resistencia del único conector de la fila 1 dentro de la sección tipo será la menor de las cargas que puede soportar por cortante simple, por aplastamiento contra la plancha principal, o por aplastamiento contra un cubrejunta y, de acuerdo con los cálculos previos, es la primera de ellas, o sea 19.8 kN.

La resistencia de cada uno de los remaches (dos) de la fila 2 será el menor de los valores obtenidos por doble cortante, aplastamiento contra la placa principal o contra dos cubrejuntas. En el caso presente es el aplastamiento contra la placa principal que, de acuerdo con los cálculos previos, es de 37.3 kN por conector, o bien, 74.6 kN para los dos remaches.

Cada uno de los conectores de la fila 3 transmite la carga, entre la placa principal y los cubrejuntas, como los de la fila 2, por lo que la resistencia de los dos conectores de la tercera fila también es de 74.6 kN.

La capacidad total de carga de los remaches de todas las filas es:

$$P_r = 19.8 + 74.6 + 74.6 = 169.0 \text{ kN} \qquad (a)$$

(*b*) *Capacidad de placas y cubrejuntas.* La fuerza exterior aplicada actúa directamente sobre la fila 1, por lo que puede producirse la falla de la unión tal como aparece en la figura 12-4. La carga que puede romper, por tensión, la placa principal en esta fila 1 viene dada por:

$$\begin{aligned} P_1 &= (L - d)e\sigma_t \\ &= [(180 \times 10^{-3}) - (20.5 \times 10^{-3})](14 \times 10^{-3})(80 \times 10^6) \\ &= 178.6 \text{ kN} \end{aligned} \qquad (b)$$

La fuerza exterior aplicada no actúa en su totalidad sobre la sección neta de la placa principal en la fila 2, ya que parte de esta carga es absorbida por el remache de la fila 1 y transmitida al cubrejunta. Por tanto, si la placa principal puede desgarrarse por tensión en la fila 2 la carga exterior será la suma de la resistencia al desgarre en ella, más la carga transmitida por el remache de la fila 1 al cubrejunta. En la figura 12-8 se representa el diagrama de cuerpo libre correspondiente, y en la figura 12-9 se observa cómo se produciría la falla o ruptura de la unión.

La carga transmitida por el remache de la fila 1 al cubrejunta es el valor de su resistencia al cortante simple de 19.8 kN. La carga exterior que puede producir la falla en esta forma es:

$$\begin{aligned} P_2 &= (L - 2d)e\sigma_t + \text{resistencia del remache de la fila 1} \\ &= [(180 \times 10^{-3}) - 2(20.5 \times 10^{-3})](14 \times 10^{-3})(80 \times 10^6) \\ &\quad + (19.8 \times 10^3) \\ &= (155.7 \times 10^3) + (19.8 \times 10^3) = 175.5 \text{ kN} \end{aligned} \qquad (c)$$

Por las mismas razones, la carga exterior necesaria para romper por tensión la placa principal en la fila 3, debe incluir la resistencia (o carga transmitida a los cubrejuntas) de los

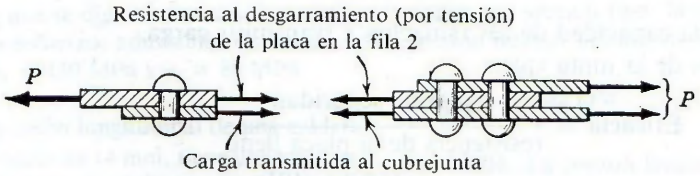


Figura 12-8.

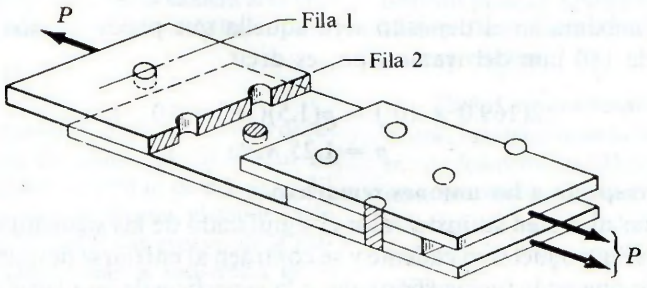


Figura 12-9. Falla de la unión por cortante del remache de la fila 1 y por tensión en la sección de la placa por la fila 2.

remaches de las filas 1 y 2, es decir:

$$P_3 = [(180 \times 10^{-3}) - 2(20.5 \times 10^{-3})](14 \times 10^{-3})(80 \times 10^6) + (19.8 \times 10^3) + (74.6 \times 10^3) = 250.1 \text{ kN} \qquad (d)$$

Evidentemente este cálculo no era necesario, ya que como la resistencia a la tensión de la placa era la misma que en la fila 2, este valor tenía que ser mayor que el de la expresión anterior. Ahora bien, si en la fila 3 hubiera más remaches que en la fila 2, el procedimiento de cálculo sería éste y por ello se ha incluido.

En la fila 3 la falla puede producirse también por ruptura a tensión de los *cubrejuntas*, que estará impedida por la resistencia de éstos a la tensión, figura 12-8, en esta fila. La resistencia a la tensión de un cubrejunta en esta fila viene dada por:

$$P_c = [(180 \times 10^{-3}) - 2(20.5 \times 10^{-3})](10 \times 10^{-3})(80 \times 10^6) = 111.2 \text{ kN}$$

En una unión normal a tope, la capacidad resistente de los dos cubrejuntas sería el doble de este valor, pero en este tipo de junta a presión con cubrejunta más estrecho, la capacidad de carga de éste debe compararse con la carga que pueden transmitirle los remaches. En este ejemplo, el cubrejunta superior transmite la carga de cuatro remaches a cortante simple, es decir, $4 \times 19.8 = 79.2$ kN, que es menor que su capacidad resistente a tensión, de 111.2 kN por lo que la capacidad de carga de ambos cubrejuntas es:

$$P_c = 79.2 + 111.2 = 190.4 \text{ kN} \qquad (e)$$

determinada por el cortante en remaches de la placa superior y por tensión en la fila 3 de la placa inferior. La carga de trabajo o de seguridad es la menor de todas las calculadas, P_r, P_1, P_2, P_3, y P_c; en el ejemplo es P_r y, por tanto,

$$P = 169.0 \text{ kN}$$

determinada por la capacidad de los remaches a transmitir carga.

La eficacia es de la junta vale:

$$\text{Eficacia} = \frac{\text{carga de seguridad}}{\text{resistencia de la placa llena}} = \frac{169.0 \times 10^3}{(180 \times 10^{-3})(14 \times 10^{-3})(80 \times 10^6)} \times 100 = 83.8\% \qquad \textbf{Resp.}$$

La presión interior máxima en el depósito será aquella que produzca una carga de 169.0 kN en la longitud de 180 mm del tramo tipo, es decir,

$$[2P = pDL] \qquad 2(169.0 \times 10^3) = p(1.5)(180 \times 10^{-3})$$

$$p = 1.25 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

Observaciones respecto a las uniones remachadas

Se puede apreciar ahora en su justo valor el significado de las siguientes observaciones. Como los remaches se introducen en caliente y se contraen al enfriarse después, aprietan a las placas entre sí, por lo que estas fuerzas normales a la superficie de las placas originan una resistencia por rozamiento que se opone a cualquier movimiento relativo entre ellas. Así, pues,

habrá que vencer esta resistencia de rozamiento antes de que los remaches empiecen a trabajar, por cortante o por presión de contacto. Esto proporciona un mayor margen de seguridad en la resistencia de la junta, pero como es muy difícil determinar con precisión esta resistencia por rozamiento, no se tiene en cuenta al calcular la resistencia de una unión remachada.

Se supone, además, que al introducir cada remache se llena por completo el orificio. Solamente si esto ocurre todos los remaches transmiten simultáneamente la carga. Si algunos de ellos sólo llenan parcialmente los orificios, no empezarán a apoyarse contra sus paredes hasta que haya habido una cierta deformación en los restantes remaches, en las placas o en ambos.

También se ha supuesto que los remaches no se deforman, sino que son rígidos y permanecen rectos. Esto sería posible si las deformaciones elásticas de las placas principales y las de los cubrejuntas fueran iguales entre cada dos filas adyacentes de remaches. En el ejemplo anteriormente desarrollado se deduce que entre las filas 1 y 2 la placa principal soporta una carga mucho mayor que el cubrejuntas, por lo que las deformaciones elásticas no serán iguales, ni lo serían aunque se redujese al mínimo posible el espesor de cubrejuntas. Sin embargo, como las placas suelen ser de material dúctil, las deformaciones plásticas sí pueden ser iguales cuando los esfuerzos se aproximan al punto de cedencia*.

Debido a estas y otras causas no se puede hacer un análisis exacto de lo que ocurre realmente en una junta remachada. El procedimiento expuesto para las uniones a presión, y el que se cita más adelante para uniones resistentes en estructuras, aunque no exacto, proporciona valores aceptables en la práctica mediante cálculos relativamente sencillos.

Por ello, y por el perjudicial efecto de la concentración de esfuerzos, es por lo que suelen considerarse coeficientes de seguridad bastante elevados, 4 a 6, al fijar los esfuerzos admisibles, o las cargas de trabajo.

PROBLEMAS

A menos que se diga lo contrario, se considerarán como esfuerzos admisibles los valores $\tau = 60$ MPa, $\sigma_b = 130$ MPa y $\sigma_t = 80$ MPa.

1202. La unión longitudinal de una caldera cilíndrica, de placa de 14 mm, tiene una resistencia de 350 kN en la longitud de 400 mm. La eficacia de las uniones circunferenciales es del 45% y el esfuerzo admisible a tensión es de 80 MPa. Determinar el máximo diámetro de la caldera si la presión interior de trabajo es de 1.4 MPa.

Resp. $D = 1.25$ m

1203. Una unión por solape de dos filas de remaches constituye la unión circunferencial de una caldera cilíndrica de 1.50 m de diámetro. El paso de los remaches es de 80 mm, el diámetro de los orificios es de 17.5 mm y el espesor de la placa, de 12 mm. Determinar la resistencia de la unión por sección tipo, la eficacia y la máxima presión interior admisible.

Resp. $p = 962$ kPa

1204. La costura longitudinal de una caldera es una unión por solape de 3 filas de remaches, con el paso de la filas extremas igual a 140 mm y, el de la intermedia de 70 mm. El diámetro de los orificios es de 23.5 mm y el espesor de la placa, de 12 mm. Determinar la resistencia de la sección tipo y su eficacia.

1205. Las características de una unión doble a tope, tal como la de la figura 12-2b son: diámetro de los orificios, 23.5 mm; paso mayor, 140 mm; paso menor, 70 mm; espesor de las placas principales, 14 mm, y de los cubrejuntas, 10 mm. Calcular la resistencia del tramo tipo y su eficacia.

* Otros ejemplos de la acción inelástica se describen en el Capítulo 14.

1206. Una unión remachada doble a tope, a presión, en la que el cubrejunta superior abarca únicamente las filas interiores de remaches, mientras que el inferior abarca todas, tiene las siguientes características: diámetro de los orificios, 23.5 mm; espesor de las placas principales, 14 mm; espesor de los cubrejuntas, 10 mm. Paso menor, 70 mm y paso mayor, 140 mm. Determinar la resistencia del tramo tipo y la eficacia de la unión.

Resp. $P = 111.6$ kN; 71.2% de eficacia

1207. Si los cubrejuntas del problema anterior fueran de 8 mm, determinar la forma de ruptura y la eficacia de la unión.

1208. En una unión remachada a tope, de dos filas y de tipo a presión, en la que el cubrejunta superior abarca sólo a las filas interiores y el inferior a todas, el espesor de la placa es de 14 mm, el del cubrejunta superior es de 6 mm y el del inferior, de 10 mm. El diámetro de los orificios es de 20.5 mm, el paso mayor es de 100 mm y el menor, de 50 mm. Calcular la resistencia del tramo tipo.

Resp. $P = 75.5$ kN

1209. Una unión remachada triple a tope, como la representada en la figura 12-2c, tiene un paso mayor de 200 mm y un paso menor de 100 mm. El diámetro de los orificios es de 26.5 mm; el espesor de las placas principales, de 16 mm y el de los cubrejuntas, de 12 mm. Hallar la resistencia de la sección tipo y su eficacia.

Resp. Eficacia = 86.4%

1210. Una unión cuádruple a tope, análoga a la representada en la figura 12-2d, tiene un paso mayor de 350 mm. El diámetro de los orificios es de 20.5 mm; el espesor de las placas principales, de 10 mm, y el cubrejunta, de 8 mm. Calcular la resistencia del tramo tipo y la eficacia de la unión.

1211. Una unión cuádruple a tope, como la representada en la figura 12-2d, tiene un paso mayor de 430 mm; el diámetro de los orificios es de 32.5 mm y el espesor de las placas principales, de 20 mm. El espesor de cada cubrejunta es de 14 mm. Calcular la resistencia del tramo tipo, con un coeficiente de seguridad de 4, en función de los esfuerzos de ruptura, $\tau = 300$ MPa, a cortante simple, y de 520 MPa a cortante doble; $\sigma_b = 660$ MPa y $\sigma_t = 400$ MPa. Si esta unión es la longitudinal de una caldera cilíndrica que soporta una presión interior de 1.8 MPa y las uniones circunferenciales tienen una eficacia de 50%. ¿Cuál será el máximo diámetro admisible?

Resp. $D = 2.03$ m

12-5 ESFUERZOS EN UNIONES CONECTADAS

A veces es necesario investigar una junta y determinar los esfuerzos producidos por una carga dada. La hipótesis que suele hacerse es la que cada conector soporta una carga proporcional a su área resistente a cortante. En estas condiciones, las fuerzas de tensión que actúan en una fila interior de conectores se obtienen restando a la carga total la carga absorbida por cortante y transmitida a los cubrejuntas por las filas interiores de conectores.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1212. Sobre el tramo tipo de una unión remachada triple a tope actúa una carga de 144 kN, como se indica en la figura 12-10. La longitud del tramo es de 200 mm, el diámetro de los orificios es de 23.5 mm, el espesor de las placas principales es de 14 mm y el de los cubrejuntas de 10 mm. Determinar los esfuerzos cortantes, de contacto y de tensión, desarrollados en la unión.

Solución: El área resistente a cortante es la de un remache a simple cortante y la de cuatro a doble cortante, lo que da un total de 9 tramos. La carga media transmitida por uno de

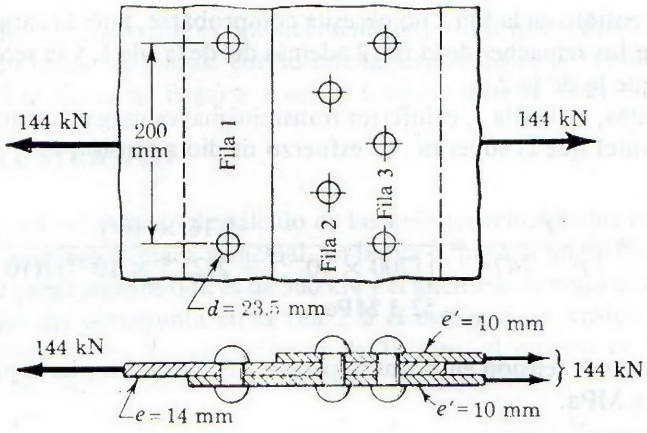


Figura 12-10.

estos tramos es $\frac{1}{9}$ de 144 kN, es decir, 16.0 kN. El esfuerzo cortante medio es:

$$\tau = \frac{P_s}{\pi d^2/4} = \frac{16.0 \times 10^3}{\pi(23.5 \times 10^{-3})^2/4} = 36.9 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

Dibujando diagramas de cuerpo libre para cada uno de los remaches de las filas 2 y 3, donde trabajan a cortante doble, se observa que la fuerza de contacto con la placa principal es de 32.0 kN y contra los cubrejuntas, de 16.0 kN. Como el espesor total de los dos cubrejuntas es mayor que el de la placa principal, la presión de contacto máxima tiene lugar en ésta, y viene dada por:

$$\sigma_b = \frac{P_b}{ed} = \frac{32.0 \times 10^3}{(14 \times 10^{-3})(23.5 \times 10^{-3})} = 97.3 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

El esfuerzo de tensión en la placa principal, en la fila 1, está producido por la carga total que actúa sobre la sección neta de la placa:

$$\sigma_t = \frac{P_1}{(p-d)e} = \frac{144 \times 10^3}{[(200 \times 10^{-3}) - (23.5 \times 10^{-3})](14 \times 10^{-3})}$$
$$= 58.3 \text{ MPa}$$

Sobre la sección neta de la placa principal, en la fila 2, actúa la carga total, reducida en la transmitida por el remache a cortante simple de la fila 1. En estas condiciones, el esfuerzo de tensión en esta fila 2 es:

$$\sigma_t = \frac{P_2}{(p-2d)e'} = \frac{(144 - 16) \times 10^3}{[(200 \times 10^{-3}) - 2(23.5 \times 10^{-3})](14 \times 10^{-3})}$$
$$= 59.8 \text{ MPa}$$

El esfuerzo de tensión, en la fila 3 no necesita comprobarse, pues la carga total se reduce en la transmitida por los remaches de la fila 2 además del de la fila 1, y la sección neta en esta fila 3 es la misma que la de la 2.

En los cubrejuntas, en la fila 3, el inferior transmite mayor carga (la transmitida por cinco secciones a cortante) que el superior. El esfuerzo medio a tensión es:

$$\sigma_t = \frac{P}{(p - 2d)e'} = \frac{5(16 \times 10^3)}{[(200 \times 10^{-3}) - 2(23.5 \times 10^{-3})](10 \times 10^{-3})}$$
$$= 52.3 \text{ MPa}$$

El mayor esfuerzo de tensión en la unión tiene lugar, por tanto, en la placa principal en la fila 2 y es de 59.8 MPa.

PROBLEMAS

Calcular el esfuerzo cortante máximo, la presión de contacto y el esfuerzo de tensión desarrollado en las siguientes uniones remachadas bajo la acción de las cargas indicadas.

1213. Unión doble, a traslape, del problema 1203. Carga = 350 kN por metro de longitud.

1214. Unión a tope del problema 1205. Carga = 700 kN por metro de longitud.

Resp. $\tau = 37.7$ MPa;
$\sigma_b = 99.3$ MPa;
$\sigma_t = 60.1$ MPa

1215. Unión triple del problema 1204. Carga del tramo tipo = 90 kN.

1216. Unión doble, a tope, del problema 1206. Carga del tramo tipo = 90 kN.

Resp. $\tau = 41.5$ MN/m^2;
$\sigma_b = 109$ MN/m^2; $\sigma_t = 58.1$ MN/m^2

1217. Unión triple, a tope, del problema 1209. Carga del tramo tipo = 200 kN.

1218. Unión cuádruple, a tope, del problema 1210. Carga del tramo tipo = 220 kN.

12-6. UNIONES CONECTADAS EN LAS ESTRUCTURAS

Las uniones conectadas en las estructuras, o uniones de soporte, difieren en varios aspectos de las estudiadas para depósitos a presión. Las diferencias más importantes son las siguientes: (1) Se calcula la unión completa ya que, en general, no hay grupos de conectores que se repitan, o sea tramo tipo. (2) Los cubrejuntas suelen ser de la misma longitud en las dos caras, pues la unión no es preciso que sea a presión y no hay que sellarla. (3) Se supone que cada conector transmite su parte proporcional de la carga aplicada. (4) El diámetro de los orificios se hace algo mayor que en las uniones a presión, 3 mm más que el diámetro del conector.

Para que sea cierta la hipótesis de (3) es necesario que la carga aplicada pase por el centro de gravedad del grupo de conectores (véase Sec. 1-3). En la siguiente sección se estudia el efecto de una carga excéntrica. La condición (4) viene determinada porque las piezas por coser se punzonan por separado, y se da a los orificios una holgura mayor para compensar los pequeños errores de centrado y los defectos en los bordes, tales como rebabas, resaltes, etc. Para el cálculo de los esfuerzos cortantes y de la presión de contacto se considera el

diámetro del conector, dado que es prácticamente imposible que todos los orificios coincidan perfectamente en todas las placas, con lo que la sección recta del remache, aunque llenara por completo el orificio, no llegaría a ser la total de uno de ellos.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1219. Aplicando el método de cálculo de las uniones remachadas estructurales, calcular el esfuerzo de tensión en la placa principal, en la fila 3, para la unión cuádruple a tope, de la figura 12-11. La carga transmitida es de 360 kN y el ancho de la placa es de 250 mm. Calcular también el ancho del cubrejunta en la fila 2 si el esfuerzo de tensión no debe exceder de 100 MPa. El diámetro de los remaches es de 19 mm, el espesor de las placas a unir es de 14 mm y el de cada cubrejunta, de 8 mm.

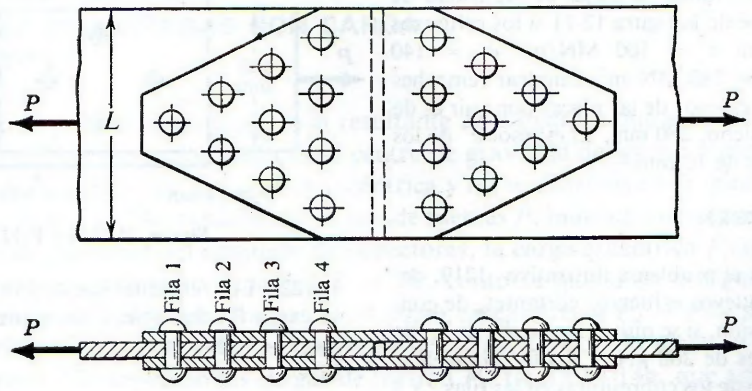


Figura 12-11.

Solución: La figura 12-11 presenta la unión completa. No hay grupos repetidos de remaches, como ocurre en la unión de una caldera. Existen 10 remaches iguales para soportar la carga total, por lo que cada uno transmite 1/10 de la misma. Como el remache de la fila 1 transmite 1/10 a los cubrejuntas, y los dos remaches de la fila 2 transmiten 2/10, la parte de carga, a la izquierda de la fila 3, que soporta la placa principal, es de 7/10 del total, como se indica en el diagrama de cuerpo libre de la figura 12-12. Por tanto, para el esfuerzo de tensión en la fila 3, en la placa principal, en la que la sección ha quedado disminuida por tres orificios (obsérvese que el diámetro de los orificios debe ser de 19 + 3 = 22 mm) se tiene:

$$[P = A\sigma = (L - 3d)e\sigma_t]$$

$$\tfrac{7}{10}(360 \times 10^3) = [(250 \times 10^{-3}) - 3(22 \times 10^{-3})](14 \times 10^{-3})\sigma_t$$

$$\sigma_t = 97.8 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

La figura 12-12 indica también que los cubrejuntas, en la fila 2, están sometidos a 3/10 de la carga total, entre los dos. Por tanto, el ancho necesario para que el esfuerzo desarrollado no sobrepase el valor de 100 MPa es:

$$[P = A\sigma = (L - 2d)(2e')\sigma_t]$$

$$\tfrac{3}{10}(360 \times 10^3) = [L - 2(22 \times 10^{-3})][2(8 \times 10^{-3})](100 \times 10^6)$$

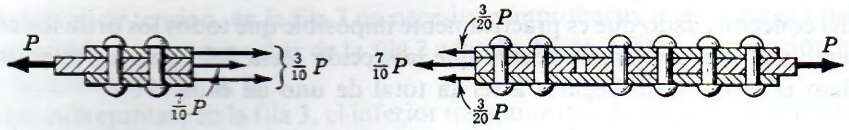


Figura 12-12. Diagrama de cuerpo libre al cortar el conjunto entre las filas 2 y 3.

de donde

$$L = 0.112 \text{ m} = 112 \text{ mm}$$ **Resp.**

PROBLEMAS

1220. Determinar la carga de seguridad de la unión a tope de la figura 12-11 si los esfuerzos admisibles son $\tau = 100$ MN/m^2 $\sigma_t = 140$ MN/m^2 y $\sigma_b = 280$ MN/m^2. Emplear remaches de 19 mm. El espesor de las placas por unir es de 14 mm y su ancho, 280 mm. El espesor e' de los cubrejuntas es de 10 mm.

Resp. $P = 506$ kN

1221. En el problema ilustrativo 1219, determinar los nuevos esfuerzos cortantes, de contacto y de tensión, si se quita el remache de la fila 1 y la carga es de 260 kN. Calcular también el ancho mínimo de los cubrejuntas en las filas 2 y 3 si el esfuerzo de tensión está limitado a 100 MPa.

1222. Si no existiera la fila 4 en la figura 12-11, calcular la carga de seguridad y la eficacia de la junta con los esfuerzos admisibles siguientes: $\tau = 90$ MPa; $\sigma_t = 120$ MPa; y $\sigma_c = 190$ MPa. Los remaches son de 25 mm, $L = 230$ mm, $e = 14$ mm y $e' = 10$ mm.

1223. Se unen dos placas mediante cuatro remaches, por solape, como se indica en la figura

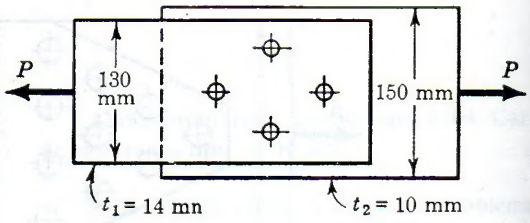


Figura P-1223 y P-1224.

P-1223. Los remaches son de 25 mm. Determinar la carga P admisible si los esfuerzos de trabajo son $\tau = 70$ MN/m^2, $\sigma_t = 100$ MN/m^2 y $\sigma_b = 140$ MN/m^2.

Resp. $P = 122$ kN

1224. Repetir el problema 1223 si los esfuerzos admisibles son $\tau = 100$ MN/m^2, $\sigma_t = 140$ MN/m^2 y $\sigma_b = 220$ MN/m^2.

1225. Determinar la carga de seguridad del empalme a solape en el tirante de la figura P-1225 si los remaches son de 19 mm y el espesor de las piezas por unir es de 8 mm. Los esfuerzos admi-

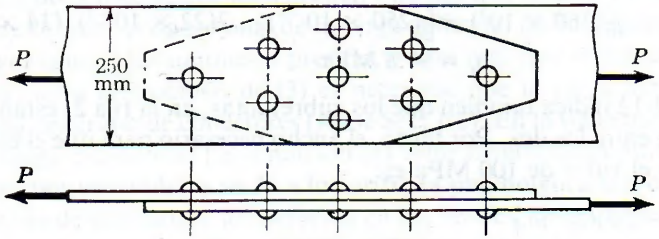


Figura P-1225 y P-1226.

sibles son: $\tau = 95$ MPa, $\sigma_t = 140$ MPa y $\sigma_b = 220$ MPa.

Resp. $P = 242$ kN

1226. Repetir el problema 1225 si los esfuerzos admisibles son los mismos, los remaches, de 22 mm y las placas por unir, de 10 mm.

1227. Dos placas de 250 mm de ancho y 20 mm de espesor se empalman mediante una unión a tope, con dos cubrejuntas, mediante remaches de 22 mm de diámetro. La carga axial de tensión es de 400 kN. Si los esfuerzos admisibles son $\tau = 70$ MPa, $\sigma_t = 100$ MPa y $\sigma_b = 130$ MPa, determinar (a) el menor número de remaches; (b) el mínimo número de filas y la mejor distribución de los conectores en cada fila; (c) el mismo espesor en cada cubrejunta, de acuerdo con la distribución del apartado (b).

Resp. (c) $e = 10.4$ mm

1228. Resolver el problema 1227 con remaches de 19 mm y esfuerzos admisibles de $\tau = 110$ MPa, $\sigma_t = 140$ MPa y $\sigma_b = 220$ MPa.

12-7. UNIONES CONECTADAS CON CARGA EXCÉNTRICA

A veces no es posible conseguir que la resultante de las cargas que actúan, o que ha de transmitir una unión conectada, pase por el centro de gravedad del grupo o conjunto de remaches. En estas condiciones, la carga es excéntrica y no se distribuye por igual entre todos los conectores, figura 12-13a. Añadiendo un par de fuerzas P, indicadas con trazos en la figura en el centro de gravedad del conjunto de conectores, la carga excéntrica P equivale a una carga central P y un momento torsional $T = Pe$, como se indica en la figura 12-13b.

La carga central P es soportada por igual como carga directa $P_d = P/n$ por cada uno de los conectores, como se indica en el diagrama de cuerpo libre de la placa en la figura 12-14a. Al momento T lo soportan las cargas de torsión P_t, figura 12-14b, que actúan perpendicularmente al radio ρ trazado desde el centro de gravedad del grupo de conectores, y son directamente proporcionales a estos radios ρ*. Para determinar la carga de torsión en cada conector, se puede considerar la conexión como un acoplamiento de discos con tres círculos concéntricos (en este caso) de conectores y aplicar el método desarrollado en la sección 3-3. La carga resultante en cada conector es el vector suma geométrica de las cargas directas y de torsión, como se indica en la figura 12-14c.

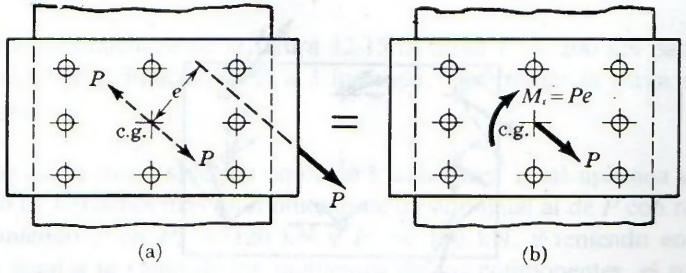


Figura 12-13. Unión conectada con carga excéntrica.

* **N. de T.** Si todos los conectores son del mismo diámetro, como se dijo en la nota de la sección 3-3.

Otro procedimiento para determinar la carga de torsión de cada conector es aplicar la fórmula $\tau = T\rho/J$. En esta expresión τ representa el esfuerzo cortante medio en un conector, ρ es la distancia radial desde el centro de gravedad del grupo al centro del conector considerado y el valor de J se puede calcular aproximadamente por

$$J = \Sigma A\rho^2 \qquad (a)$$

Si todos los conectores tienen la misma sección, como ρ se puede expresar en función de las coordenadas x y y del centro del conector, ya que $\rho^2 = x^2 + y^2$ (Fig. 12-14b), la ecuación (a) se escribe en la forma

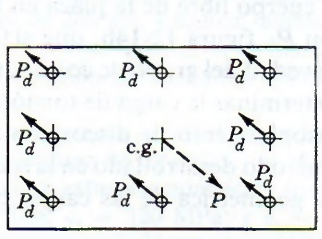
$$J = A(\Sigma x^2 + \Sigma y^2) \qquad (b)$$

por lo que la fórmula de la torsión se transforma en

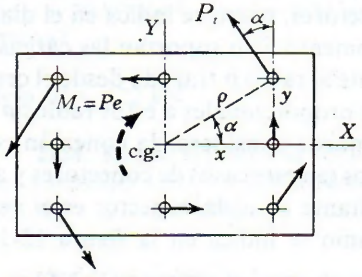
$$\tau = \frac{T\rho}{A(\Sigma x^2 + \Sigma y^2)} \qquad (c)$$

Pasando A al primer miembro, $A\tau$ es la carga P_t del remache, con lo que se obtiene:

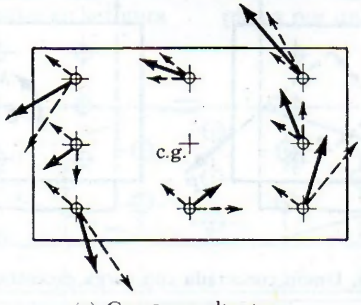
$$P_t = \frac{T\rho}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2} \qquad (12\text{–}5)$$



(a) Cargas directas iguales



(b) Distribución de las cargas de momento



(c) Cargas resultantes

Figura 12-14. Estudio de las uniones conectadas y con carga excéntrica.

La carga resultante en un conector dado se obtiene como vector suma de P_d y P_t (Fig. 12-14c). Esta resultante se calcula fácilmente en función de las componentes de P_d y P_t según los ejes X y Y. Las componentes P_{dx} y P_{dy} de la carga directa son constantes para todos los conectores. Las componentes de P_t, según la figura 12-14b, en donde se observa que el ángulo entre ρ y el eje X es igual al ángulo formado entre P_t t el eje Y, son:

$$P_{t_x} = P_t \operatorname{sen} \alpha = P_t \frac{y}{\rho}$$

y

$$P_{t_y} = P_t \cos \alpha = P_t \frac{x}{\rho}$$

ya que $\operatorname{sen} \alpha = y/\rho$ y $\cos \alpha = x/\rho$. Sustituyendo P_t en estas expresiones por su valor, de la ecuación (12-5) resulta:

$$\left.\begin{aligned} P_{t_x} &= \frac{T}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\, y \\ P_{t_y} &= \frac{T}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\, x \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}6)$$

siendo x y y las coordenadas de cada conector respecto de un sistema de ejes con origen en el centro de gravedad del grupo de conectores.

La carga máxima tiene lugar en el conector en que P_{dx} y el máximo P_{tx} sean del mismo signo, así como P_{dy} y el máximo P_{ty} como ocurre en la esquina superior derecha del ejemplo, y la carga resultante viene dada por:

$$P_r = \sqrt{(P_{d_x} + P_{t_x})^2 + (P_{d_y} + P_{t_y})^2} \qquad (12\text{-}7)$$

En el ejemplo resuelto a continuación se tiene la oportunidad de aplicar todas estas ecuaciones.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1229. En la unión remachada de la figura 12-15 la carga $P = 200$ kN pasa por el centro del remache C y tiene la inclinación de 4 a 3 indicada. Determinar la carga resultante en el remache más cargado.

Solución: El efecto de la carga aplicada equivale a una carga igual aplicada en el centro de gravedad del grupo de remaches más un momento de torsión igual al de P con respecto a dicho centro. Descomponiendo P en $P_x = 120$ kN y $P_y = 160$ kN, y teniendo en cuenta que el momento de P es igual a la suma de los momentos de sus componentes, el momento torsor será:

$$T = (160 \times 10^3)(120 \times 10^{-3}) = 19.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

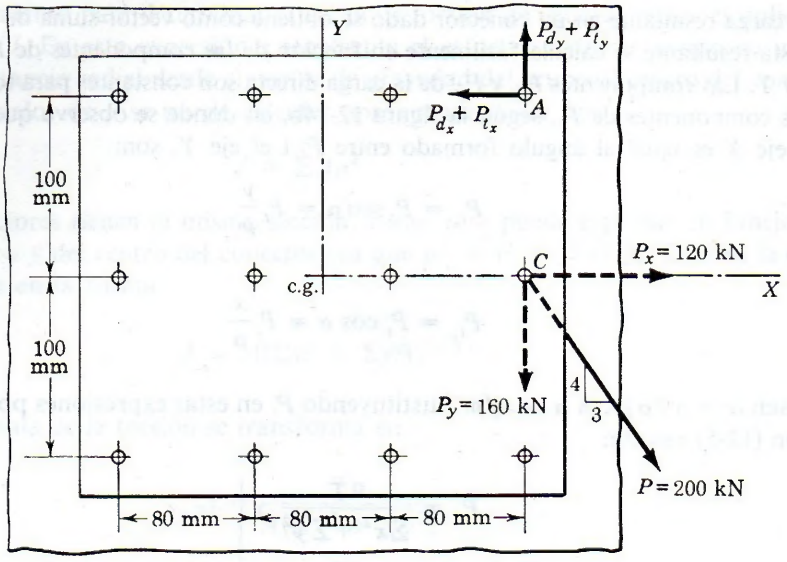


Figura 12-15.

Antes de aplicar la ecuación (12-6) calculemos el valor de Σx^2 y de Σy^2. Existen 6 remaches de abscisa ± 40 mm, y otros 6 de abscisa ± 120 mm. Hay 8 remaches de ordenada $y = \pm 100$ mm, y 4 de ordenada nula. Por tanto:

$$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 = \left[6(40)^2 + 6(120)^2\right] + 8(100)^2$$
$$= 0.176 \times 10^6 \text{ mm}^2 = 0.176 \text{ m}^2$$

Según la ecuación (12-6), las componentes máximas de la carga de torsión son:

$$\left[P_{t_x} = \frac{T}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2} \cdot y\right] \qquad P_{t_x} = \frac{19.2 \times 10^3}{0.176}(100 \times 10^{-3})$$
$$= 10.9 \text{ kN}$$

$$\left[P_{t_y} = \frac{T}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2} \cdot x\right] \qquad P_{t_y} = \frac{19.2 \times 10^3}{0.176}(120 \times 10^{-3})$$
$$= 13.1 \text{ kN}$$

Las componentes x y y de la carga directa en cada remache se obtienen dividiendo las componentes x y y de la carga aplicada entre el número de remaches. Por tanto:

$$P_{d_x} = \frac{P_x}{n} = \frac{120 \times 10^3}{12} = 10.0 \text{ kN}$$

y

$$P_{d_y} = \frac{P_y}{n} = \frac{160 \times 10^3}{12} = 13.3 \text{ kN}$$

El remache más cargado es el A, en el que se suman las componentes máximas de la carga torsional con las uniformes de la carga directa. Aplicando la ecuación (12-7) tenemos, como carga resultante,

$$P_r = \sqrt{(P_{d_x} + P_{t_x})^2 + (P_{d_y} + P_{t_y})^2}$$
$$= \sqrt{(10.0 + 10.9)^2 + (13.3 + 13.1)^2} = 33.7 \text{ kN} \quad \textbf{Resp.}$$

PROBLEMAS

1230. Calcular la carga resultante en el remache menos cargado del problema 1229.

1231. Una placa de unión o amarre se cose al borde de una placa fija mediante cuatro remaches de 22 mm, dispuestos como indica la figura P-1231 y se somete a la acción de la fuerza P. Determinar el máximo y mínimo esfuerzos cortantes en los remaches.

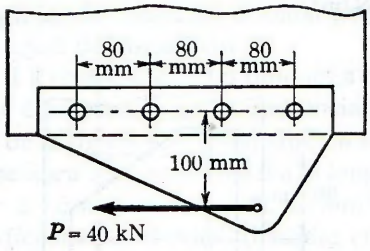


Figura P-1231.

Resp. $\tau_{máx} = 47.4$ MPa; $\tau_{mín} = 29.4$ MPa.

1232. En la unión con la placa de amarre a un bastidor, que representa la figura P-1232, cada remache tiene 300 mm² de sección. La carga de trabajo había sido calculada para que los remaches trabajaran con un esfuerzo cortante de 70 MPa. Calcular el esfuerzo cortante máximo si el remache A no se colocó bien y no transmite carga alguna.

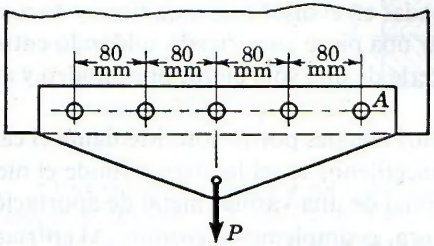
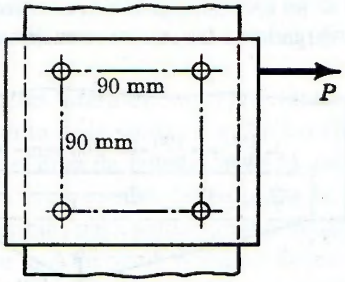


Figura P-1232.

1233. Si la carga máxima admisible en los remaches de la conexión representada en la figura P-1233 es de 15 kN, determinar el valor de seguridad de P.



Figuras P-1233 y P-1234.

Resp. $P = 37.9$ kN

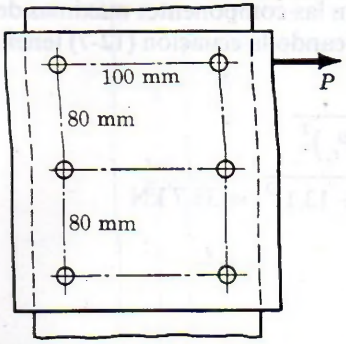
1234. Repetir el problema 1233 si el remache de la esquina superior izquierda ha sido mal colocado y no soporta carga alguna.

1235. En la unión remachada de la figura P-1235 se han empleado remaches de 22 mm de diámetro. Si $P = 90$ kN, hallar el espesor que debe tener la placa para que la presión de contacto no exceda de 140 MPa.

Resp. $t = 9.90$ mm

1236. En el problema 1235 anterior, determinar P de manera que la máxima carga por remache sea de 20 kN.

Resp. $P = 55.6$ kN



Figuras P-1235, P-1236, P-1237.

1237. Resolver el problema 1235 suponiendo que la carga P se sustituye por una de 90 kN que pasa por el centro del remache superior con pendiente de 75% hacia arriba a la derecha.

1238. En la conexión de la placa de amarre a un bastidor fijo que representa la figura P-1238, si $P = 60$ kN, calcular el esfuerzo cortante en el más cargado de los cuatro remaches de 22 mm.

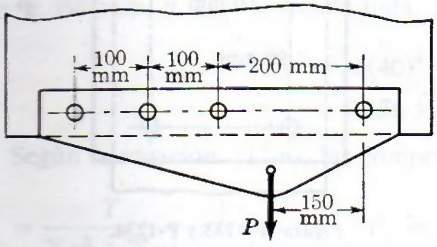


Figura P-1238.

Resp. $\tau = 70.0$ MN/m^2

1239. Dada la conexión que se muestra en la figura P-1239, determine el esfuerzo cortante en el más cargado de los tres remaches de 22 mm.

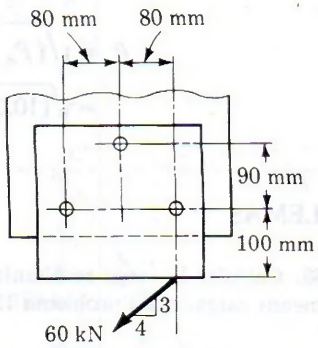


Figura P-1239.

Resp. $\tau = 159$ MPa

1240. Dada la conexión de la figura P-1240, calcular la carga admisible P si el esfuerzo cortante en los remaches de 25 mm está limitado a 140 MN/m^2.

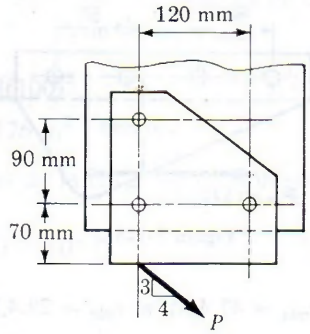
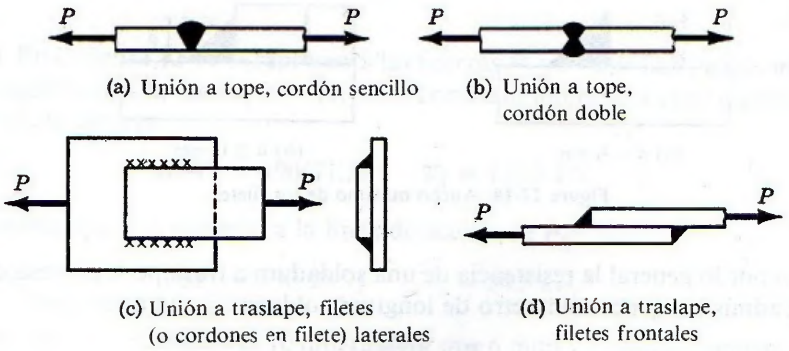


Figura P-1240.

12-8. UNIONES SOLDADAS

La confiabilidad de las uniones soldadas ha llegado a ser tal, que cada vez se emplean más para completar o sustituir a las uniones remachadas en el diseño de máquinas y estructuras. Por otra parte, suele ser más económico fabricar una pieza complicada soldando entre sí componentes sencillos (placas, barras, etc.) que hacerla de una sola pieza, por moldeo y acabado posterior.

La soldadura es un procedimiento de unión de los metales por fusión. Mediante el calor producido por un arco eléctrico o un soplete de oxiacetileno, se reblandece y funde el metal en los dos bordes a soldar, junto con el metal adicional de una varilla (metal de aportación) que recarga la junta formando el cordón de soldadura, o simplemente *cordón*. Al enfriarse, el metal de aportación y el metal base forman una unión continua y homogénea. Para prote-



(a) Unión a tope, cordón sencillo (b) Unión a tope, cordón doble

(c) Unión a traslape, filetes (o cordones en filete) laterales (d) Unión a traslape, filetes frontales

Figura 12-16. Tipos de uniones soldadas.

ger al metal fundido de la oxidación, se utilizan cada vez más *varillas o electrodos revestidos*. El revestimiento fundente, al entrar en caldeo, desprende un gas inerte que rodea la llama del soplete, o el arco eléctrico, y protege al metal fundido de la oxidación. Además, forma una escoria que sobrenada en el metal fundido mientras se enfría, impidiendo que se oxide o que se absorba el nitrógeno del aire. Esta técnica se llama *proceso de arco protegido.**

Los dos tipos principales de soldaduras o uniones soldadas son: a tope y a traslape (véase Fig. 12-16). La resistencia de una soldadura a tope es igual al esfuerzo admisible por el producto de la longitud del cordón por el espesor de la placa más delgada, ya que no es preciso que las dos planchas a soldar tengan el mismo espesor. El esfuerzo admisible se toma como aquél del metal base.

La resistencia de las uniones a traslape, tanto con filetes laterales como frontales, se supone determinada por la resistencia al cortante de la garganta de la soldadura. En los filetes a 45° de la figura 12-17, llamando a al ancho de las bases, el área de la sección de la garganta sometida a cortante es igual a la longitud L del cordón por el espesor de la garganta, es decir, $A = L \cdot a \operatorname{sen} 45° = 0.707L \cdot a \text{ mm}^2$. Los esfuerzos admisibles para soldaduras a traslape especificadas por el AISC (basadas en recomendaciones de la American Welding Society) dependen del electrodo empleado en el proceso de soldeo y de la gradación del acero soldado. Por ejemplo, si se usan electrodos E-70 para soldar acero A36 (una de las gradaciones más comunes de acero estructural usadas hoy en día), el esfuerzo cortante admisible es 145 MPa†. Para este caso, la resistencia de la soldadura a 45° es, en newtons,

$$P = \tau A = (145 \times 10^6)(0.707aL \times 10^{-6}) = 103\,aL$$

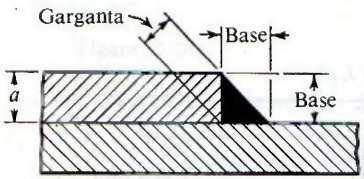
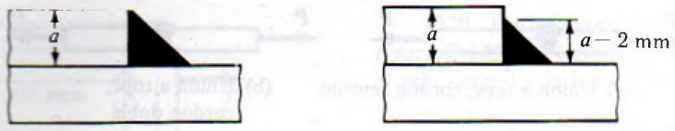


Figura 12-17.

* Una descripción completa del proceso de soldadura se tiene en tratados de diseño estructural. Ver, por ejemplo, B. Bressler, T. Y. Lin y J. B. Scalzi, *Design of Steel Structures*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 1968.

† Los valores de esfuerzo y longitud son conversiones SI aproximadas de las especificaciones del *Manual of Steel Construction*, American Institute of Steel Construction, Nueva York, 1973.



(a) $a < 6$ mm (b) $a \geq 6$ mm

Figura 12-18. Ancho máximo de los filetes.

Sin embargo, por lo general la resistencia de una soldadura a traslape se expresa en términos de la fuerza admisible q por milímetro de longitud soldada, y está dada por

$$q = \frac{P}{L} = 103a \qquad \text{N/mm}$$

donde, se recuerda, a está en milímetros.

Como regla, es necesario tomar precauciones especiales para asegurarse que la anchura de la base de una soldadura de filete a lo largo de un borde es realmente igual al espesor del borde. Una de las razones para esto es que los bordes de perfiles laminados están redondeados y la anchura de la base sería menor que el espesor nominal de la pieza. Otra razón es que, durante el soldeo, la esquina del borde puede fundirse con la soldadura, lo que reduciría la anchura de la base. Por estas razones, las especificaciones AISC requieren que el tamaño máximo de una soldadura de filete deba ser de 2 mm menos que el espesor del material a lo largo de bordes de 6 mm, o mayores de espesor. Para bordes de espesores menores, el tamaño máximo de la soldadura puede ser igual al espesor del borde. Estas especificaciones se ilustran en la figura 12-18. Los tamaños de soldadura pueden exceder estas especificaciones si el diseñador así lo estipula con el objeto de cubrir totalmente la garganta de la junta.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1241. Se ha de soldar un ángulo de 100 × 100 × 10 mm a una placa, como se indica en la figura 12-19. El ángulo soporta una carga de 190 kN aplicada axialmente por el centro de gravedad de la sección recta. (*a*) Determinar la longitud de los filetes laterales de soldadura necesarios en la base del ángulo y en el borde superior. (*b*) Calcular la longitud de los filetes si, además, se añade uno frontal en el extremo del ángulo.

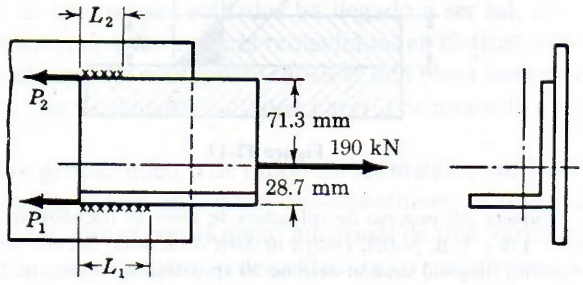


Figura 12-19.

Solución:

Parte a) En la figura 12-19 se representa las fuerzas P_1 y P_2 que han de soportar los cordones y que equilibran a la fuerza $P = 190$ kN. Tomando momentos con respecto a la línea de acción de P_2 se obtiene:

$$[\Sigma M_{P_2} = 0] \qquad 100P_1 = 190(71.3) \qquad P_1 = 135.5 \text{ kN}$$

y tomando momentos con respecto a la línea de acción de P_1:

$$[\Sigma M_{P_1} = 0] \qquad 100P_2 = 190(28.7) \qquad P_2 = 54.5 \text{ kN}$$

Ya que el espesor del ángulo es 10 mm (mayor que 6 mm) y el tamaño máximo de la soldadura, en el borde del ángulo, es $10 - 2 = 8$ mm. La resistencia por mm, para este tamaño, con $\tau = 145$ MPa, es $q = 103(8) = 824$ N/mm. Así, las longitudes requeridas son:

$$\left[L = \frac{P}{q}\right] \qquad L_1 = \frac{135.5 \times 10^3}{824} = 164 \text{ mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

y

$$L_2 = \frac{54.5 \times 10^3}{824} = 66.1 \text{ mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

Estos valores deben aumentarse en una pequeña longitud, para tener en cuenta el principio y final de la soldadura.

Parte b) Al añadir una soldadura transversal de filete, su tamaño máximo vuelve a ser 8 mm. Para evitar la excentricidad de la carga en este cordón, debe ser simétrico respecto de la línea de acción de la carga aplicada, como se indica en la figura 12-20, lo que limita su longitud al doble de 28.7 mm, y la carga que soporta a $qL = (824)(2 \times 28.7) = 47.3$ kN actuando en su punto medio*.

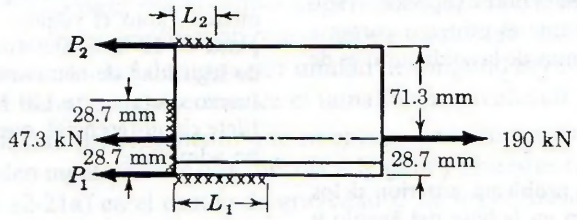


Figura 12-20.

Tomando ahora momentos con respecto a la línea de acción de P_2, y después con respecto a la acción de P_1, tenemos:

$$[\Sigma M_{P_2} = 0] \qquad 100P_1 = (190 - 47.3)(71.3) \qquad P_1 = 101.7 \text{ kN}$$
$$[\Sigma M_{P_1} = 0] \qquad 100P_2 = (190 - 47.3)(28.7) \qquad P_2 = 41.0 \text{ kN}$$

* Sin embargo, no es raro dejar que la soldadura de filete corra completamente a lo largo del borde del ángulo, soslayando la excentricidad resultante de la carga. En la siguiente sección se explica este tipo de carga sobre uniones soldadas.

Así, las longitudes de soldadura requeridas en la base y el borde superior del ángulo son, respectivamente:

$$\left[L = \frac{P}{q} \right] \qquad L_1 = \frac{101.7 \times 10^3}{824} = 123 \text{ mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

$$L_2 = \frac{41.0 \times 10^3}{824} = 49.8 \text{ mm} \qquad \textbf{Resp.}$$

Un mayor tamaño de filete puede usarse en la base del ángulo si fuera necesario reducir el largo L_1.

PROBLEMAS

1242. Una placa de 150 mm de ancho por 14 mm de espesor se coloca sobre una placa fija y se suelda mediante filetes laterales. Determinar la mínima longitud de una soldadura de filete de 8 mm si la placa ha de soportar una fuerza de tracción axial que le produce un esfuerzo de 140 MPa; el esfuerzo cortante admisible en la garganta de la soldadura es de 145 MPa.

Resp. 179 mm en cada lado

1243. Resolver el problema 1242 empleando el máximo tamaño permitido de soldadura.

1244. Un ángulo de 150 × 100 × 13 mm se suelda a una placa con el ala de 150 mm en contacto con la placa. Si el ángulo soporta una carga centroidal de 400 kN, calcular la longitud de los cordones, en la base y en el borde superior, si son de 8 mm, suponiendo que el esfuerzo cortante admisible, en las gargantas de la soldadura, es de 145 MPa.

Resp. 161 mm y 324 mm

1245. Resolver el problema anterior si los cordones son de 12 mm en la base del ángulo y del máximo tamaño permitido en el borde superior.

1246. Con una placa de acero de 16 mm se forma un cilindro de 1.5 m de diámetro que se suelda mediante filetes frontales interior y exterior, como indica la figura P-1246. Determinar la máxima presión interior que puede aplicarse si los esfuerzos admisibles son de 160 MN/m^2 en la chapa y de 120 MN/m^2 a cortante en las gargantas de la soldadura. Emplear cordones del mayor tamaño admisible.

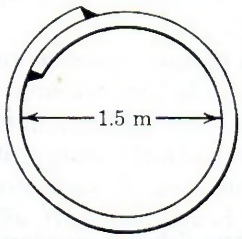


Figura P-1246.

Resp. $p = 3.17$ MN/m^2

1247. Se construye un depósito cilíndrico soldando, como se ve en la figura P-1247, dos tapas en los extremos de un cilindro de 1.20 m de diámetro. Tanto el cilindro como las tapas son de placa de 10 mm. Determinar la presión interior de seguridad de manera que no se exceda un esfuerzo cortante de 110 MPa en la garganta del filete circunferencial, que será del máximo tamaño admisible.

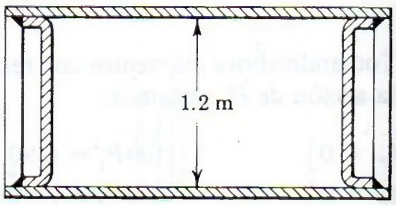


Figura P-1247.

Resp. $p = 2.07$ MPa

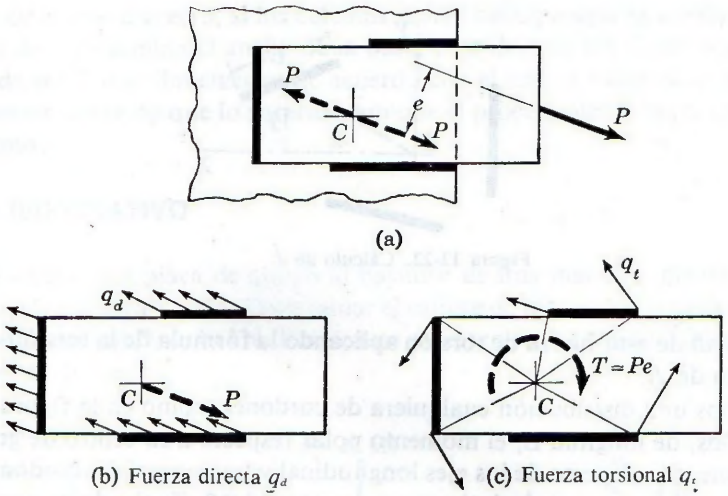


Figura 12-21. Estudio de las uniones soldadas con carga excéntrica.

12-9. UNIONES SOLDADAS CON CARGA EXCÉNTRICA

En la sección anterior se aplicaron las ecuaciones de equilibrio estático para determinar la fuerza que ha de soportar cada cordón de soldadura. El estudio se basaba en que cada cordón se supone uniformemente cargado en toda su longitud. Esta hipótesis es aceptable si todos los cordones tienen la misma base y la carga aplicada pasa por el centro de gravedad de los cordones, considerados como segmentos lineales. En el caso de que los cordones sean de diferente espesor, el centro de gravedad ha de ser el de las áreas de los mismos. Si la fuerza resultante aplicada *P no* pasa por el centro de gravedad, los cordones no quedan uniformemente cargados. El análisis simplificado que se hace a continuación indica cómo se puede determinar la máxima intensidad de carga por unidad de longitud del cordón, que sirva de base para determinar su tamaño, o si se conoce el tamaño, para calcular el valor de la fuerza *P*.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de las uniones remachadas con cargas excéntricas se añaden mentalmente dos fuerzas *P* iguales y opuestas (indicadas con línea punteada en la figura 12-21a) en el centro de gravedad *C* de los cordones, con lo que se reduce la carga excéntrica a una carga centrada *P* y un par de torsión de momento $T = Pe$. En la figura 12-21b la carga centrada *P* es soportada por la fuerza directa q_d por unidad de longitud de cordón. Esta fuerza directa está uniformemente distribuida en todos los cordones y viene dada por:

$$q_d = \frac{P}{\Sigma L} \tag{12-8}$$

siendo ΣL la longitud total de los cordones.

En la figura 12-21c el par de torsión es soportado por una fuerza variable q_t por unidad de longitud de cordón. Suponiendo que los cordones trabajan elásticamente y que la placa es perfectamente rígida y gira en su plano alrededor del centro de gravedad *C*, se puede deter-

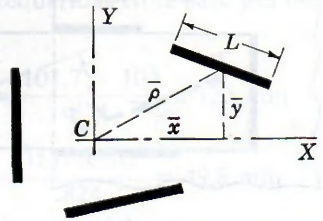


Figura 12-22. Cálculo de J.

minar la intensidad de esta fuerza de torsión aplicando la fórmula de la torsión con un valor muy aproximado de J.

Consideremos una distribución cualquiera de cordones, como en la figura 12-22. Para cualquiera de ellos, de longitud L, el momento polar respecto a *su* centro de gravedad es la suma de los momentos respecto de los ejes longitudinal y transversal del cordón. Estos valores son, respectivamente, cero (o prácticamente cero) y $L^3/12$. Teniendo en cuenta la expresión del teorema de Steiner se obtiene, con respecto al centro de gravedad del grupo de cordones,

$$[J = \bar{J} + Ld^2] \qquad J = \tfrac{1}{12}L^3 + L\bar{\rho}^2 = \tfrac{1}{12}L^3 + L(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

Por tanto, para todos los cordones, el valor de J que ha de figurar en la fórmula de la torsión es:

$$J = \Sigma L\left(\tfrac{1}{12}L^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$$

Aplicando ahora la fórmula de torsión se obtiene para la fuerza q_t, que actúa perpendicularmente al radio ρ en un punto cualquiera de un cordón,

$$q_t = \frac{T\rho}{\Sigma L\left(\tfrac{1}{12}L^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)} \qquad \textbf{(12–9)}$$

y como se vio en las uniones remachadas, interesan aún más las componentes de q_t, que como entonces, dan:

$$\left.\begin{aligned} q_{t_x} &= \frac{Ty}{\Sigma L\left(\tfrac{1}{12}L^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)} \\ q_{t_y} &= \frac{Tx}{\Sigma L\left(\tfrac{1}{12}L^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12–10)}$$

en donde x y y son las coordenadas del punto en el que se van a determinar las componentes de q_t.

La máxima intensidad de la fuerza total por unidad de longitud en los cordones se obtendrá en el punto en que tanto las componentes horizontales como las verticales de q_d y del máximo q_t sean del mismo sentido y se sumen. Su valor vendrá dado por el módulo de la suma vectorial, es decir,

$$q = \sqrt{(q_{d_x} + q_{t_x})^2 + (q_{d_y} + q_{t_y})^2} \qquad \textbf{(12–11)}$$

En general, y esto es lo correcto, si los cálculos se han hecho como ha quedado expuesto, el máximo valor de q determina el ancho de la base, o *calibre*, de los filetes todos iguales. En ocasiones, cada cordón se dimensiona de acuerdo con el mayor valor de q que exista en él, pero esto es menos correcto que lo anterior, aunque el procedimiento no es exacto en ninguna de las formas.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1248. Se suelda una placa de apoyo al bastidor de una máquina mediante dos filetes, como se indica en la figura 12-23a. Determinar el calibre de los cordones para que puedan soportar una carga vertical $P = 40$ kN. Emplee un esfuerzo cortante admisible de 145 MPa en la garganta de las juntas.

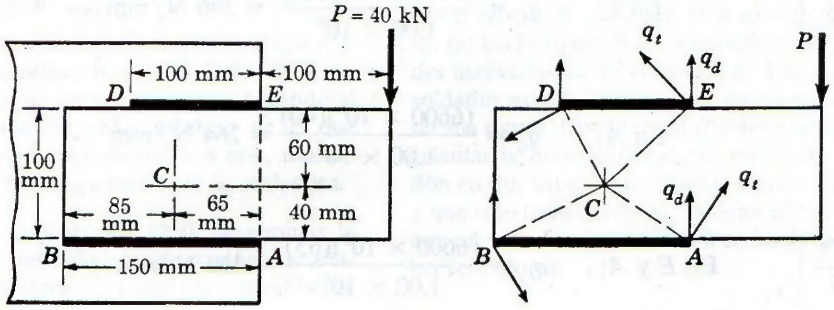


Figura 12-23.

Solución: El centro de gravedad de los cordones, respecto al punto A, tiene las coordenadas siguientes:

$$[L\bar{x} = \Sigma lx] \qquad (150 + 100)\bar{x} = 150(75) + 100(50) \qquad \bar{x} = 65 \text{ mm}$$

$$[L\bar{y} = \Sigma ly] \qquad 250\bar{y} = 100(100) \qquad \bar{y} = 40 \text{ mm}$$

Con estos valores se sitúa C como se indica en la figura 12-23a. El momento de P respecto de este punto, que es el par de torsión, es:

$$T = Pe = 40(100 + 65) = 6600 \text{ kN} \cdot \text{mm}$$

El momento de inercia polar simplificado, del grupo de soldaduras con respecto a C, es la suma de los valores de J de cada uno de los cordones. Recordando que $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas del centro de cada cordón respecto de C, se obtiene:

$$\left[J = L\left(\tfrac{1}{12}L^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)\right] \qquad J_{AB} = 150\left[\frac{(150)^2}{12} + (10)^2 + (40)^2\right] = 0.536 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$J_{DE} = 100\left[\frac{(100)^2}{12} + (15)^2 + (60)^2\right] = 0.466 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

Su suma es el valor J total,

$$J \text{ (total)} = \Sigma J = (0.536 + 0.466) \times 10^6 = 1.00 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

Los componentes de la carga directa son:

$$q_{d_y} = \frac{P}{\Sigma L} = \frac{40 \times 10^3}{250} = 160 \text{ N/mm} \uparrow \quad \text{y} \quad q_{d_x} = 0$$

Estos valores han de combinarse con las componentes de q_t en los puntos A y E, que son los más sobrecargados en los cordones AB y DE, como se puede ver en la figura 12-23b. Aplicando la ecuación (12-10) resulta:

$$\left[q_{t_x} = \frac{Ty}{J} \right] \qquad \text{En } E: \quad q_{t_x} = \frac{(6600 \times 10^3)(60)}{1.00 \times 10^6} = 396 \text{ N/mm} \leftarrow$$

$$\text{En } A: \quad q_{t_x} = \frac{(6600 \times 10^3)(40)}{1.00 \times 10^6} = 264 \text{ N/mm} \rightarrow$$

$$\left[q_{t_y} = \frac{Tx}{J} \right] \qquad \text{En } E \text{ y } A: \quad q_{t_y} = \frac{(6600 \times 10^3)(65)}{1.00 \times 10^6} = 429 \text{ N/mm} \uparrow$$

Combinando las componentes directas y de torsión se obtienen los máximos valores de q en cada cordón, que son:

$$\left[q = \sqrt{(\Sigma q_x)^2 + (\Sigma q_y)^2} \right]$$

$$q_E = \sqrt{(396)^2 + (160 + 429)^2} = 710 \text{ N/mm}$$

$$q_A = \sqrt{(264)^2 + (160 + 429)^2} = 645 \text{ N/mm}$$

Aplicando ahora la especificación de la AISC correspondiente, es decir, que la fuerza admisible por milímetro de soldadura para $\tau = 145$ MPa es $103a$ (independientemente de la dirección de la fuerza), donde a es la anchura de la base de la soldadura en milímetros. De aquí, el tamaño de la soldadura, sobre la base del punto de mayor esfuerzo, es

$$[q = 103a] \qquad q_E = 710 = 103a \qquad a = 6.89 \text{ mm}$$

por lo que se daría como solución unos cordones de 7 mm.

En AB, en todo caso, se podría utilizar un calibre menor, ya que $q_A = 645$ N/mm.

PROBLEMAS

1249. Un soporte ménsula se suelda a la base de una máquina como indica la figura P-1249. Determinar el tamaño a de los cordones de soldadura, redondeados al milímetro, usando $\tau = 145$ MPa en las gargantas de la soldadura.

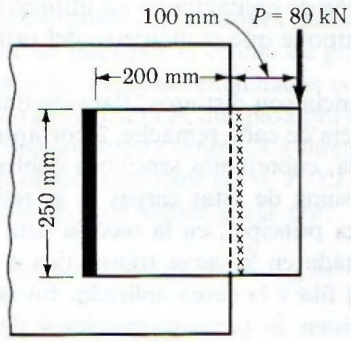


Figura P-1249.

Resp. $a = 5$ mm

1250. Se suelda una placa soporte a una placa fija como se indica en la figura P-1250. Determinar el calibre de los cordones redondeando al milímetro. Hallar el valor máximo de P que podría aplicarse con cordones de 8 mm, usando $\tau = 145$ MPa en las gargantas de la soldadura.

1251. En el problema 1250, determinar la fuerza máxima por milímetro de cordón si se añade otro cordón frontal a lo largo de todo el borde AE.

Resp. $q = 531$ N/mm

1252. En la figura P-1252 se sueldan también los bordes AE y GF. Determinar la fuerza máxima por milímetro de cordón.

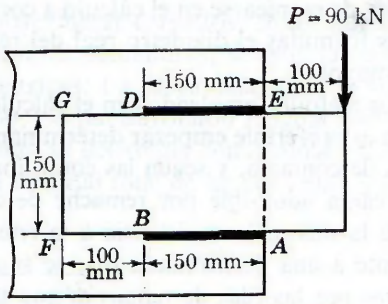


Figura P-1250, P-1251, P-1252.

1253. Se suelda un ángulo a una placa para soportar una carga P cuya línea de acción pasa por el centro de gravedad de la sección del ángulo. (a) En la figura P-1253 se indican las longitudes necesarias de los cordones de 8 mm; pero un soldador aplicó los cordones como en (b) de la misma figura. Con la carga P determinada en (a), calcular la máxima carga por milímetro de cordón en (b), suponiendo que las placas son rígidas y que sólo las soldaduras trabajan elásticamente, con un valor de $\tau = 145$ MPa en las gargantas de las soldaduras.

1254. Resolver el problema ilustrativo 1248 si se añade otro cordón a lo largo del borde de 100 mm de espesor, en A.

Resp. $q_{máx} = 391$ N/mm; use soldadura de 4 mm

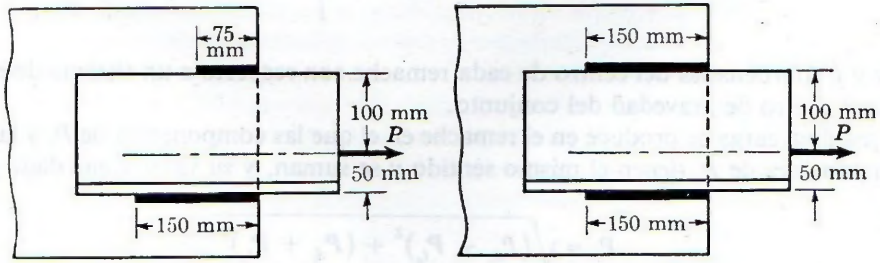


Figura P-1253.

RESUMEN

Hay dos clases de uniones remachadas: las utilizadas para depósitos a presión, y las empleadas en estructuras, o uniones estructurales. En las primeras, el diámetro del orificio es

el que ha de emplearse en el cálculo a cortante y a presión de contacto; en las últimas se aplica a las fórmulas el diámetro real del remache, y se supone que el diámetro del orificio es 3 mm mayor.

Los métodos empleados en el cálculo de su resistencia son distintos. Para las uniones a presión es preferible empezar determinando la resistencia de cada remache, a cortante o a la presión de contacto, y según las condiciones de cada fila, cubrejuntas sencillo o dobles; obtener la carga admisible por remache de cada fila. La suma de estas cargas es la resistencia total de la unión. La resistencia a la tensión en la placa principal, en la sección neta correspondiente a una determinada fila, se supone incrementada en la carga transmitida a los cubrejuntas por las filas de remaches que están entre esta fila y la carga aplicada. En las uniones de soporte se supone que todos los remaches resisten su parte proporcional de carga. En ambos tipos de uniones se desprecia el efecto del incremento de resistencia por rozamiento entre las placas.

A veces, la fuerza que actúa en una unión remachada no pasa por el centro de gravedad del grupo de remaches. Si la carga excéntrica se sustituye por la carga centrada P y el par de torsión $T = Pe$, la carga resultante en cada remache es la suma vectorial de la carga directa $P_d = P/n$, siendo n el número de remaches, y la carga de torsión P_t que viene dada por:

$$P_t = \frac{T\rho}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2} \tag{12–5}$$

Sin embargo, es preferible determinar la carga resultante P_r en un remache combinando las componentes de la carga directa y de la torsional. Las componentes P_{d_x} y P_{d_y} son constantes para todos los remaches, y las componentes de la carga de torsión son:

$$\left.\begin{aligned} P_{t_x} &= \frac{T}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\, y \\ P_{t_y} &= \frac{T}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}\, x \end{aligned}\right\} \tag{12–6}$$

siendo x y y coordenadas del centro de cada remache con respecto a un sistema de ejes que pasa por el centro de gravedad del conjunto.

La máxima carga se produce en el remache en el que las componentes de P_d y las máximas componentes de P_t tienen el mismo sentido y se suman, y su valor viene dado por:

$$P_r = \sqrt{(P_{d_x} + P_{t_x})^2 + (P_{d_y} + P_{t_y})^2} \tag{12–7}$$

La longitud de los cordones de sodadura se determina calculando las fuerzas resistentes necesarias para satisfacer las condiciones del equilibrio estático, dividiendo luego tales fuerzas resistentes entre la resistencia, expresada en N/mm, de la soldadura. Las especificaciones de la AISC para resistencia de soldaduras depende del soldeo, así como de la gradación del acero soldado. El calibre máximo de una soldadura de filete es 2 mm menor que el espesor del material a lo largo de bordes de 6 mm o mayores. Para bordes menores de 6 mm, el calibre máximo de la soldadura puede ser igual al espesor del borde soldado.

Los conjuntos de cordones de soldadura excéntricamente cargados, en los que la carga aplicada no pasa por el centro de gravedad del grupo de soldaduras, se estudian de forma análoga a las uniones remachadas con cargas excéntricas. La carga excéntrica se sustituye por la carga centrada P, que pasa por el c.g. del grupo, y el par de torsión T, igual al momento de P respecto de este centro. La intensidad de la carga se determina como suma vectorial de la carga directa uniforme $q_t = P/\Sigma L$, siendo ΣL la longitud total de los cordones, y la carga de torsión q_t, que viende dada por:

$$q_t = \frac{T\rho}{\Sigma L\left(\frac{1}{12}L^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)} \qquad \textbf{(12–9)}$$

siendo ρ la distancia radial desde el centro de gravedad del conjunto de los cordones, a un punto cualquiera de éstos; $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas del centro de cada cordón de soldadura.

En general, es más conveniente determinar las componentes de la carga de torsión, que vienen expresadas por:

$$\left.\begin{aligned} q_{t_x} &= \frac{Ty}{\Sigma L\left(\frac{1}{12}L^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)} \\ q_{t_y} &= \frac{Tx}{\Sigma L\left(\frac{1}{12}L^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12–10)}$$

siendo x y y las coordenadas del punto en que se quiere determinar las componentes de q_t.

La intensidad máxima de la carga en los cordones tiene lugar en el punto en el que las componentes horizontales y las verticales de q_d y q_t máxima tienen el mismo sentido y se suman. Con ello el módulo de la intensidad máxima está dado por:

$$q = \sqrt{(q_{d_x} + q_{t_x})^2 + (q_{d_y} + q_{t_y})^2} \qquad \textbf{(12–11)}$$

13
temas especiales

13-1. INTRODUCCIÓN

Todo lo estudiado en los capítulos anteriores comprende lo que se podría llamar un curso básico de resistencia de materiales. Ahora se trata de abordar ciertos temas especiales*, que en realidad forman parte de un curso superior de resistencia de materiales. Algunos de estos temas, como el de la fotoelasticidad, constituyen por sí solos un amplio campo de estudio. Los temas que se tratan son independientes unos de otros.

13-2. CARGA REPETIDA. FATIGA

En las máquinas, la mayoría de los elementos están sometidos a esfuerzos variables, producidos por cargas y descargas sucesivas y repetidas. Los elementos sujetos a este tipo de esfuerzos se rompen o fallan, frecuentemente, para un valor de esfuerzo mucho menor que el de ruptura correspondiente, determinado mediante el clásico ensayo estático de tensión. Este tipo de falla se denomina *ruptura por fatiga*. Para el diseño correcto de elementos sometidos a esfuerzos alternados, es necesario conocer el esfuerzo que puede aplicarse, sin que el elemento se rompa, un número indefinido de veces, o el esfuerzo (algo más alto) que puede quedar aplicado a un cierto número limitado de veces, caso que es importante ya que a veces se diseñan máquinas o elementos que sólo se utilizan ocasionalmente y que pueden tener, por tanto, una vida larga sin que el número de veces que se hayan aplicado las cargas sea demasiado grande.

---

* Para un estudio más profundo se puede consultar: A. P. Bores, O. N. Sidebottom, F. B. Seely y J. O. Smith, *Advanced Mechanics of Materials*, 3a. ed., Wiley, N. York. 1978; S. Timoshenko, *Strength of materials*, vols. I y II, Van Nostrand Reinhold, N. York, 1955; G. Murphy, *Mechanics of Materials*, McGraw-Hill, N. York, 1948.

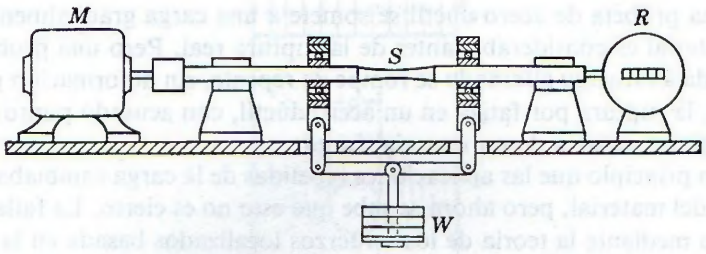


Figura 13-1. Máquina rotativa del ensayo de fatiga.

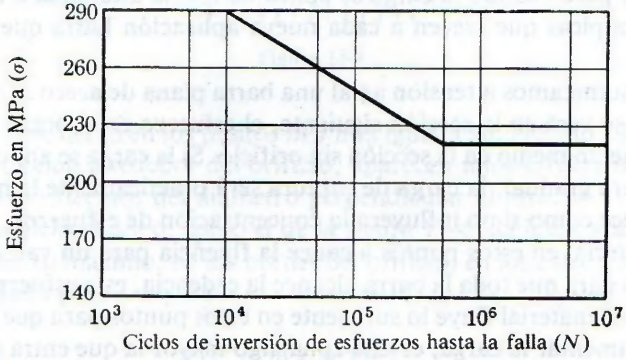


Figura 13-2. Diagrama σ-N.

El ensayo para determinar estos valores se llama *ensayo de fatiga*. El procedimiento más sencillo consiste en la flexión alternada. Una probeta de sección circular se monta sobre unos cojinetes, como se indica en la figura 13-1, y su parte central queda sometida a un momento flexionante puro bajo la acción de la carga W. Al girar la varilla mediante el motor M, una fibra que inicialmente estuviera en la parte superior y, por tanto, comprimida, pasa a la parte inferior y queda sometida a tensión, de nuevo a compresión y así sucesivamente, de manera que en cada vuelta se produce una inversión completa de esfuerzos. Un contador de revoluciones registra el número de vueltas hasta que tiene lugar la ruptura, y entonces para automáticamente el motor. Para hacer un ensayo con un material dado, se preparan sobre una docena de probetas idénticas, y se ensaya cada una con una carga diferente, hasta la ruptura o hasta que haya sufrido cuatro o cinco millones de ciclos, en cuyo caso se supone que soportan un número indefinido. En la figura 13-2 se ha representado un diagrama σ-N típico, obtenido mediante este procedimiento. Se ha empleado una escala horizontal semilogarítmica. El punto en el que se aplana el diagrama* se llama *límite de resistencia a la fatiga*. Aunque no existe relación alguna definida entre este límite y el esfuerzo último, obtenido en pruebas estáticas, la experiencia indica que, en la mayoría de los materiales, este límite suele estar comprendido entre el 40 y el 50% del esfuerzo último.

* Se puede hacer también el diagrama a escala logarítmica en las dos coordenadas, pero una escala cartesiana no manifiesta con claridad el límite de resistencia a la fatiga.

Cuando una probeta de acero dúctil se somete a una carga gradualmente creciente, la fluencia del material es considerable antes de la ruptura real. Pero una probeta del mismo material sometida a esfuerzo alternado se rompe de repente, sin deformación plástica ni otro aviso. Así pues, la ruptura por fatiga en un acero dúctil, con acusado punto de fluencia, es análoga a la ruptura estática de un material frágil.

Se pensó en principio que las aplicaciones repetidas de la carga cambiaban la estructura microcristalina del material, pero ahora se sabe que esto no es cierto. La falla o ruptura por fatiga se explica mediante la teoría de los esfuerzos localizados basada en la concentración de esfuerzos que se produce, bien en el interior del material, debido a discontinuidades en su estructura interna, bien en la superficie debido a cambios bruscos de sección. Estas concentraciones de esfuerzo no son demasiado peligrosas cuando un material dúctil se somete a esfuerzos estáticos, pero cuando la carga se aplica de forma alternada o repetida, se producen grietas microscópicas que crecen a cada nueva aplicación hasta que la pieza se rompe bruscamente.

Por ejemplo, sometamos a tensión axial una barra plana de acero con un pequeño orificio central. Como se verá en la sección siguiente, el esfuerzo en el borde del orificio llega a ser el triple del esfuerzo medio en la sección sin orificio. Si la carga se aplica estáticamente, es decir, de una manera gradual, la carga de ruptura será prácticamente la misma que si no tuviera orificio. Parece como si no influyera la concentración de esfuerzos, pero ello se debe a que, aunque el material en estos puntos alcance la fluencia para un valor de la carga de un tercio del necesario para que toda la barra alcance la cedencia, este esfuerzo, de momento, es puramente local, y el material fluye lo suficiente en estos puntos para que el esfuerzo no siga aumentando. Al aumentar la carga, es una zona algo mayor la que entra en fluencia, y, permaneciendo constante en esta zona la tensión, junto con la parte de sección que todavía no ha alcanzado este valor, soportan el total de la carga, sin que la deformación total aumente. Finalmente la barra entera alcanza el esfuerzo de cedencia, por lo que la influencia del pequeño orificio en la resistencia de la barra es despreciable. Pero si dos barras, una con orificio y otra sin él, se someten a un ensayo de fatiga, o esfuerzo alternado, la carga de ruptura de la barra con orificio se aproximará bastante a un tercio de la carga de ruptura en la barra sin orificio.

13-3. CONCENTRACIÓN DE ESFUERZOS

Como se ha dicho en la sección anterior, el efecto de la concentración de esfuerzos en un material dúctil sometido a cargas repetidas o alternadas es análogo a su efecto sobre un material frágil sometido a carga estática. Veamos, pues, el efecto de un cambio brusco de sección en la distribución de esfuerzos. En la figura 13-3, el pequeño orificio circular en la placa rectangular sometida a un esfuerzo uniforme S da lugar a que en la sección transversal que pasa por el centro del orificio, la distribución de esfuerzos sea tal como aparece representada en la figura por el área rayada. Esta distribución viene expresada por:

$$\sigma' = \frac{\sigma}{2}\left(2 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{3}{16}\frac{d^4}{r^4}\right) \qquad (a)$$

siendo d el diámetro del orificio y r la distancia al centro del mismo*. De aquí se obtiene,

* Véase S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Teoría de Elasticidad*. 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1951, pág. 81

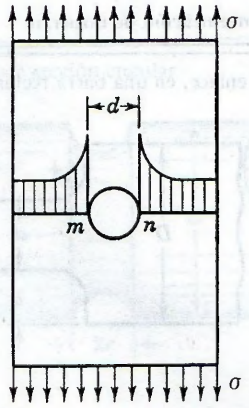


Figura 13-3.

para $r = d/2$, que el esfuerzo en los puntos m y n es igual a 3σ. Debido a la existencia de una acción del tipo de flexión alrededor del orificio, aparecen unos esfuerzos de compresión de valor σ en los puntos extremos del diámetro perpendicular al m-n.

Un pequeño orificio elíptico, como el de la figura 13-4, da lugar a una distribución del mismo tipo. El esfuerzo máximo, en los bordes del orificio, en los extremos del eje horizontal del mismo, viene dado por:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma\left(1 + 2\frac{b}{a}\right) \qquad (b)$$

esfuerzo máximo que aumenta con el valor de la relación b / a. Por tanto, en un orificio muy estrecho, o una grieta, perpendicular a la dirección del esfuerzo se producirá una alta concentración de esfuerzos y la ruptura local del material, por lo que la grieta tenderá a aumentar; este crecimiento de la grieta se puede evitar efectuando dos orificios, de diámetro no demasiado pequeño, en los extremos de aquélla, lo que equivale en definitiva a aumentar el radio de curvatura del contorno del orificio en los extremos del eje perpendicular a la dirección del esfuerzo aplicado, y lo cual hace disminuir sensiblemente la concentración de esfuerzos en estos puntos.

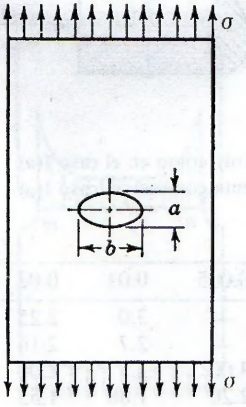
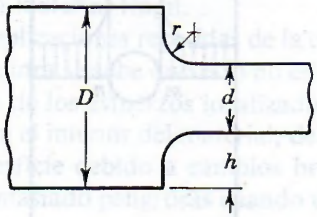


Figura 13-4.

TABLA 13-1. Factores de concentración de esfuerzo

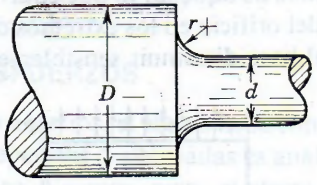
I. Variación en escuadra con enlace, en una barra rectangular



(*a*) Tensión		*r*/*d*					
	h/*r*	0.05	0.10	0.20	0.27	0.50	1.0
	0.5	1.70	1.60	1.53	1.47	1.39	1.21
	1.0	1.93	1.78	1.67	1.59	1.42	1.22
	1.5	—	1.89	1.72	1.65	1.43	1.23
	2.0	—	1.95	1.80	1.70	1.44	1.23

(*b*) Flexión		*r*/*d*					
	h/*r*	0.05	0.10	0.20	0.27	0.50	1.0
	0.5	1.61	1.49	1.39	1.34	1.22	1.07
	1.0	1.91	1.70	1.48	1.38	1.22	1.08
	1.5	2.00	1.73	1.50	1.39	1.23	1.08
	2.0	—	1.74	1.52	1.39	1.23	1.09

II. Variación en escuadra, con enlace, en eje de sección circular



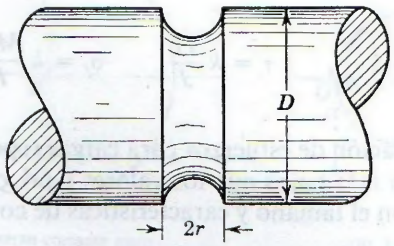
(*a*) Tensión: Aproximadamente como en el caso I(*a*)
(*b*) Flexión: Aproximadamente como en el caso I(*a*)

(*c*) Torsión		*r*/*d*					
	D/*d*	0.005	0.01	0.02	0.03	0.04	0.10
	2.00	—	3.0	2.25	2.00	1.82	1.44
	1.33	—	2.7	2.16	1.91	1.76	1.40
	1.20	3.00	2.5	2.00	1.75	1.62	1.34
	1.09	2.20	1.88	1.53	1.40	1.30	1.15

(Continúa)

TABLA 13-1. (Continuación)

III. Garganta semicircular en ejes de sección circular



(*a*) Tensión

$\frac{r}{D-2r}$	0.05	0.15	0.30	0.40	0.52	0.75
k	2.57	2.16	1.81	1.65	1.51	1.36

(*b*) Flexión

$\frac{r}{D-2r}$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.50	0.75
k	2.20	1.86	1.59	1.45	1.30	1.18

(*c*) Torsión: $k = \dfrac{2D}{D + 2r}$

Las muescas pequeñas semicirculares, en los bordes de una placa, figura 13-5, producen también una concentración de esfuerzos en los puntos m y n, donde se alcanza un valor próximo a tres veces el esfuerzo medio σ aplicado en los extremos de la placa.

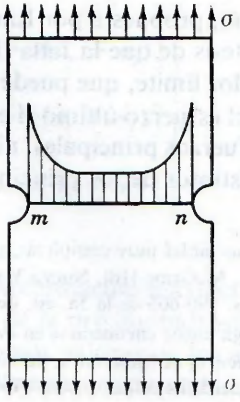


Figura 13-5.

Los valores* de los factores de concentración de esfuerzos, para algunos casos de cambio brusco de sección, aparecen tabulados en la tabla 13-1. Llamando k al factor de concentración de esfuerzos, los esfuerzos máximos para cargas axiales, de torsión y de flexión vienen dados por:

$$\sigma = k\frac{P}{A}, \qquad \tau = k\frac{Tr}{J}, \qquad \sigma_f = k\frac{Mc}{I}$$

Los factores de concentración de esfuerzos para cargas repetidas o alternadas son, a veces, aunque no siempre, algo más bajos que los valores teóricos para cargas estáticas de la tabla 13-1; varían también con el tamaño y características de constitución o estructura interna del material†.

13-4. TEORÍAS SOBRE LA FALLA O RUPTURA

Se han propuesto diversas teorías sobre la falla, con objeto de predecir, con arreglo al comportamiento del material en los ensayos de tensión o compresión simple, las condiciones en que se producirá la ruptura bajo cualquier tipo de cargas combinadas. Por ruptura se entiende aquí *la falla* (o *fallo*) del material, tanto por ruptura real como por fluencia (lo que daría lugar a deformaciones permanentes excesivas), según sea el efecto que ocurra antes. No se considera la falla por una desarticulación local de la estructura, o por falta de estabilidad elástica (pandeo, o flexión lateral, en columnas).

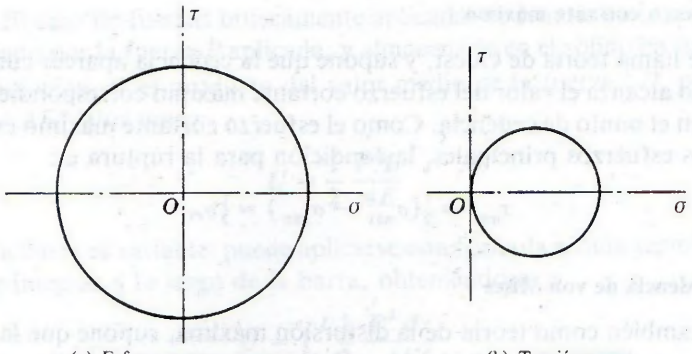
El comienzo de la deformación plástica, es decir, de la fluencia, queda patente en los ensayos de tensión simple por la desviación de la proporcionalidad esfuerzo-deformación. Prácticamente, la fluencia comienza cuando las deformaciones plásticas empiezan a ser apreciables. Ahora bien, cuando no se trata de esfuerzo simple, sino de esfuerzos combinados en varias direcciones, la fluencia dependerá de alguna combinación de estas componentes del esfuerzo. Aunque no se ha encontrado un método teórico que relacione el punto de fluencia en los ensayos a tensión simple, con la fluencia en el caso de esfuerzos combinados, se han propuesto diversas teorías que intentan resolver este problema.

Teoría del esfuerzo máximo

La teoría del esfuerzo máximo, propuesta por Rankine, es la más antigua y la más sencilla de todas. Se basa en la hipótesis de que la falla tiene lugar cuando el mayor de los esfuerzos principales alcanza un valor límite, que puede ser el punto de fluencia determinado en un ensayo a tensión simple, o el esfuerzo último si el material es frágil. La teoría no tiene en cuenta el efecto de los otros esfuerzos principales, ni el valor que pueda alcanzar el esfuerzo cortante sobre otros planos distintos de los principales. Por ejemplo, la resistencia para

* Estos valores se han tomado de unas tablas muy completas, para estos y otros casos, del libro *Formulas for Stress and Strain*, de R. J. Roark, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1965, págs. 330-347. Expresiones generales de estos factores pueden verse en las págs. 590-603 de la 5a. ed. de la misma obra.

† Un estudio más completo de la fatiga puede encontrarse en *Prevention of Fatigue of Metals*, Battelle Memorial Institute, Wiley. Véase también *Resistencia de Materiales*, de Timoshenko, Secs. 78 a 81, vol. II, respecto de la fatiga, y su Cap. 8 respecto de la concentración de esfuerzos. En *Formulas for Stress and Strain*, de Roark y Young, 5a. ed., Wiley, págs. 604-606, se da una completísima bibliografía sobre el tema de concentración de esfuerzos.



(a) Esfuerzo cortante puro (b) Tensión pura

Figura 13-6 Aunque los esfuerzos principales tienen el mismo valor en (a) y en (b), el esfuerzo cortante en (a) es el doble que en (b).

los dos estados de esfuerzo representados por sus círculos de Mohr en las figuras 13-6a y b (esfuerzo cortante puro y tensión pura) será la misma según esta teoría, sin tener en cuenta que en (a) el esfuerzo cortante máximo es el doble que en (b), si la falla tiene lugar para el mismo valor del esfuerzo principal máximo. Esta observación hace pensar que el esfuerzo máximo de tensión o compresión, por sí solo, no debe bastar para determinar la ruptura, al menos cuando la falla ocurre por cedencia. Pese a todo, esta teoría da resultados que concuerdan bastante bien con la realidad en el caso de materiales frágiles.

Teoría de la deformación máxima

De acuerdo con esta teoría, atribuida a Saint Venant, en un material dúctil la fluencia empieza cuando la deformación principal máxima alcanza el valor de la deformación para la que empieza la fluencia en el ensayo de tensión simple, o cuando la deformación principal mínima (es decir, de compresión) alcanza el valor de la deformación en el punto de cedencia del ensayo a compresión simple. Sin embargo, observando la ley de Hooke en el caso de un estado triaxial de esfuerzos, expresado por las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{–}12)$$

se deduce que si $\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z$ la deformación máxima es $(1 + 2\nu)\sigma/E$, mientras que si $-\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z$, como en el caso de la presión hidrostática, la deformación máxima es $(1 - 2\nu)\ \sigma/E$. Así, pues, con los mismos valores de los esfuerzos máximos, las deformaciones máximas son completamente distintas. En realidad, los resultados de esta teoría no concuerdan en muchos casos con la experiencia.

Teoría del esfuerzo cortante máximo

También se llama teoría de Guest, y supone que la cedencia aparece cuando el esfuerzo cortante máximo alcanza el valor del esfuerzo cortante máximo correspondiente al ensayo de tensión simple en el punto de cedencia. Como el esfuerzo cortante máximo es igual a la semidiferencia de los esfuerzos principales, la condición para la ruptura es:

$$\tau_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}) = \tfrac{1}{2}\sigma_{PC}$$

Teoría de la cedencia de von Mises

Conocida también como teoría de la distorsión máxima, supone que la cedencia puede ocurrir, en un estado general triaxial de esfuerzos, cuando la media cuadrática de las diferencias entre los esfuerzos principales es igual al mismo valor en un ensayo a tensión simple. Si $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ son los esfuerzos principales, y σ_{PC} es el esfuerzo de cedencia en tensión simple, se tiene:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]\\ &\quad = \tfrac{1}{3}\left[(\sigma_{PC} - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_{PC})^2\right]\\ &\quad = \tfrac{2}{3}\sigma_{PC}{}^2\end{aligned}$$

de donde resulta:

$$2\sigma_{PC}{}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

Resumen

Los resultados experimentales indican que, de todas estas teorías sobre la ruptura, en los materiales dúctiles la que da resultados más adaptados a la realidad es la teoría de la distorsión máxima de von Mises; y en segundo lugar la teoría del esfuerzo cortante máximo. En materiales frágiles, como la fundición, se prefiere en general la teoría del esfuerzo principal máximo.

13-5. MÉTODOS DE LA ENERGÍA

Igualando el trabajo exterior realizado por las fuerzas aplicadas a un sólido elástico (durante la deformación de éste) a la energía interna almacenada en el mismo, se obtiene un método de determinación de deformaciones totales, cuyo fundamento es el principio de conservación de la energía. Este método, como se verá, es sumamente útil y tiene numerosas aplicaciones. Se comienza por obtener las expresiones de la energía elástica de deformación U almacenada en un cuerpo bajo la acción de diferentes tipos de esfuerzos.

Carga axial

Cuando se aplica gradualmente una carga axial a una barra de sección constante, la carga P va aumentando desde cero hasta su valor final, en el que se alcanza la deformación total δ. Se supone que, en todo momento, la fuerza exterior está equilibrada por las fuerzas inter-

nas en la barra. El caso de fuerzas bruscamente aplicadas se estudia en la sección siguiente. El trabajo realizado por la fuerza P aplicada, y almacenado en el sólido en forma de energía elástica de deformación, es el producto del valor medio de la fuerza $\frac{1}{2}P$, por su desplazamiento $\delta = PL/AE$*. Por tanto:

$$U = \frac{1}{2}\frac{P^2L}{AE} \tag{13-1}$$

Si la sección de la barra es variable, puede aplicarse esta fórmula a cada segmento diferencial de longitud dx e integrar a lo largo de la barra, obteniéndose:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{P^2\,dx}{AE} \tag{13-1a}$$

Carga de torsión

En una barra de sección circular constante, la energía almacenada es igual al producto del valor medio del momento torsionante, desde cero hasta T, por el ángulo total de torsión, es decir:

$$U = \frac{1}{2}T\theta = \frac{1}{2}T\left(\frac{TL}{JG}\right) = \frac{1}{2}\frac{T^2L}{JG} \tag{13-2}$$

Si el momento torsor es variable, o lo es el diámetro de la sección, se puede aplicar esta fórmula a cada segmento diferencial de longitud dx e integrar a lo largo de la barra, obteniéndose:

$$U = \int_0^L \frac{T^2\,dx}{2JG} \tag{13-2a}$$

Carga de flexión

Consideremos un segmento de una viga cualquiera, aislado mediante dos secciones transversales a la distancia dx, como indica la figura 13-7. Un elemento de sección dA dentro

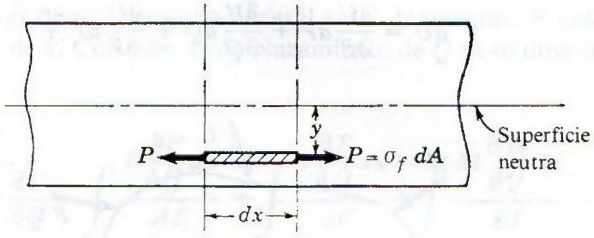


Figura 13-7. Energía almacenada en un elemento diferencial de una viga.

$$P = \sigma_f\,dA = (My/I)\,dA$$

---

* **N. de T.** Por ser lineal la relación de δ a P. En realidad,

$$U = \int_0^{\delta} P\cdot d\delta = \int_0^{P} P\cdot\frac{dP\cdot L}{AE} = \frac{1}{2}\frac{P^2L}{AE}$$

de este segmento se puede considerar como una pequeña barra diferencial cargada axialmente, donde $P = \sigma_z\, dA = (My/I)\, dA$, con lo que la energía de deformación almacenada en él viene dada por:

$$\left[U = \frac{P^2 L}{2AE} \right] \qquad \frac{P^2\, dx}{2AE} = \frac{M^2 y^2}{I^2}(dA)^2 \cdot \frac{dx}{2(dA)E} = \frac{M^2\, dx}{2EI^2} \cdot y^2\, dA$$

Extendiendo este resultado a toda la sección recta de la viga, se obtiene la energía de deformación almacenada en el segmento de viga de longitud dx, y cuyo valor es:

$$dU = \frac{M^2\, dx}{2EI^2} \int y^2 dA = \frac{M^2\, dx}{2EI}$$

y para la longitud total de la viga:

$$U = \int \frac{M^2\, dx}{2EI} \tag{13-3}$$

Desplazamientos

En lugar de igualar directamente el trabajo de las fuerzas exteriores a las expresiones de la energía de deformación, el problema de hallar los desplazamientos se simplifica considerablemente aplicando el *teorema de Castigliano*, o el *método del trabajo virtual*. El teorema de Castigliano establece que el desplazamiento del punto de aplicación de una fuerza exterior, en su dirección, es igual a la derivada parcial de la energía elástica de deformación con respecto a esta fuerza. Para demostrarlo, consideremos el sólido elástico de la figura 13-8, articulado en C y apoyado sobre rodillos en A y B. Si se aplican independientemente las fuerzas P, Q, F, el trabajo realizado por ellas se almacena en el cuerpo en forma de energía elástica de deformación. Observemos que las reacciones no producen trabajo, pues en las articulaciones no se tiene desplazamiento alguno, y en los apoyos libres, como se desplazan sobre el plano de éstos, o sea perpendicularmente a su dirección, tampoco. La energía de deformación será, pues, una función de segundo grado de las fuerzas exteriores.

Supongamos ahora que una de las fuerzas, Q, experimenta un pequeño incremento dQ. El incremento correspondiente de la energía de deformación es

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P} dP + \frac{\partial U}{\partial Q} dQ + \frac{\partial U}{\partial F} dF + \cdots$$

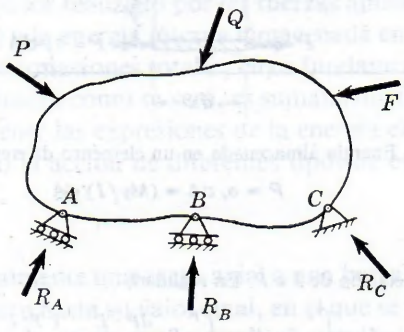


Figura 13-8.

Ahora bien, como solamente Q ha sido incrementada, $dP = dF = \cdot\ \cdot\ \cdot = 0$ y, por tanto, se tiene

$$dU = \frac{\partial U}{\partial Q} dQ \qquad (a)$$

Si ahora se supone que dQ estuviera aplicada inicialmente al sólido, y que P, Q, F, . . . se han aplicado después, el sólido habrá almacenado la misma energía de deformación que antes. Llamando δ al desplazamiento del punto de aplicación de Q en su dirección, la fuerza ya aplicada dQ se desplazará esta distancia δ cuando se apliquen las fuerzas reales, y producirá un trabajo $dU = \delta\, dQ$. Igualando este trabajo al incremento de energía potencial elástica dado por (a) resulta:

$$dU = \delta\, dQ = \frac{\partial U}{\partial Q} dQ$$

o bien,

$$\boldsymbol{\delta = \frac{\partial U}{\partial Q}} \qquad \textbf{(13–4)}$$

Esto significa que la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a una de las fuerzas exteriores es igual al desplazamiento de su punto de aplicación en la dirección de dicha fuerza.

Aplicando el teorema de Castigliano a una barra en la que la energía de deformación sea la suma de las siguientes integrales:

$$U = \int \frac{P^2\, dx}{2AE} + \int \frac{T^2\, dx}{2JG} + \int \frac{M^2\, dx}{2EI}$$

para calcular el desplazamiento $\delta = \partial U / \partial Q$, no es preciso hacer la integración para luego derivar; es preferible derivar dentro del signo integral antes de integrar, lo cual puede hacerse, ya que Q no es función de x. Con esto, el desplazamiento de Q en su dirección viene dado por:

$$\boldsymbol{\delta = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int \frac{P \dfrac{\partial P}{\partial Q} dx}{AE} + \int \frac{T \dfrac{\partial T}{\partial Q} dx}{JG} + \int \frac{M \dfrac{\partial M}{\partial Q} dx}{EI}} \qquad \textbf{(13–5)}$$

Si en el punto cuyo desplazamiento se trata de obtener no hay aplicada fuerza alguna, o lo está en dirección distinta de la que interesa, se puede aplicar una fuerza ficticia Q en la dirección en la cual se quiere hallar el desplazamiento, fuerza que, *después* de derivar, pero *antes* de integrar, se puede igualar a cero.

En el método del trabajo virtual, se aplica una carga ficticia unitaria, por ejemplo 1.0 N, en lugar de Q. Las derivadas $\partial P / \partial Q$ y $\partial M / \partial Q$ que nombraremos con u y m, son pre-

cisamente los valores de la fuerza axial y del momento, producidos por la carga unidad aplicada. Para que se cumpla la ecuación de dimensiones en (13-5) hay que poner

$$1.0\ \text{N} \times \delta = \int \frac{Pu\,dx}{AE} + \int \frac{Mm\,dx}{EI} \qquad (13\text{–}6)$$

Esto mismo resultado se puede obtener por un razonamiento distinto igualando el trabajo total exterior al trabajo interno. Por brevedad se ha indicado aquí como un caso particular del teorema de Castigliano, lo que permite comprobar la equivalencia de ambos métodos. Los ejemplos que se insertan a continuación, muestran la aplicación de ambos métodos, y se verá también en ellos una interpretación física de la integral $\int (Mm/EI)dx$, que simplifica los cálculos.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

1301. Una barra de línea media circular de radio R y situada en un plano horizontal, está empotrada en un extremo como se indica en la figura 13-9a. Determinar el desplazamiento vertical del extremo A, bajo la acción de la fuerza también vertical P aplicada a este punto.

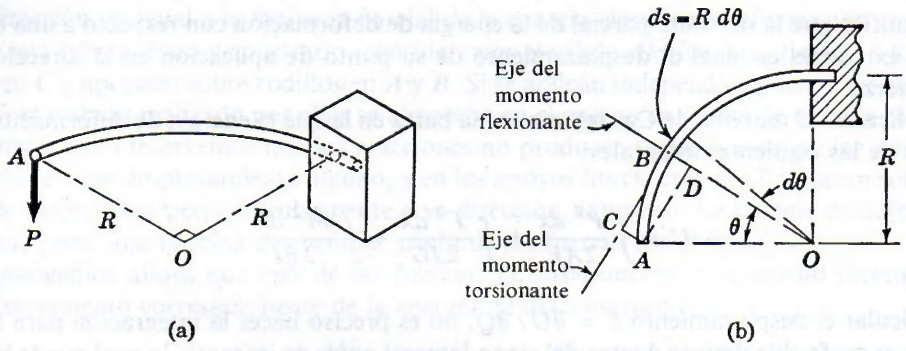


Figura 13-9. Deflexión en el extremo de una barra de línea media circular, situada en un plano horizontal.

Solución: La carga vertical P producirá tanto flexión como torsión en cada elemento diferencial de longitud $ds = R\,d\theta$ de la barra. Como se indica en planta en la figura 13-9b, el brazo del momento torsionante (con respecto al eje BC del elemento diferencial de barra) es $AC = BD = OB - OD = R - R\cos\theta$, y el brazo del momento flexionante (con respecto al eje BO del elemento de barra) es $AD = R\,\text{sen}\,\theta$. Por tanto:

$$T = PR(1 - \cos\theta) \quad \text{y} \quad \frac{\partial T}{\partial P} = R(1 - \cos\theta)$$

$$M = PR\,\text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial P} = R\,\text{sen}\,\theta$$

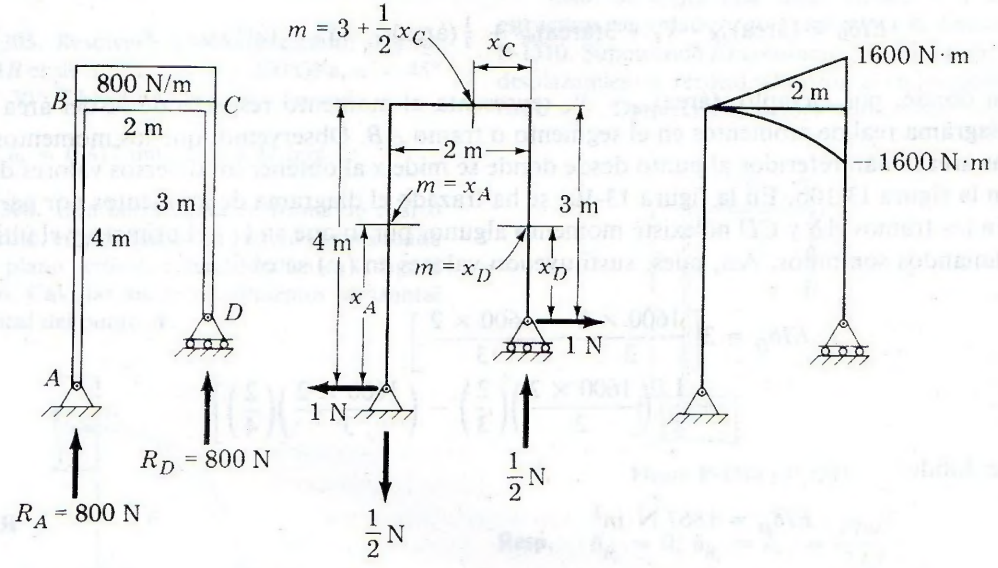
Aplicando la ecuación (13-5) se obtiene:

$$\delta = \frac{1}{JG}\int T\frac{\partial T}{\partial P}\,ds + \frac{1}{EI}\int M\frac{\partial M}{\partial P}\,ds$$
$$= \frac{1}{JG}\int_0^{\pi/2} PR(1-\cos\theta)\big[R(1-\cos\theta)\big]R\,d\theta$$
$$+ \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} PR\,\text{sen}\,\theta(R\,\text{sen}\,\theta)R\,d\theta$$

Integrando y simplificando,

$$\delta = \frac{PR^3}{JG}\left(\frac{3\pi-8}{4}\right) + \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad \textbf{Resp.}$$

1302. Un pórtico asimétrico cargado como indica la figura 13-10a, está articulado en A y apoyado en D. Suponiendo EI constante, determinar el desplazamiento horizontal del apoyo D. Despreciar el efecto de las deformaciones axiales.



(a) Carga real (b) Carga ficticia (c) Diagrama de momentos de la carga real

Figura 13-10.

Solución: En este ejemplo se aplica la ecuación (13-6)*, $\delta = \int \frac{Mm\,dx}{EI}$.

* No suele escribirse el coeficiente 1.0 N de δ, pero se sobreentiende que existe para que haya homogeneidad de dimensiones.

Debido a la discontinuidad de la ecuación de momentos en los extremos de cada barra, la ecuación se escribe en la forma siguiente:

$$\delta_D = \int_A^B \frac{Mm\,dx}{EI} + \int_B^C \frac{Mm\,dx}{EI} + \int_C^D \frac{Mm\,dx}{EI} \qquad (a)$$

Los valores correspondientes de m se determinan en el diagrama de cuerpo libre de la figura 13-10b, en donde se ha aplicado en D una carga ficticia unidad en la dirección del desplazamiento pedido. Para ello, se calculan las reacciones mediante las ecuaciones de la estática y, luego, de acuerdo con la definición de momento flexionante, se obtiene en cada tramo, la expresión del valor correspondiente de m. Sustituyendo estos valores de m en (a) y teniendo en cuenta que EI es constante, resulta:

$$EI\delta_D = \int_A^B x_A M\,dx + \int_B^C \left(3 + \frac{1}{2}x_C\right) M\,dx + \int_C^D x_D M\,dx \qquad (b)$$

Estas integrales tienen el mismo sentido físico que se dijo en el estudio del método del área de momentos (Sec. 6-3) y se pueden expresar, por tanto, en la forma:

$$EI\delta_D = (\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A + 3(\text{área})_{BC} + \tfrac{1}{2}(\text{área})_{BC} \cdot \bar{x}_C + (\text{área})_{CD} \cdot \bar{x}_D \qquad (c)$$

en donde, por ejemplo, $(\text{área})_{AB} \cdot \bar{x}_A$ representa el momento respecto de A del área del diagrama real de momentos en el segmento o tramo AB. Observemos que los momentos de las áreas están referidos al punto desde donde se mide x al obtener los diversos valores de m en la figura 13-10b. En la figura 13-10c se ha trazado el diagrama de momentos por partes. En los tramos AB y CD no existe momento alguno, por lo que en (c) el primero y el último sumandos son nulos. Así, pues, sustituyendo valores en (c) se obtiene:

$$EI\delta_D = 3\left[\frac{1600 \times 2}{2} - \frac{1600 \times 2}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1600 \times 2}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1600 \times 2}{3}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\right]$$

de donde:

$$EI\delta_D = 1867\ \text{N}\cdot\text{m}^3 \qquad \textbf{Resp.}$$

Si el resultado fuera negativo, significaría simplemente que el desplazamiento de D sería en sentido opuesto al de la carga unitaria aplicada.

PROBLEMAS

1303. Determinar el valor de $EI\delta$ en el centro del claro en una viga simplemente apoyada en sus extremos, de longitud L, que soporta una carga uniformemente distribuida de w N/m sobre su mitad derecha.

1304. Como se indica en la figura P-1304, dos varillas de aluminio AB y BC, articuladas en A y C a apoyos rígidos, soportan en B una carga vertical de 20 kN. Si las dos varillas tienen la misma sección recta de 400 mm^2 y E = 70 GPa, cal-

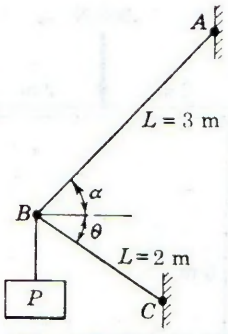


Figura P-1304 y P-1305.

cular los desplazamientos horizontal y vertical del punto B. Tómese $\alpha = 30°$ y $\theta = 30°$.

Resp. $\delta_h = 0.412$ mm; $\delta_v = 3.57$ mm

1305. Resolver el problema anterior si la varilla AB es de acero, con $E = 200$ GPa, $\alpha = 45°$ y $\theta = 30°$. El resto de los datos no varía.

Resp. $\delta_h = 0.417$ mm; $\delta = 1.37$ mm

1306. Una barra curva en forma de cuarto de círculo, empotrada en un extremo, está situada en un plano vertical, como se indica en la figura P-1306. Calcular los desplazamientos horizontal y vertical del punto A.

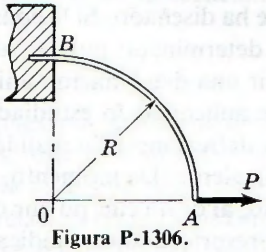


Figura P-1306.

1307. Una barra en forma de media circunferencia está situada en un plano vertical, como indica la figura P-1307. Determinar el desplazamiento horizontal del punto C y el vertical del punto B.

Resp. $\delta_{C_h} = \dfrac{PR^3\pi}{2EI}$; $\delta_{B_v} = \dfrac{PR^3}{2EI}$

1308. Repetir el problema anterior si P está aplicada en C, pero verticalmente hacia abajo.

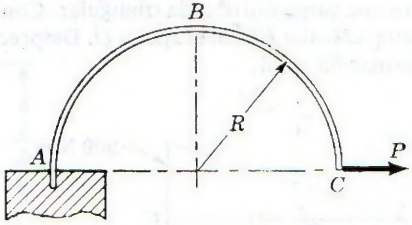


Figura P-1307, P-1308, P-1309

1309. En el problema 1307, si la carga P está aplicada en C, perpendicularmente al plano ABC, calcular el desplazamiento de C en la dirección de la carga.

Resp. $\dfrac{PR^3}{JG}\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) + \dfrac{PR^3}{EI}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

1310. Se aplica una carga vertical P a la estructura en voladizo que representa la figura P-1310. Suponiendo EI constante, determinar los desplazamientos vertical y horizontal en los puntos B y C. Despreciar la deformación axial.

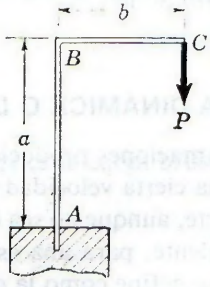


Figura P-1310 y P-1311.

Resp. $\delta_{B_v} = 0$; $\delta_{B_h} = \delta_{C_h} = \dfrac{Pba^2}{2EI}$;

$$\delta_{C_v} = \frac{Pb^2}{EI}\left(a + \frac{b}{3}\right)$$

1311. En el problema anterior, la carga P está aplicada perpendicularmente al plano ABC. Determinar los desplazamientos de B y C en la dirección de la carga.

Resp. $\delta_C = \dfrac{Pab^2}{JG} + \dfrac{P}{3EI}(a^3 + b^3)$

1312. El pórtico de la figura P-1312 está articulado en A y apoyado en D mediante rodillos.

Soporta una carga distribuida triangular. Con EI constante, calcular $EI\delta$ en el apoyo D. Despreciar la deformación axial.

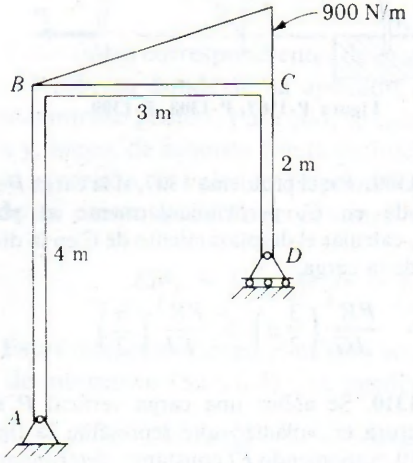


Figura P-1312.

Resp. $EI\delta = 2970 \text{ N} \cdot \text{m}^3$

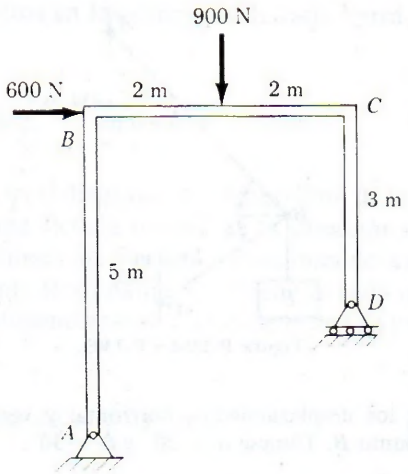


Figura P-1313.

1313. Se aplican cargas horizontal y vertical a la estructura de la figura P-1313. Si EI es constante y se desprecia la deformación axial, determinar el valor de $EI\delta$ en el apoyo D.

Resp. $EI\delta = 58.2 \text{ kN} \cdot \text{m}^3$

13-6. CARGA DINÁMICA O DE IMPACTO

Las deformaciones producidas en un sólido elástico por el choque de una masa que se mueve con una cierta velocidad en el momento del impacto dan lugar a que el sólido actúe como un resorte, aunque no sea ésta la función para la que se ha diseñado. Si la constante de resorte equivalente, para una estructura determinada y un determinado punto y dirección del impacto, se define como la carga necesaria para producir una deformación unitaria, en cada caso se puede determinar el valor de dicha constante aplicando lo estudiado en los capítulos anteriores sobre desplazamientos, deformaciones y deflexiones. En realidad, no es necesario determinar el valor de la constante del resorte equivalente. De momento, consideraremos que el problema del impacto es análogo, en todo caso, al de un cuerpo que cae desde una cierta altura y que es detenido en su movimiento por un resorte, como se indica en la figura 13-11. La masa m tiene velocidad nula en el momento de soltarla, así como en el momento en que el resorte alcanza su máxima deformación dinámica δ. En estas condiciones, la variación de energía cinética es cero entre estas dos posiciones, por lo que el trabajo total producido por m también es nulo. En consecuencia*:

$$mg(h + \delta) - \tfrac{1}{2}k\delta^2 = 0 \qquad (a)$$

* Se supone que la masa permanece en contacto con el resorte. Pero, realmente, parte de la energía se disipa en el choque, por lo que la deformación real es menor que la dada por (*a*).

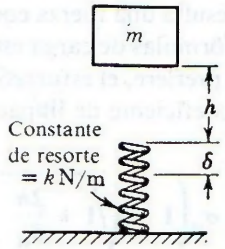


Figura 13-11.

siendo $mg(h + \delta)$ el trabajo realizado por la gravedad en su dirección y sentido, y $\frac{1}{2}k\delta^2$ el trabajo resistente realizado por el resorte equivalente. La ecuación (a) se puede describir en la forma

$$\delta^2 - 2\frac{mg}{k}\delta - 2\frac{mg}{k}h = 0$$

Sustituyendo mg/k por δ_{st}, que sería precisamente la deformación estática producida por la aplicación gradual de la fuerza mg sobre el resorte equivalente, el valor que se obtiene para δ es:

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{(\delta_{st})^2 + 2\delta_{st}h} \qquad (b)$$

Aunque ésta es la expresión general, los casos límites también son interesantes. Si h es muy grande con respecto a δ, se puede despreciar $mg\delta$ frente a mgh en la ecuación (a), con lo que la expresión (b) se transforma en:

$$\delta = \sqrt{2\frac{mg}{k}h} = \sqrt{2\delta_{st}h} \qquad (c)$$

Por el contrario, cuando h se anula, es decir, que se aplica la carga bruscamente, pero con velocidad nula, la ecuación (a) se reduce a:

$$\delta = 2\frac{mg}{k} = 2\delta_{st} \qquad (d)$$

Debido pues a la aplicación brusca de una carga, la deformación, y como consecuencia, los esfuerzos, que son directamente proporcionales a la misma, son el doble de los que produciría la misma carga estática o gradualmente aplicada.

La relación entre la máxima deformación dinámica y la deformación estática da un valor que se puede llamar *coeficiente de impacto*. Se determina fácilmente escribiendo la ecuación (b) en la forma:

$$\delta = \delta_{st} + \delta_{st}\sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = \delta_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}\right)$$

de donde el coeficiente de impacto es:

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} \qquad (13\text{–}7)$$

Multiplicando mg por este coeficiente resulta una fuerza equivalente P (equivalente al impacto de mg), que puede emplearse en las fórmulas de carga estática para determinar el esfuerzo o la deformación máxima. O bien, si se prefiere, el esfuerzo producido por la aplicación estática de mg puede multiplicarse por el coeficiente de impacto.

$$\sigma_{máx} = \sigma_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}\right) \tag{13-8}$$

Apliquemos ahora estas expresiones a varios tipos de impacto.

Tensión

Una de las formas más sencillas de producir un efecto dinámico en tensión es la indicada en la figura 13-12. Una masa m cae, deslizando libremente guiada por la varilla, desde una altura h, hasta tropezar con un tope colocado en el extremo de la misma, produciendo un alargamiento dinámico δ. Suponiendo que los esfuerzos permanecen dentro del límite elástico, y que δ sea despreciable en comparación con h, al sustituir δ_{st} en la ecuación (c) por su valor $\delta_{st} = mgL/AE$, resulta:

$$\delta = \sqrt{\frac{2L}{AE} mgh} \tag{e}$$

El esfuerzo correspondiente en la varilla es:

$$\sigma = \frac{\delta}{L} E = \sqrt{\frac{2E}{AL} mgh} \tag{f}$$

Sustituyendo mgh por la correspondiente energía cinética $mv^2/2$ puede emplearse la ecuación para determinar el esfuerzo dinámico producido por el impacto de una masa m que choca con velocidad v:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E}{AL} \cdot \frac{mv^2}{2}} \tag{g}$$

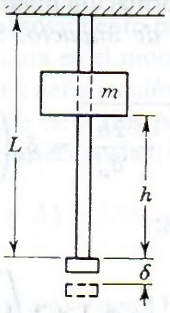


Figura 13-12. Carga dinámica o de impacto en una varilla.

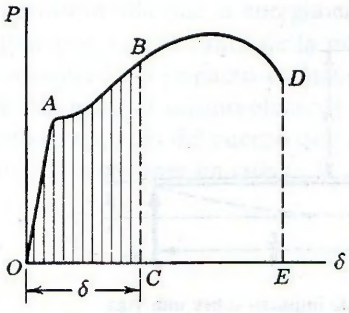


Figura 13-13.

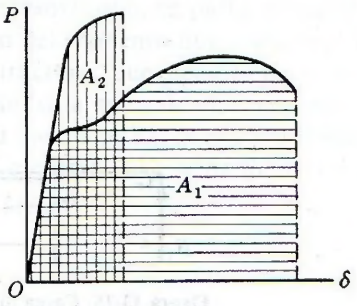


Figura 13-14.

Estas ecuaciones muestran que para reducir el valor de los esfuerzos debidos al impacto o a cargas dinámicas, se debe emplear un material con valores más pequeños de E, o aumentar la sección A o la longitud L de la varilla. Como se observa, esto es completamente distinto de lo que ocurre con las cargas estáticamente aplicadas, en donde el esfuerzo es independiente del valor de E y de la longitud L.

Hasta ahora se ha supuesto que el esfuerzo es inferior al límite de proporcionalidad. Cuando este límite se sobrepasa, el problema es algo más complejo, ya que el alargamiento no es proporcional a la carga. Sin embargo, se puede encontrar un procedimiento para determinar cuándo se producirá la ruptura debido a un impacto. Para ello, suponiendo que la forma del diagrama del ensayo a tensión no dependa de la velocidad con que se estira la barra, el área $OABC$ de la figura 13-13 representa el trabajo realizado contra la barra para producir un alargamiento δ. Este trabajo debe ser igual a $mg(h + \delta)$ producido en la caída de la carga mg. Cuando $mg(h + \delta)$ es igual o superior al área total $OADE$, el efecto del impacto será la ruptura de la barra.

La resistencia de una barra al impacto depende, pues, de la ductilidad del material. La figura 13-14 representa, superpuestos, los diagramas de ensayo a tensión de un acero de alta resistencia y poca ductilidad, y de un acero de menor resistencia pero gran ductilidad. El área rayada horizontalmente A_1 es mucho mayor que el área rayada verticalmente A_2, por lo que el acero más dúctil puede absorber mayor cantidad de energía y por tanto, soportará un impacto mayor. Por este motivo, en elementos de máquinas o de estructuras que han de estar sometidos al efecto de impactos es preferible emplear aceros dúctiles más que de alta resistencia.

En relación con lo expuesto, el área total del diagrama esfuerzo-deformación se suele denominar *módulo de tenacidad*, y representa la energía almacenada por unidad de volumen hasta la ruptura. Su valor es, aproximadamente,

$$U_r = \frac{\sigma_c + \sigma_u}{2} \cdot \epsilon_u \qquad (h)$$

siendo σ_c y σ_u el esfuerzo en el punto de cedencia y el esfuerzo último, respectivamente, y ϵ_u la deformación con el esfuerzo último. Al área parcial del diagrama hasta el esfuerzo en el límite elástico se la suele llamar *módulo de resiliencia* y representa la energía por unidad de volumen que puede ser absorbida dentro de la zona elástica sin dar lugar a una deforma-

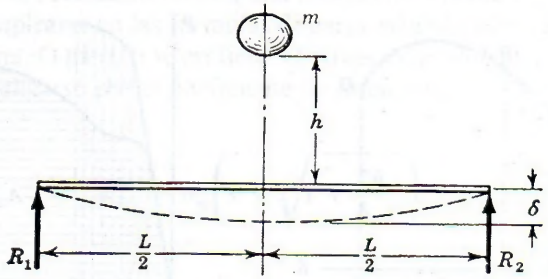


Figura 13-15. Carga dinámica o de impacto sobre una viga.

ción permanente. Si la relación esfuerzo-deformación es lineal, su valor es

$$U = \frac{1}{2}\sigma_e \epsilon_e = \frac{1}{2}\sigma_e \cdot \frac{\sigma_e}{E} = \frac{\sigma_e^2}{2E} \qquad (i)$$

Flexión

En la figura 13-15 una viga simplemente apoyada en sus extremos se somete al impacto de una masa m que cae libremente desde una altura h hasta golpear a la viga en su punto medio, dando lugar a una deflexión dinámica δ. Si no se excede el límite de proporcionalidad, se pueden aplicar las ecuaciones (b), (c) y (d). Si h es grande comparada con δ_{st}, se tiene:

$$\delta = \sqrt{2h\delta_{st}}$$

En este caso, $\delta_{st} = mgL^3/48EI$, según la tabla 6-2, por lo que el coeficiente de impacto es:

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{96EIh}{mgL^3}}$$

La fórmula de la flexión da para el esfuerzo estático

$$\sigma_{st} = \frac{Mc}{I} = \frac{mgL}{4} \cdot \frac{c}{I}$$

por lo que el esfuerzo dinámico máximo es:

$$\sigma = \frac{\delta}{\delta_{st}}\sigma_{st} = \sqrt{\frac{6mghEc^2}{LI}} \qquad (j)$$

Limitaciones

El estudio realizado supone que el trabajo total producido por el peso al caer, o la energía cinética en el momento del impacto, se puede almacenar íntegramente en la estructura resistente en forma de energía elástica de deformación. Esta hipótesis no se cumple nunca por las siguientes razones: si la velocidad del impacto es grande, la deceleración de la masa

móvil puede ser tan rápida que la energía cinética se transforme, en parte, en calor y en deformaciones plásticas locales tanto de la masa como del elemento que soporta el impacto. Incluso si la velocidad del impacto es menor, la estructura, que siempre tiene una rigidez grande, puede dar lugar al mismo efecto. Finalmente, si la masa de la estructura resistente es grande en relación con la del cuerpo que choca, su inercia puede producir resultados análogos, es decir, hay que tener en cuenta la masa del elemento que se ha de mover.

PROBLEMAS

1314. Una masa de 50 kg atada al extremo de un alambre de acero de 30 m de longitud cae desde una altura de 2 m. La sección del alambre es de 250 mm^2 y se supone que el módulo elástico es $E = 100$ GPa. Calcular el esfuerzo máximo en el alambre.

Resp. $\sigma = 164$ MPa

1315. Un ascensor cuya masa es 2 Mg desciende a una velocidad de 2 m/s. El tambor de accionamiento se detiene bruscamente cuando se han desenrollado 30 m de cable. Si la sección recta de éste es de 600 mm^2 y $E = 100$ GN/m^2, calcular el esfuerzo máximo que aparece en el cable, despreciando el peso del mismo.

1316. Una masa de 6 kg cae desde una altura de 0.8 m golpeando la cabeza de un perno de acero, como se indica en la figura P—1316. Suponiendo que toda la energía es absorbida por el perno, calcular el espesor e de su cabeza si el esfuerzo cortante, en la superficie cilíndrica de unión de la cabeza, no debe exceder de 80 MN/m^2, suponiendo que $E = 200$ GN/m^2.

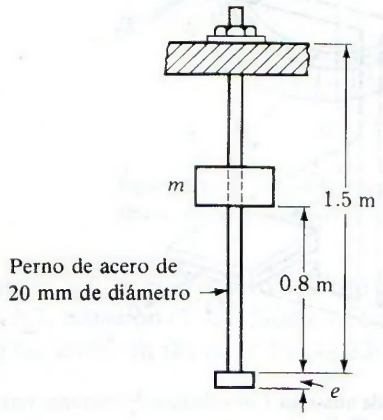


Figura P-1316.

Resp. $e = 12.5$ mm

1317. Una viga simplemente apoyada, de longitud L y sección rectangular, es golpeada en su centro por una masa m que cae desde una altura h. Demostrar que el valor del esfuerzo máximo en la viga, es $\sigma^2 = 18\ mgh\ E/AL$.

1318. Calcular el coeficiente de impacto para una viga simplemente apoyada de 3 m de longitud sometida al impacto de una masa de 900 kg que cae desde una altura de 2.5 m en un punto a 1.0 m de uno de los apoyos. Supóngase que la sección de la viga es rectangular y mide 40 mm de ancho por 90 mm de altura y que $E = 200 \times 10^9$ N/m^2. Despreciar el peso de la viga.

Resp. 25.9

1319. Una viga de sección rectangular de 60 mm de ancho por 100 mm de altura se emplea como viga en voladizo de 2 m de longitud. Una masa de 40 kg cae desde una altura de 0.2 m golpeando su extremo libre. Calcular el esfuerzo máximo y la deflexión máxima en el punto de impacto; $E = 200$ GPa.

Resp. $\sigma = 162$ MPa;
$\delta = 21.5$ mm

1320. Un furgón de ferrocarril de 12 Mg de masa se mueve a razón de 1.2 m/s cuando choca con un tope que tiene un juego de 8 resortes en paralelo. Cada uno de los resortes tiene 10 espiras de varilla de acero de 25 mm de diámetro, siendo el radio medio de la espira de 100 mm. Aplicando la fórmula de Wahl dada en la ecuación (3-10), determinar el esfuerzo máximo desarrollado en los resortes, si $G = 80$ GPa.

13-7. ESFUERZOS CORTANTES EN ELEMENTOS DE PARED DELGADA SOMETIDOS A FLEXIÓN. FLUJO DE CORTANTE

La fórmula desarrollada en la sección 5-7 para determinar el esfuerzo cortante en la flexión, también se puede aplicar al cálculo del esfuerzo cortante en las alas de los perfiles en I, en U y otros tipos. En la figura 13-16 se explica la existencia de este esfuerzo cortante al estudiar el diagrama de cuerpo libre de un elemento de las alas, separado mediante dos secciones adyacentes de la viga y una sección longitudinal. La línea punteada representa, en perspectiva, una viga en voladizo en la que se han separado los elementos que figuran con línea continua. Si la fuerza vertical P actúa hacia abajo, el ala superior está sometida a tensión, siendo T_2 mayor que T_1, ya que el momento en la sección 2 es mayor que en la sección 1. Para el equilibrio del elemento en esta ala superior, tiene que existir una fuerza cortante F_s que actúe tal como se indica en la figura, y que dé lugar a la existencia de la fuerza cortante lateral H_1. La dirección de H_1 determina la dirección de los esfuerzos cortantes en el ala superior.

Análogamente, las fuerzas de compresión C_2 y C_1 que actúan en el elemento correspondiente del ala inferior, requieren la existencia de la fuerza cortante H_2 y, por tanto, en el ala inferior los esfuerzos cortantes seguirán esta dirección. Debido, pues, a que el ala superior está sometida a tensión y la inferior a compresión, los esfuerzos cortantes tienen sentidos opuestos en estos patines.

El valor de los esfuerzos cortantes longitudinales en las alas se determina mediante la ecuación (5-4), siempre que el espesor sea pequeño, para que pueda suponerse, sin error apreciable, que la distribución de este esfuerzo en el espesor del ala es uniforme. Más conve-

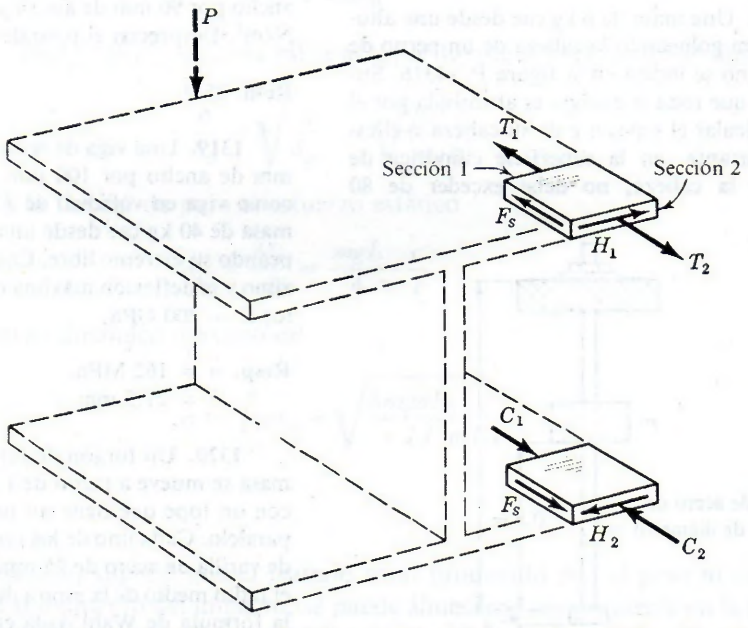


Figura 13-16. Fuerzas cortantes laterales H_1 y H_2 en las alas o patines de una viga I en voladizo. El cortante vertical exterior actúa hacia abajo.

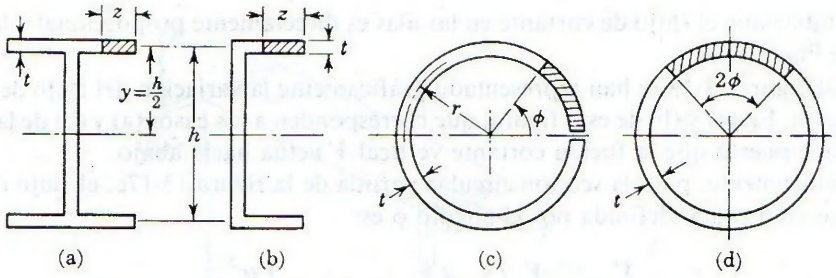


Figura 13-17.

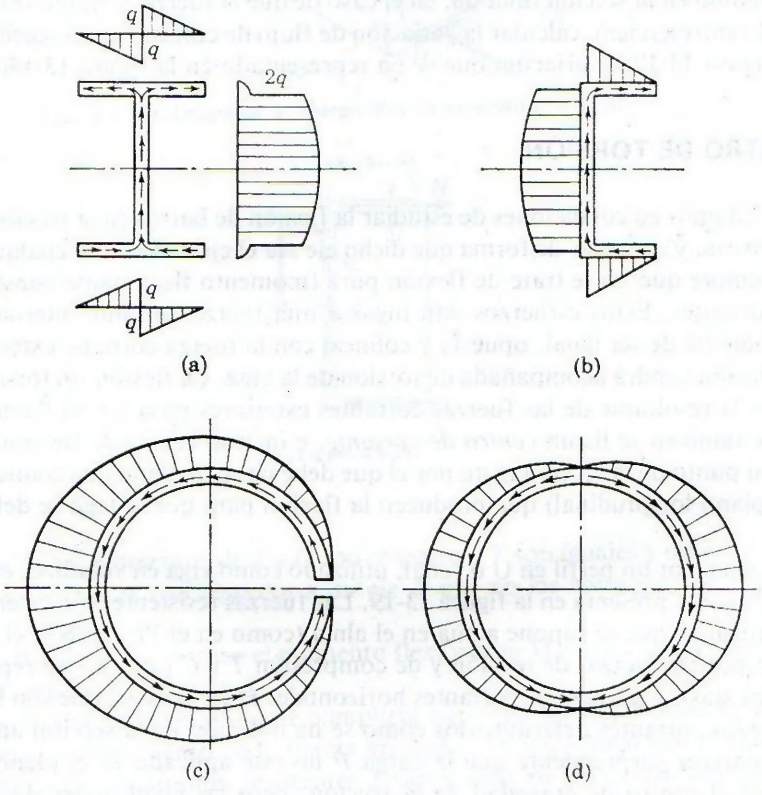


Figura 13-18. Variación del flujo de cortante. En (a) y (b) la fuerza cortante V es hacia abajo; en (c) y (d) hacia arriba.

niente es aplicar el concepto de flujo de cortante que se citó en la sección 3-5 y luego en la sección 5-7, ecuación (5-4a). Según este concepto, a una distancia z del borde del ala, tanto en el caso (a) como en (b) de la figura 13-17, la ecuación (5-4a) permite escribir:

$$q = \frac{V}{I} Q = \frac{V}{I} (tz) y = \left(\frac{Vht}{2I} \right) z \qquad (a)$$

lo cual indica que el flujo de cortante en las alas es directamente proporcional a la distancia al borde libre del ala.

En la figura 13-18 se han representado gráficamente la variación del flujo de cortante y su dirección. En (a) y (b) de esta figura, que corresponden a los casos (a) y (b) de la figura 13-17, se ha supuesto que la fuerza cortante vertical V actúa hacia abajo.

Análogamente, para la sección circular partida de la figura 13-17c, el flujo de cortante en una sección radial definida por el ángulo ϕ es:

$$q = \frac{V}{I} Q = \frac{V}{I} \int_0^{\phi} r \operatorname{sen} \phi (tr\, d\phi) = \frac{Vtr^2}{I} (1 - \cos \phi) \qquad (b)$$

La figura 13-18c representa cómo varía el flujo de cortante, desde cero en la hendidura hasta un máximo en la sección opuesta, en el caso de que la fuerza cortante vertical actúe hacia arriba. Como ejercicio, calcular la variación de flujo de cortante en la sección circular entera de la figura 13-17d, variación que se ha representado en la figura 13-18d.

13-8. CENTRO DE TORSIÓN

Ahora estamos en condiciones de estudiar la flexión de barras cuya sección tenga un solo eje de simetría, y cargadas de forma que dicho eje sea el eje neutro. En cualquier sección de una viga, siempre que no se trate de flexión pura (momento flexionante constante), existen esfuerzos cortantes. Estos esfuerzos dan lugar a una fuerza cortante interna o resistente, cuya resultante ha de ser igual, opuesta y colineal con la fuerza cortante exterior; si esto no ocurre, la flexión vendrá acompañada de torsión de la viga. La flexión sin torsión tiene lugar solamente si la resultante de las fuerzas cortantes exteriores pasa por el llamado *centro de torsión*, que también se llama *centro de cortante*, e incluso centro de flexión. El centro de torsión es un punto de la sección recta por el que debe pasar el plano que contiene las fuerzas exteriores (plano longitudinal) que producen la flexión para que la viga se deforme sin torsión.

Empecemos por un perfil en U o canal, utilizado como viga en voladizo, cuyo diagrama de cuerpo libre se representa en la figura 13-19. Las fuerzas resistentes consisten en: la fuerza cortante vertical V_r que se supone actúa en el alma (como en el Prob. 566), el par resistente M_r formado por las fuerzas de tensión y de compresión T y C (que se han representado actuando en las alas), y las fuerzas cortantes horizontales H en las alas, que son las resultantes de los esfuerzos cortantes determinados como se ha indicado en la sección anterior.

Puede parecer sorprendente que la carga P no esté aplicada en el plano longitudinal que pasa por el centro de gravedad de la sección, pero las condiciones de equilibrio demuestran que debe aplicarse tal como se indica en la figura 13-19. Más adelante se calcula su posición. De momento veamos cómo se cumplen las seis ecuaciones o condiciones de equilibrio estático en el espacio tridimensional.

1. $\Sigma X = 0$ se satisface por el equilibrio entre las fuerzas T y C, iguales y opuestas.
2. $\Sigma Y = 0$ se cumple porque la fuerza cortante vertical resistente V_r equilibra a la fuerza cortante vertical V producida por P.
3. $\Sigma Z = 0$ se satisface por la igualdad de las fuerzas H, opuestas en las dos alas, superior e inferior.
4. $\Sigma M_y = 0$ se cumple porque las fuerzas verticales no dan lugar a momento alguno

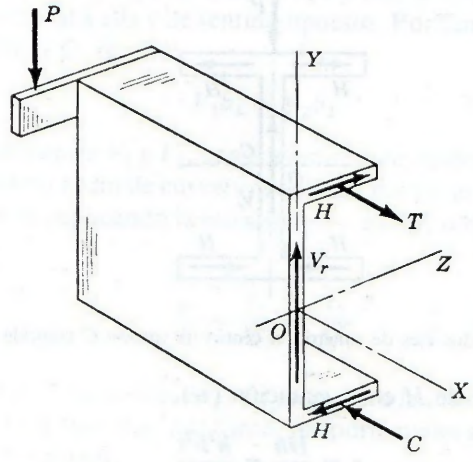


Figura 13-19. Diagrama de cuerpo libre de un perfil U o canal.

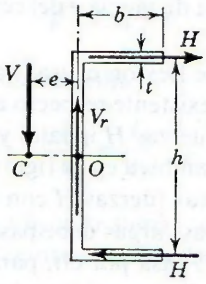


Figura 13-20.

respecto del eje Y, los momentos de T y C con respecto a Y son iguales y opuestos, y los producidos por las fuerzas H con respecto a un eje Y que no las corte son también iguales y opuestos.

5. $\Sigma M_z = 0$ se satisface porque el momento flexionante M es equilibrado por el momento resistente M_r producido por T y C.

6. $\Sigma M_x = 0$. Esta condición ha de cumplirse para que no exista torsión, y solamente puede satisfacerse si el momento de la fuerza aplicada con respecto al eje X, equilibra a los momentos de las fuerzas cortantes resistentes desarrolladas en la sección. Eligiendo el eje X de manera que pase por el centro del alma, se elimina el momento de V_r. En el dibujo de la sección, representado en las figuras 13-19 y 13-20, haciendo cero la suma de momentos con respecto a O resulta:

$$[\Sigma M_O = 0] \qquad Ve = Hh \qquad (a)$$

El valor de las fuerzas H en las alas es el producto del flujo de cortante medio (por ser lineal su variación) por la longitud del ala, y aplicando la ecuación (a) de la sección 13-7 se tiene:

$$H = q_{\text{med.}} \cdot L = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Vhtb}{2I}\right) b = \frac{Vhtb^2}{4I}$$

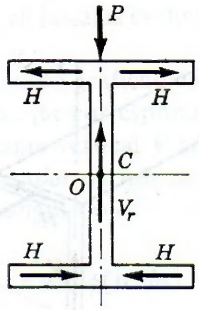


Figura 13-21. En una sección con dos ejes de simetría el centro de torsión C coincide con el centroide (o c.g.) O.

Sustituyendo este valor de H en la ecuación (a),

$$e = \frac{Hh}{V} = \frac{h^2b^2t}{4I} \tag{13–9}$$

El punto C, situado en el eje neutro a la distancia e del centro del alma, es el centro de torsión de la sección.

En una sección en I, las fuerzas de flexión causan también fuerzas cortantes horizontales H en las alas, pero, por la simetría existente respecto al plano vertical longitudinal en cada ala, superior e inferior, aparecen las fuerzas H iguales y opuestas a derecha e izquierda, como se indica en la figura 13-21. (Ver también en la figura 13-18a, el sentido del flujo de cortante.) Por tanto, los momentos de estas fuerzas H con respecto al centro de la gravedad de la sección se equilibran, y el plano de las cargas debe pasar por el centro mencionado (ya que la fuerza cortante vertical resistente V_r pasa por él), para evitar la torsión. Por tanto, en las secciones I y, en general, en todas aquellas que tienen dos ejes de simetría perpendiculares, el centro de torsión está situado en el centro de gravedad, es decir, en el punto de intersección de los dos ejes de simetría.

En una I de alas desiguales y de corto espesor de patines y alma, colocada en la posición que indica la figura 13-22, la resistencia del alma a la flexión es despreciable y puede suponerse, por tanto, que la fuerza cortante V será soportada por las fuerzas cortantes resisten-

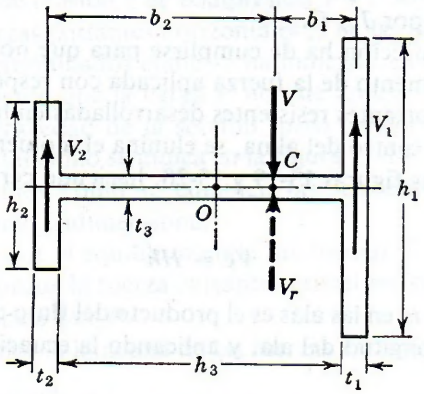


Figura 13-22.

tes V_1 y V_2 que actúan en el centro de cada ala. Para evitar la torsión, la resultante V_r de V_1 y V_2 debe ser igual a V, colineal a ella y de sentido opuesto. Por tanto, tomando momentos respecto del centro de torsión C, resulta:

$$V_1 b_1 = V_2 b_2 \qquad (b)$$

Para obtener otra relación entre V_1 y V_2, consideremos que las dos alas se deforman como vigas separadas, con el mismo radio de curvatura en cada punto, es decir, con elásticas iguales. En estas condiciones, ya sea aplicando la ecuación $\rho = EI/M$, o bien, la ecuación de la elástica, se obtiene:

$$\frac{\rho}{E} = \frac{I_1}{M_1} = \frac{I_2}{M_2} \qquad (c)$$

Ahora bien, los momentos flexionantes M_1 y M_2 son, para la misma distribución de la fuerza exterior, proporcionales a la fuerza y, por tanto, proporcionales a V_1 y V_2. En consecuencia, la ecuación (c) se transforma en:

$$\frac{I_1}{V_1} = \frac{I_2}{V_2} \qquad (d)$$

que, junto con la ecuación (b), permite escribir:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{I_2}{I_1} \qquad \textbf{(13–10)}$$

Por tanto, conociendo la relación b_1 / b_2 y su suma, se determina la posición del centro de torsión C, que queda situado entre el centro de gravedad de la sección y el centro del ala que tenga mayor momento de inercia.

Si solamente hay un ala, como en la sección en T de la figura 13-23, al suponer también despreciable la resistencia a la flexión en el alma, el centro de torsión coincide con el centro de gravedad del patín. En general, para cualquier sección formada por dos rectángulos estrechos, como el flujo de cortante discurre a lo largo del eje longitudinal en cada uno de ellos, el centro de torsión estará en la intersección de estos dos ejes longitudinales, como se indica en la figura 13-24.

En una sección en Z, el procedimiento es igual que en una sección en U. En la figura 13-25a se representa el flujo de cortante, y en la figura 13-25b las fuerzas cortantes resultan-

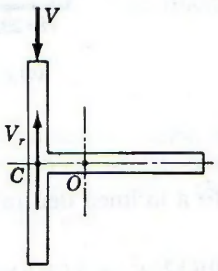


Figura 13-23.

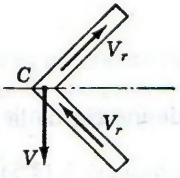


Figura 13-24.

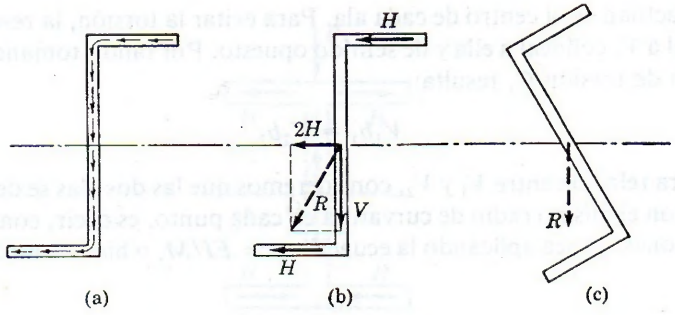


Figura 13-25. El centro de torsión en una sección en Z coincide con el c. g.

tes. La resultante de éstas en las dos alas es $2H$, que actúa en el centro de gravedad de la sección. Combinando esta resultante con la fuerza cortante en el alma, se obtiene la fuerza cortante total R en la sección. El centro de torsión coincide con el centro de gravedad O, pero el plano de las cargas debe estar orientado según R y, por tanto, se debe colocar la sección inclinada como se indica en la figura 13-25c cuando las cargas son verticales, si se quiere que la flexión tenga lugar en el mismo plano que el de las cargas.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1321. Si la fuerza cortante vertical que actúa en la sección en U de pared delgada de la figura 13-26 es de 2000 N, calcular y representar el flujo de cortante y determinar la posición del centro de torsión.

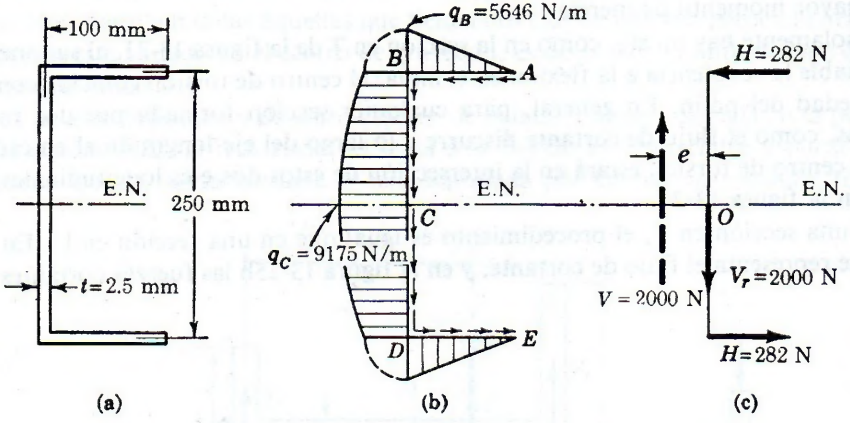


Figura 13-26.

Solución: El momento de inercia de la sección con respecto a la línea neutra es:

$$\left[I = \sum \left(\frac{bh^3}{12} + Ad^2 \right) \right] \qquad I = \frac{(2.5)(250)^3}{12} + 2(2.5)(100)(125)^2 = 11.07 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$= 11.07 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Debido al pequeño espesor del perfil, se puede considerar que el flujo de cortante actúa a lo largo de la línea media de la sección, $ABCDE$, como se indica en la figura 13-26b. En A, el flujo de cortante es nulo; en B, la ecuación (5-4a) da

$$q_B = \frac{V}{I} Q_{AB} = \frac{2000}{11.07 \times 10^{-6}} (2.5 \times 10^{-3})(100 \times 10^{-3}) \times (125 \times 10^{-3}) = 5646 \text{ N/m}$$

En un punto cualquiera C puede escribirse directamente $q_C = (V/I)\, Q_{AC}$, pero como Q_{AC} es el momento del área de A a C en relación con la línea neutra, se puede descomponer en la suma de los momentos de las áreas de A a B más el área de B a C, por lo que se puede expresar $q_C = (V/I)(Q_{AB} + Q_{BC})$, o bien, $q_B + (V/I)\, Q_{BC}$. En estas condiciones el flujo de cortante en C es:

$$q_C = q_B + \frac{V}{I} Q_{BC} = 5646 + \left[\frac{2000}{11.07 \times 10^{-6}} (2.5 \times 10^{-3}) \times (125 \times 10^{-3}) \left(\frac{125 \times 10^{-3}}{2} \right) \right]$$

$$= 5646 + 3529 = 9175 \text{ N/m}$$

Como se indica en la figura 13-26b, el flujo de cortante varía linealmente en AB, pero entre B y D varía en forma de arco parabólico. El valor medio en el alma es, pues, $5646 + \frac{2}{3}(3529) = 8000$ N/m. La fuerza cortante en el alma es $V_r = q_{med} \times L = 8000(0.250) = 2000$ N, que coincide con la fuerza cortante aplicada $V = 2000$ N. La fuerza cortante en cada ala es $H = q_{med} \times L = (\frac{1}{2} \times 5646)(0.100) = 282$ N.

Para evitar la torsión, la fuerza cortante exterior V debe estar a una distancia e a la izquierda de O, figura 13-26c, de manera que equilibre al momento torsionante producido por la fuerzas cortantes internas. Así pues,

$$[\Sigma M_O = 0] \qquad 2000\, e = 282\,(250) \qquad e = 35.3 \text{ mm}$$

El valor de e se puede calcular directamente de la ecuación (13-9), es decir,

$$e = \frac{h^2 b^2 t}{4I} = \frac{(250)^2 (100)^2 (2.5)}{4(11.07 \times 10^6)} = 35.3 \text{ mm}$$

Sin embargo, es más interesante aplicar el cálculo numérico indicado, que establecer directamente la ecuación (13-9), para comprender mejor el concepto de flujo de cortante, lo que facilitará su aplicación en problemas más complejos.

PROBLEMAS

1322. Determinar la posición del centro de torsión en la sección indicada en la figura 13-22, si $t_1 = t_2 = t_3 = 10$ mm, $h_1 = 150$ mm, $h_2 = 100$ mm y $h_3 = 180$ mm.

1323. Determinar la posición del centro de torsión en la sección de la figura 13-17c, que consiste en un cilindro de pared delgada, partido a lo largo de una generatriz. El espesor de la pared es e y el radio medio r.

Resp. $e = 2r$, medida a lo largo del eje de simetría desde el centro del cilindro, en dirección opuesta a la hendedura.

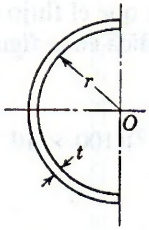


Figura P-1324.

1324. Demostrar que la posición del centro de torsión en el anillo semicircular delgado de la figura P-1324 viene dada por $e = 4r/\pi$ a la izquierda de O.

1325. La sección de pared delgada representada en la figura P-1325 consiste en un anillo

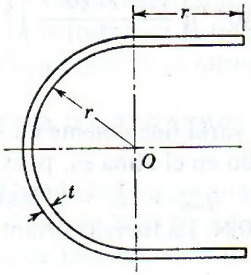


Figura P-1325.

semicircular de radio medio r, prolongado por dos partes rectas de longitud r. Comprobar que el centro de torsión está a una distancia $e = (tr^4/I)(\pi + 3)$ a la izquierda de O, y que para $r = 50$ mm y $t = 2.5$ mm, se obtiene $e = 86.0$ mm. ¿Es necesario conocer el valor del espesor t?

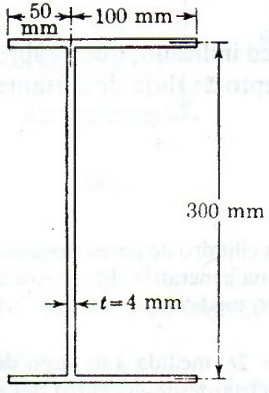


Figura P-1326.

1326. Si la fuerza cortante vertical a que queda sometida la sección de la figura P-1326 es de 3600 N, dibujar el diagrama de flujo de cortante y situar el centro de torsión.

Resp. $q = 3$ y 6 kN/m en la unión del patín y el alma; $d = 18.8$ mm a la izquierda del alma.

1327. Si la fuerza cortante vertical en la sección representada en la figura P-1327 es de 3000 N, trazar el diagrama de flujo de cortante y situar el centro de torsión. *Nota*: Aunque el flujo de cortante en AB y FE varía realmente en forma parabólica, puede suponerse sin error apreciable que varía linealmente.

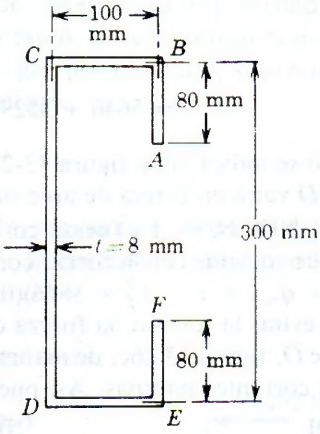


Figura P-1327.

Resp. $q_B = q_E = 3.01$ kN / m; $q_C = q_D = 8.14$ kN / m; $e = 62.8$ a la izquierda del centro del alma.

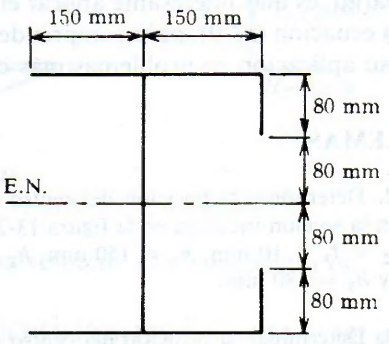


Figura P-1328.

1328. Situar el centro de torsión en la sección de pared delgada de la figura P-1328.

Resp. 27.5 mm a la izquierda del alma.

1329. Comprobar que el centro de torsión en el tubo de sección cuadrada y paredes delgadas, hendido en una esquina como indica la figura P-1329, dista $b/(2\sqrt{2})$ de la izquierda de la esquina opuesta a la abertura.

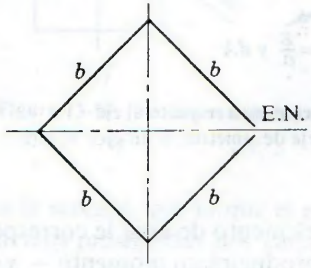


Figura P-1329.

1330. Una sección de pared delgada tiene la forma indicada en la figura P-1330. Las alas tienen una inclinación de $\frac{3}{4}$ con respecto a la horizontal. Determinar la posición del centro de torsión.

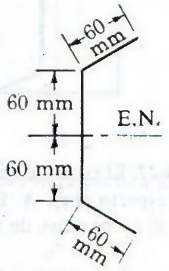


Figura P-1330.

Resp. 16.3 mm a la izquierda del alma.

13-9. FLEXIÓN ASIMÉTRICA

En la teoría de la flexión, desarrollada en el Capítulo 5, se hace la hipótesis de que las cargas transversales actúan en un plano longitudinal que pasa por uno de los ejes de simetría de la sección recta. En estas condiciones, la línea neutra pasa por el centro de gravedad de la sección y es perpendicular al plano de las cargas. En la sección precedente se ha generalizado la aplicación de las fórmulas de la flexión al caso de secciones con un solo eje de simetría, cargadas de forma que este eje fuera la línea neutra. En ambos casos, solamente es posible la flexión sin torsión si el plano de las cargas pasa por el centro de cortante, condición que se cumple automáticamente en el primer caso y había de ser satisfecha en el segundo obteniendo su posición como se ha indicado.

Una última condición que se cumple en estos casos, aunque no se ha hablado de ella, es que el plano de las cargas ha de ser paralelo a uno de los ejes principales de inercia de la sección, o bien, ha de contenerlo. Empecemos por el caso en que el plano de las cargas contenga a un eje de simetría, tal como el eje Y, en la figura 13-27. Al deducir la fórmula de la flexión, sección 5-2, se aplica la condición de equilibrio estático $\Sigma M_x = 0$, es decir, el momento flexionante aplicado se equilibra con el momento resistente producido por los esfuerzos normales, $M_x = \int y(\sigma\, dA)$.

Si las cargas exteriores actúan en el plano longitudinal que pase por el eje Y, el momento externo M_y es nulo*. Sin embargo, la fuerza diferencial $\sigma\, dA$ que actúa sobre un elemento cualquiera de la sección tiene un momento $x(\sigma\, dA)$ con respecto al eje Y.

* Si la sección tiene un solo eje de simetría y éste es el $E.N.$, el plano de las cargas debe ser paralelo al plano longitudinal principal, normal al plano de simetría, pero ha de pasar por el centro de torsión; también en este caso es $M_y = 0$.

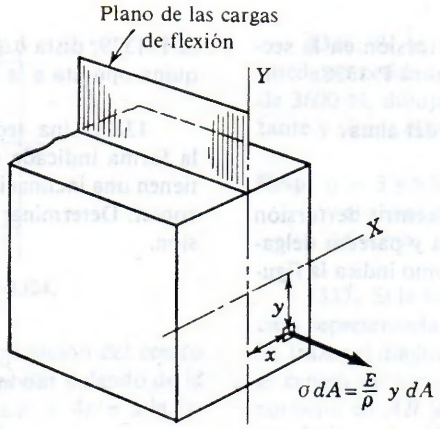


Figura 13-27. El esfuerzo de flexión origina momentos resistentes con respecto al eje Y y con respecto al eje X. El momento $M_Y = 0$ si Y es un eje de simetría, o un eje principal si no hay ejes de simetría.

Ahora bien, si el eje Y es un eje de simetría, a cada elemento de área le corresponderá otro simétrico (no representado en la figura 13-27), y que producirá un momento $-x(\sigma\, dA)$ igual y opuesto al anterior, que lo neutraliza. Por tanto, $\int x(\sigma\, dA)$ será igual a cero. Para una sección que no tenga ejes de simetría, el momento resultante, con respecto al eje Y, de las fuerzas de flexión es:

$$M_y = \int x(\sigma\, dA) = \int x\left(\frac{E}{\rho} y\right) dA = \frac{E}{\rho} \int xy\, dA$$

que para anularse y que se cumpla la condición $\Sigma M_y = 0$ exige la anulación de la integral $\int xy\, dA$. Esta integral es, precisamente, el producto de inercia de la sección P_{xy}, que se anula cuando X y Y son los ejes principales de la sección. Se deduce, pues, que la fórmula de la flexión sólo puede aplicarse cuando el plano longitudinal en que actúan las cargas es paralelo a uno de los ejes principales de inercia de la sección, o lo contiene. Estos planos se llaman *planos principales* de flexión.

Después de estas consideraciones se puede examinar el caso de la *flexión asimétrica*, es decir, cuando las cargas actúan en un plano longitudinal inclinado respecto de los planos principales de flexión. Estos casos se presentan con frecuencia, por ejemplo, en las viguetas o correas de un techado, que se colocan inclinadas según la pendiente de éste y soportan cargas verticales (el peso) que forman un ángulo considerable con los ejes principales de la sección. En las estructuras, y más aún, en los elementos de máquinas, las condiciones de deformación o de funcionamiento hacen que muchas veces las cargas actúen inclinadas con respecto a los planos principales de flexión.

Veamos en primer lugar el caso de una sección simétrica que, como se indica en la figura 13-28, está sometida a cargas inclinadas con respecto a los ejes de simetría. Sustituyendo la fuerza aplicada por sus componentes vertical y horizontal, se tienen los dos estados de carga indicados en (b) y (c), cada uno de los cuales puede resolverse directamente aplicando las fórmulas de flexión, y superponer después los resultados obtenidos. En (b), el eje X es la línea neutra, mientras que en (c) lo es el eje Y. Cada estado de cargas produce esfuerzos de flexión

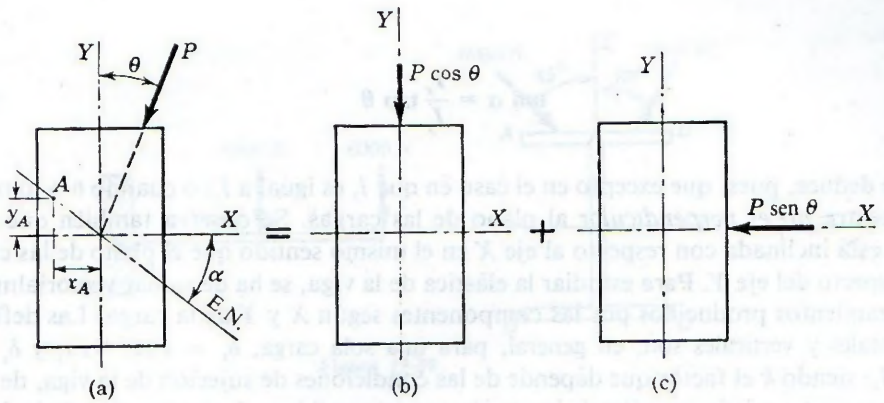


Figura 13-28. Flexión asimétrica descompuesta en flexión simétrica con respecto a los ejes X y Y.

normales a la sección, por lo que el esfuerzo resultante en cada punto es la suma algebraica de los esfuerzos producidos por cada estado de cargas por separado, es decir:

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} \qquad \textbf{(13–11)}$$

siendo M_x el momento flexionante respecto del eje X producido por $P \cos \theta$, y M_y el momento flexionante respecto del eje Y producido por P sen θ. En función del momento flexionante total M, y para una sola carga, $M_x = M \cos \theta$ y $M_y = M$ sen θ, de manera que la ecuación (13-11) se puede escribir en la forma:

$$\sigma = \frac{(M \cos \theta) y}{I_x} + \frac{(M \operatorname{sen} \theta) x}{I_y} \qquad \textbf{(13–11a)}$$

Volviendo a la figura 13-28a, la línea neutra se ha dibujado con una inclinación α respecto del eje X. Para determinar su posición, se dispone la condición de que un punto cualquiera A de la misma ha de tener un esfuerzo resultante nulo, ya que la línea neutra es el lugar geométrico de tales puntos. Tal y como se ha representado la carga, los puntos de esfuerzo nulo han de estar en el segundo y cuatro cuadrantes, ya que solamente en éstos pueden tener signos opuestos los esfuerzos normales de flexión correspondientes a los estados de carga (b) y (c). En estos dos cuadrantes, las coordenadas x y y tendrán signos más y menos, o menos y más, lo que sustituido en la ecuación (13-11a) da:

$$\sigma_A = \frac{(M \cos \theta)(-y_A)}{I_x} + \frac{(M \operatorname{sen} \theta)(x_A)}{I_y} = 0$$

Dividiendo entre M y despejando y_A/x_A resulta:

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{I_x}{I_y} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

o bien,

$$\tan \alpha = \frac{I_x}{I_y} \tan \theta \qquad (13\text{–}12)$$

Se deduce, pues, que excepto en el caso en que I_x es igual a I_y, o cuando $\theta = 0$ o $\pi/2$, la línea neutra *no es perpendicular* al plano de las cargas. Se observa también que la línea neutra está inclinada con respecto al eje X en el mismo sentido que el plano de las cargas lo está respecto del eje Y. Para estudiar la elástica de la viga, se ha de sumar vectorialmente los desplazamientos producidos por las componentes según X y Y de la carga. Las deflexiones horizontales y verticales son, en general, para una sola carga, $\delta_x = P_x L^3/kEI_y$ y $\delta_y = P$ y L^3/kEI_x, siendo k el factor que depende de las condiciones de sujeción de la viga, de la posición de la carga y de la posición de la sección que se considera. La inclinación de la deflexión total respecto del eje Y viene dada por:

$$\frac{\delta_x}{\delta_y} = \frac{P_x/I_y}{P_y/I_x} = \frac{P \operatorname{sen} \theta}{P \cos \theta} \cdot \frac{I_x}{I_y} = \frac{I_x}{I_y} \tan \theta$$

que es el mismo valor que tan α en la ecuación (13-12). Como α se ha medido con respecto al eje X, y aquí la inclinación de la elástica es respecto del eje Y, la deflexión total en un punto es perpendicular a la línea neutra y, por tanto, no coincide con el plano de las cargas.

En el caso de una sección sin ejes de simetría, como la sección en Z representada en la figura 13-29, cargada verticalmente, dado que los ejes principales de la sección son 1-1 y 2-2, el plano de las cargas resulta inclinado un ángulo θ con respecto a uno de los planos principales de flexión. La flexión es, pues, asimétrica, y como se verá en el problema 1332, los esfuerzos se determinan descomponiendo P en sus componentes con respecto a los ejes principales, aplicando luego la ecuación (13-11). Refiriéndonos de nuevo a la figura 13-25c, para que se produzca la flexión en la dirección de R, el plano de cargas debe coincidir con dicha dirección. La dirección de R coincide precisamente con el eje principal 1-1 y, en este caso, $\theta = 0$; de acuerdo con la ecuación (13-12) el eje 2-2 es la línea neutra.

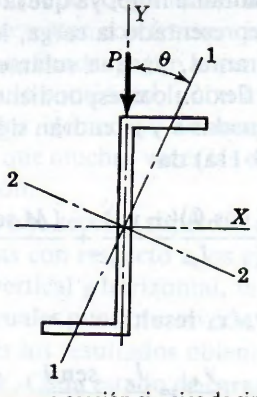


Figura 13-29. Flexión asimétrica en una sección sin ejes de simetría. Los ejes 1-1 y 2-2 son los ejes principales.

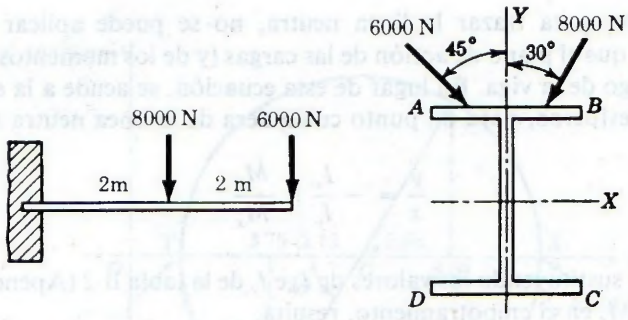


Figura 13-30.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

1331. Un perfil W250 × 33 se emplea como viga en ménsula y soporta las cargas representadas en la figura 13-30. Calcular los esfuerzos en las esquinas A, B, C y D, y la inclinación de la línea neutra en la sección de empotramiento.

Solución: Se descomponen las cargas en las direcciones X y Y, y se calculan M_x y M_y:

$$M_x = -(6000 \cos 45°)4 - (8000 \cos 30°)2 = -30.8 \text{ kN·m}$$

El signo menos de M_x indica que la curvatura en el empotramiento es hacia abajo y que la flexión producirá tensión en A y B y compresión en C y D.

Tomando momentos de las componentes horizontales de las cargas con respecto al eje Y en la sección de empotramiento:

$$M_y = (6000 \text{ sen } 45°)4 - (8000 \text{ sen } 30°)2 = 8.97 \text{ kN·m}$$

Este momento flexionante produce tensión en A y D y compresión en B y C.

Según la tabla B-2 del Apéndice B, $S_x = 379 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 379 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ y $S_y = 64.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 = 64.7 \times 10^{-6} \text{ m}^3$, por lo cual los esfuerzos máximos producidos por M_x y M_y son:

$$\text{Debido a } M_x: \quad \sigma_{máx} = \frac{M_x}{S_x} = \frac{30.8 \times 10^3}{379 \times 10^{-6}} = 81.3 \text{ MPa}$$

$$\text{Debido a } M_y: \quad \sigma_{máx} = \frac{M_y}{S_y} = \frac{8.97 \times 10^3}{64.7 \times 10^{-6}} = 138.6 \text{ MPa}$$

Como indica la ecuación (13-11) estos esfuerzos se suman algebraicamente. Para ello, y con objeto de evitar errores, se hace un cuadro con los valores, positivos de tensión y negativos de compresión, de los esfuerzos en los cuatro puntos.

Esfuerzo en MPa debido a:	A	B	C	D
M_x	+81.3	+81.3	−81.3	−81.3
M_y	+138.6	−138.6	−138.6	+138.6
Σ	+219.9	−57.3	−219.9	+57.3

En este ejemplo, para trazar la línea neutra, no se puede aplicar directamente la ecuación (13-12), ya que el plano de acción de las cargas (y de los momentos flexionantes) no es constante a lo largo de la viga. En lugar de esta ecuación, se acude a la ecuación (13-11); igualando a cero el esfuerzo, para un punto cualquiera de la línea neutra se tiene:

$$\frac{y}{x} = -\frac{I_x}{I_y} \times \frac{M_y}{M_x}$$

y como y/x es tan α, sustituyendo los valores de I_x e I_y de la tabla B-2 (Apéndice B), así como los momentos M_x y M_y en el empotramiento, resulta:

$$\tan \alpha = -\frac{I_x}{I_y} \times \frac{M_y}{M_x} = -\frac{48.9}{4.73} \times \frac{8.97}{-30.8} = 3.01, \text{ o bien, } \alpha = 71.6°$$

Al aplicar este método, es preferible prescindir de los signos y tener en cuenta únicamente los valores absolutos. La línea neutra estará orientada de manera que corresponda con los signos de los esfuerzos en A, B, C y D obtenidos en el cuadro anterior. En el caso presente, la línea neutra forma un ángulo de 71.6° con el eje X.

1332. Una viga en ménsula de 2 m de longitud soporta una carga de 900 N en su extremo libre. Su sección recta es un perfil Z de las dimensiones indicadas en la figura 13-31, y en la que $I_1 = 8.00 \times 10^6$ mm^4, $I_2 = 3.75 \times 10^6$ mm^4 e $I_y = 1.23 \times 10^6$ mm^4. Calcular el máximo esfuerzo en A.

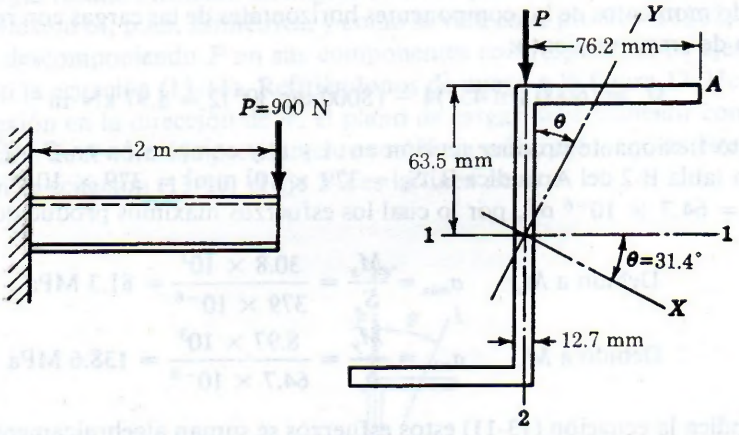


Figura 13-31.

Solución: Determinemos la dirección y los valores de los momentos principales de inercia. Con los valores de I_1, I_2 e I_y dados, se traza el círculo de Mohr de momentos de inercia, figura 13-32 (ver la sección A-11), del que resulta $I_x = 10.53 \times 10^6$ mm^4 y $\theta = 31.4°$.

En la figura 13-31, las coordenadas del punto A con respecto a los ejes principales son:

$$x_A = 76.2 \cos 31.4° - 63.5 \operatorname{sen} 31.4° = 32.0 \text{ mm}$$
$$y_A = 76.2 \operatorname{sen} 31.4° + 63.5 \cos 31.4° = 93.9 \text{ mm}$$

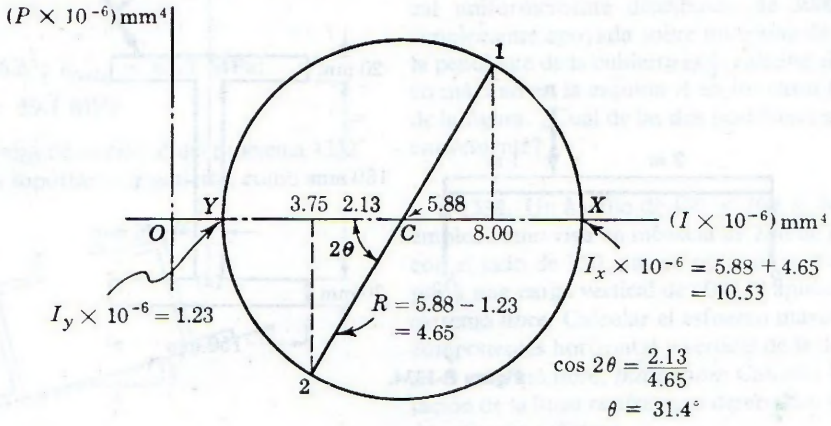


Figura 13-32.

y las componentes de P en esas direcciones son:

$$P_x = P \operatorname{sen}\theta = 900 \operatorname{sen} 31.4° = 469 \text{ N}$$

$$P_y = P \cos\theta = 900 \cos 31.4° = 768 \text{ N}$$

Por tanto, las componentes del máximo momento flexionante, en el empotramiento, son:

$$M_x = P_y L = 768(2) = 1536 \text{ N·m}$$

$$M_y = P_x L = 469(2) = 938 \text{ N·m}$$

Teniendo ahora en cuenta la ecuación (13-11), observando que M_x produce tensión y M_y compresión en A, se tiene:

$$\sigma_A = \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} = \frac{1536(0.0939)}{10.53 \times 10^{-6}} - \frac{938(0.0320)}{1.23 \times 10^{-6}}$$

$$= (13.7 - 24.4) \times 10^6 = -10.7 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

El signo menos indica que el esfuerzo total en A es de compresión.

PROBLEMAS

En todos estos problemas las cargas pasan por el centro de torsión.

1333. Calcular las componentes horizontal y vertical del desplazamiento en el extremo libre en el caso del problema 1331. Use $E = 200$ GPa.

1334. Una viga simplemente apoyada en sus extremos tiene la sección recta y las cargas indicadas en la figura P-1334. Si el esfuerzo normal máximo no debe exceder de 120 MPa, determinar el valor de seguridad de P.

Resp. $P = 36.2$ kN

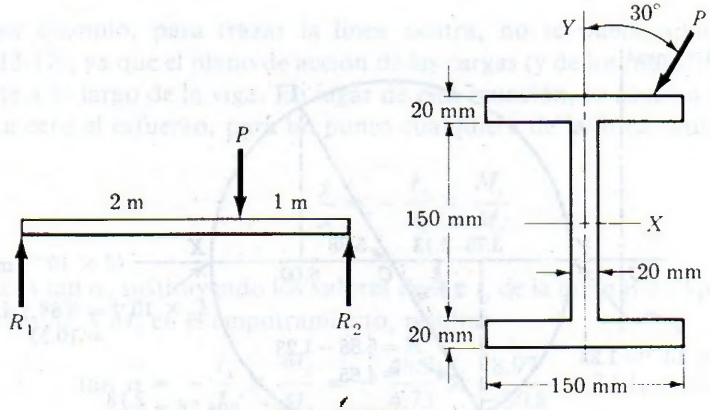


Figura P-1334.

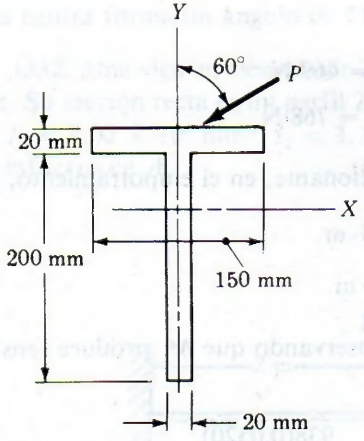


Figura P-1335.

1335. En la figura P-1335 se muestra la sección recta de una viga simplemente apoyada sobre un tramo de 5 m, que soporta una carga concentrada en su punto medio, inclinada 60° respecto del eje Y. El eje X está a 72.9 mm del borde superior de la sección; $I_x = 34.18 \times 10^6$ mm^4 e $I_y = 5.76 \times 10^6$ mm^4. Si el esfuerzo máximo no debe sobrepasar el valor de 80 MN/m^2 a compresión ni de 40 MN/m^2 a tensión, evaluar la carga P máxima que puede aplicarse sin sobrecargar la viga.

Resp. $P = 3.05$ kN

1336. Una viga en ménsula de 3 m de longitud, con la misma sección recta que la del problema 1335, soporta dos cargas concentradas aplicadas como se indica en la figura P-1336. Calcular la inclinación de la línea neutra en el empotra-

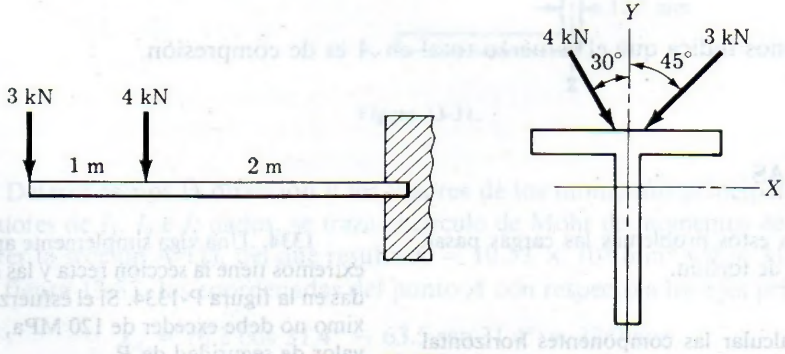


Figura P-1336.

miento, y los esfuerzos máximos de compresión y de tensión.

Resp. $\alpha = 46.6°$; $\sigma_{c_{máx}} = 61.3$ MPa; $\sigma_{t_{máx}} = 59.1$ MPa

1337. La viga de sección Z del problema 1332 se emplea para soportar una cubierta, como se indica en la figura P-1337. Soporta una carga vertical uniformemente distribuida de 3000 N/m, simplemente apoyada sobre un tramo de 4 m. Si la pendiente de la cubierta es $\frac{1}{4}$, calcular el esfuerzo máximo en la esquina A en los casos (a) y (b) de la figura. ¿Cuál de las dos posiciones es la más conveniente?

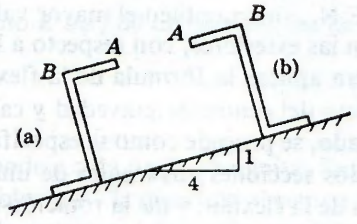


Figura P-1337.

1338. Un ángulo de 150 × 100 × 16 mm se emplea como viga en ménsula de 2 m de longitud con el lado de 150 mm en posición vertical. Soporta una carga vertical de 4000 N aplicada en el extremo libre. Calcular el esfuerzo máximo y las componentes horizontal y vertical de la deflexión en el extremo libre. *Indicación*: Calcular la orientación de la línea neutra para determinar el punto de esfuerzo máximo.

13-10. VIGAS CURVAS

Los elementos sometidos a flexión no siempre son barras rectas. A veces, como en el caso de los ganchos de las grúas, la línea media de la barra es una curva (en el plano de aplicación de las cargas o momentos flexionantes). Si la curvatura es grande, es decir, un radio de curvatura pequeño, la distribución de esfuerzos difiere notablemente de la dada por la fórmula de la flexión $\sigma = M_c/I$ que se dedujo para las barras inicialmente rectas.

Por ejemplo, consideremos una viga curva sometida a flexión pura, como indica la figura 13-33. Se supone que las secciones planas permanecen planas después de la flexión, hipótesis que, aunque no es estrictamente verdadera, proporciona resultados muy aproximados a la realidad. En estas condiciones, la flexión hace que la sección *cd* gire respecto a la sección *ab*, pasando a la posición indicada en línea punteada. Como consecuencia, dos fibras *e* y *f*, equidistantes de la línea neutra, tendrán igual deformación total, es decir, $\delta_e = \delta_f$. Aplicando la ley de Hooke, $\delta = \sigma L/E$, se tiene:

$$\frac{\sigma_e L_e}{E} = \frac{\sigma_f L_f}{E}$$

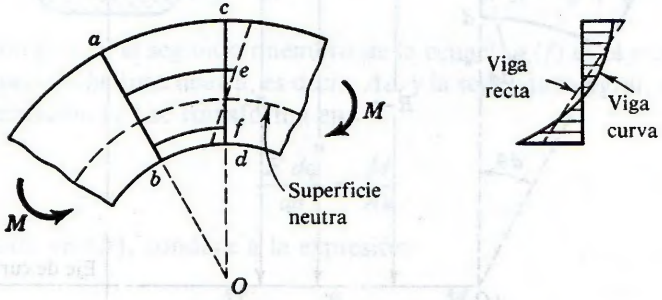


Figura 13-33.

Ahora bien, como se observa en la figura 13-33, la longitud L_e de la fibra e es mayor que la longitud L_f de la fibra f, según la relación de longitudes de la curvatura inicial de la viga. Así, pues, σ_e es menor que σ_f y, por tanto, la distribución de esfuerzos no es lineal.

Como consecuencia de la no linealidad de la distribución, no podrán equilibrarse las fuerzas resistentes de tensión y compresión que actúan en la sección (sección rectangular), si la línea neutra pasa por el centro de gravedad de ésta; el eje neutro se desplaza hacia el centro de curvatura O. La distribución lineal, a rayas en la figura, superpuesta a la distribución no lineal, muestra no sólo el desplazamiento del E.N., sino también el mayor valor de los esfuerzos en las fibras interiores y su menor valor en las exteriores, con respecto a los esfuerzos que ocurrirían si la viga fuera recta y se pudiera aplicar la fórmula de la flexión.

Para determinar el desplazamiento del E.N. respecto del centro de gravedad y calcular los esfuerzos en función del momento flexionante aplicado, se procede como se especifica seguidamente. En la figura 13-34, *ab* y *cd* representan dos secciones adyacentes de una viga curva. Sea $d\theta$ el ángulo formado por las secciones antes de la flexión, y $d\varphi$ la rotación de *cd*, producida por la flexión, respecto de su posición inicial; el valor y es la ordenada de un elemento dA con respecto a la línea neutra, que está a una distancia e, desconocida en principio, del centro de gravedad de la sección, y R es el radio de curvatura de la línea de centros de la barra.

El alargamiento de una fibra a la distancia y de la línea neutra es $y\,d\varphi$. La longitud inicial es $(R - e + y)\,d\theta$ y, por tanto, la deformación unitaria es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{y\,d\varphi}{(R - e + y)\,d\theta} \qquad (a)$$

El esfuerzo, según la ley de Hooke, es:

$$\sigma = E\epsilon = \frac{E\,d\varphi}{d\theta} \cdot \frac{y}{R - e + y} \qquad (b)$$

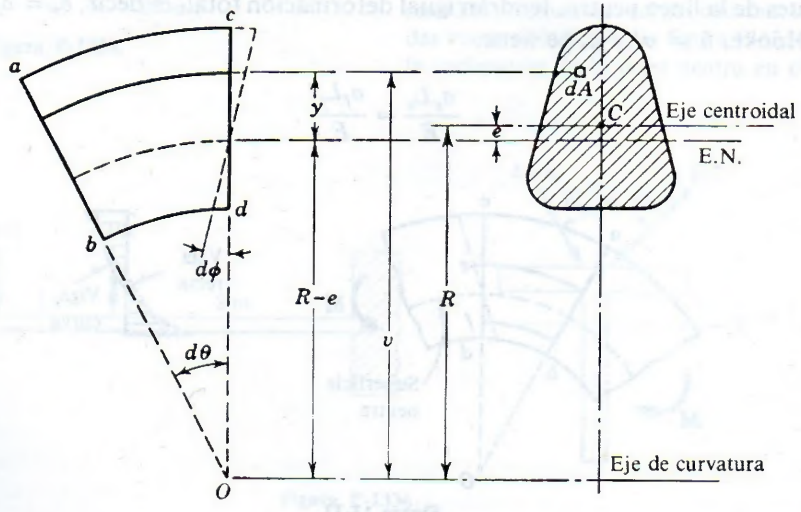


Figura 13-34.

Si la viga está sometida a flexión pura, las condiciones de equilibrio establecen que la suma de las fuerzas normales ligadas a la sección es cero, y el momento de estas fuerzas con respecto a un eje normal al plano de curvatura, equilibra al momento flexionante aplicado. De acuerdo con la primera condición,

$$\int \sigma \, dA = \frac{E \, d\varphi}{d\theta} \int \frac{y \, dA}{R - e + y} = 0 \qquad (c)$$

y como $E \, d\varphi / d\theta$ no es nulo, ha de ser

$$\int \frac{y \, dA}{R - e + y} = 0 \qquad (d)$$

en donde e es la única incógnita. Se puede despejar su valor mediante el siguiente cambio de variable. Sea v la distancia al centro de curvatura del elemento dA. Entonces, $y = v - (R - e)$ y la ecuación (d) puede escribirse en la forma:

$$\int \frac{y \, dA}{R - e + y} = \int \frac{v - (R - e)}{v} dA = \int dA - (R - e) \int \frac{dA}{v} = 0$$

de donde

$$e = R - \frac{A}{\int \frac{dA}{v}} \qquad \textbf{(13–13)}$$

Igualando ahora el momento flexionante aplicado al momento de las fuerzas resistentes,

$$M = \int y\sigma \, dA = \frac{E \, d\varphi}{d\theta} \int \frac{y^2 \, dA}{R - e + y} \qquad (e)$$

integral que se simplifica sumando y restando $(R - e)$ a uno de los dos factores y del numerador, es decir, escribiendo $y = (R - e + y) - (R - e)$. La integral se puede poner en la forma:

$$\int \frac{y^2 dA}{R - e + y} = \int y \, dA - (R - e) \int \frac{y \, dA}{R - e + y} \qquad (f)$$

La primera integral en el segundo miembro de la ecuación (f) es el momento de la sección recta con respecto a la línea neutra, es decir, Ae, y la segunda integral, según (d), es nula. Así, pues, la ecuación (e) se transforma en:

$$\frac{E \, d\varphi}{d\theta} = \frac{M}{Ae}$$

valor que, sustituido en (b), conduce a la expresión:

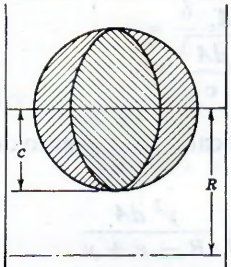
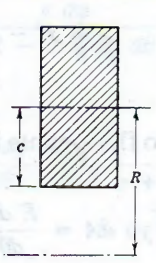
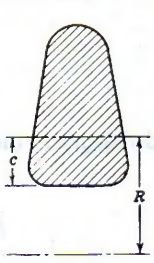
$$\sigma = \frac{M}{Ae} \cdot \frac{y}{R - e + y} = \frac{M}{Ae} \cdot \frac{y}{v} \qquad \textbf{(13–14)}$$

Las ecuaciones (13-13) y (13-14) permiten, teóricamente, determinar los esfuerzos de flexión en las vigas curvas, pero su desarrollo analítico es complicado, en general, por lo que su aplicación se limita a casos sencillos como es la sección rectangular. En la práctica lo más simple es la determinación de los esfuerzos aplicando los resultados de los estudios realizados por Wilson y Quereau*, quienes calcularon los esfuerzos en las fibras extremas en vigas curvas de diversas formas de sección recta y varios valores de la curvatura relativa, apegándose a la teoría de las vigas curvas y con la fórmula común de la flexión de vigas rectas. Comparando resultados se determinaron los valores de un factor de corrección K por el que se deben multiplicar los esfuerzos calculados mediante la fórmula de la flexión en barras rectas, para obtener los esfuerzos reales en las vigas curvas. Por consiguiente, el esfuerzo en las fibras extremas en las vigas curvas se puede calcular mediante la expresión:

$$\sigma = K\frac{Mc}{I} \qquad (13\text{–}15)$$

Los valores de K dependen de R/c, siendo R el radio de curvatura de la línea de centros de la viga curva, y c la ordenada respecto al centro de gravedad de la fibra interior. Para valores de R/c mayores de 20, los valores de K se aproximan a la unidad y, por tanto, en barras de

Tabla 13-2. Factores de corrección K para vigas curvas a emplear en la ecuación (13-15)

Sección transversal						
	Círculo o elipse		Rectángulo		Otras secciones (valores medios)	
R/c	*Interior*	*Exterior*	*Interior*	*Exterior*	*Interior*	*Exterior*
1.2	3.41	0.54	2.89	0.57	Si la sección es asimétrica R/c se refiere a la fibra interior	
1.4	2.40	0.60	2.13	0.63		
1.6	1.96	0.65	1.79	0.67		
1.8	1.75	0.68	1.63	0.70	—	—
2.0	1.62	0.71	1.52	0.73	1.63	0.74
3.0	1.33	0.79	1.30	0.81	1.36	0.81
4.0	1.23	0.84	1.20	0.85	1.25	0.86
6.0	1.14	0.89	1.12	0.90	1.16	0.90
8.0	1.10	0.91	1.09	0.92	1.12	0.93
10.0	1.08	0.93	1.07	0.94	1.10	0.94
20.0	1.03	0.97	1.04	0.96	1.05	0.95

* Véase «A Simple Method of Determining Stresses in Curved Beams», Circular 16, Engineering Experiment Station, Universidad de Illinois.

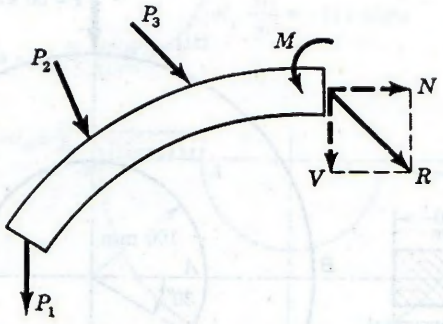


Figura 13-35. Reducción de las fuerzas aplicadas, a su resultante y un par.

poca curvatura se puede aplicar directamente la fórmula de la flexión de barras rectas, sin error apreciable.

En el caso general de cargas transversales que no actúan en el plano de curvatura de la viga, es decir, cuando *no* se trata de flexión pura, el sistema de fuerzas en una sección determinada se reduce a una resultante R aplicada en el centro de gravedad de la sección y a un momento flexionante M. Este es igual, como siempre, a la suma de los momentos de las fuerzas que actúan a un lado de la sección, respecto de su centro de gravedad, y los esfuerzos normales de flexión, producidos por este momento, se calculan como si se tratase de flexión pura.

La fuerza R se descompone en una fuerza cortante V en el plano de la sección, y una fuerza normal N perpendicular a aquél. La fuerza N produce esfuerzos de tensión o compresión uniformemente distribuidos (por estar aplicado en el centro de gravedad), de módulo $\sigma = N/A$. El esfuerzo normal total se obtiene por superposición de este esfuerzo uniforme y de los esfuerzos de flexión. El esfuerzo cortante que produce V viene dado, como en el caso de vigas rectas, por expresión $\tau = (V/Ib)\,M_e$.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1339. El anillo circular representado en la figura 13-36 tiene una sección rectangular de 100 mm de ancho por 50 mm de espesor. Aplicando la ecuación (13-15) y los valores de K dados en la tabla 13-2, determinar los esfuerzos en A y B, y en C y D. Confrontar los valores obtenidos en A y B mediante la aplicación de las ecuaciones (13-13) y (13-14).

Solución: El radio de curvatura de la línea media es $R = 100 + 50 = 150$ mm. La relación $R/c = \dfrac{150}{50} = 3$ por lo que, según la tabla 13-2, $K_i = 1.30$ y $K_e = 0.81$. El momento flexionante producido por P en la sección AB con respecto a su centro de gravedad, es $M = 0.150P = (0.150)(50 \times 10^3) = 7500\ N\cdot$m. Según la ecuación (13-15) se tiene:

$$\left[\sigma = K\frac{Mc}{I} = K\frac{6M}{bh^2}\right]$$

$$\sigma_A = 1.30\frac{6(7500)}{(0.050)(0.100)^2} = 117 \text{ MPa, compresión}$$

$$\sigma_B = 0.81\frac{6(7500)}{(0.050)(0.100)^2} = 72.9 \text{ MPa, tensión}$$

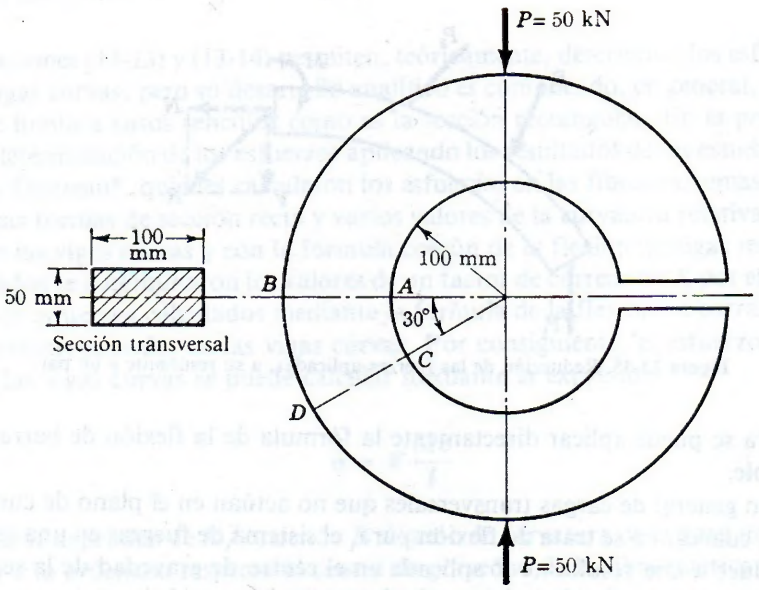


Figura 13-36.

Sumando estos resultados (Fig. 13-37a) al esfuerzo axial uniforme

$$\sigma_a = -\frac{P}{A} = -\frac{(50 \times 10^3)}{(0.050)(0.100)} = -10.0 \text{ MPa}$$

resultan como valores finales $\sigma_A = -127$ MPa y $\sigma_B = +62.9$ MPa.

En la sección CD, el momento flexionante es $M = P(0.150 \cos 30°) = 6495$ N·m. La componente de P, normal a CD, es $N = P \cos 30° = (50 \times 10^3)(0.866) = 43.3$ kN. Por tanto, los esfuerzos en C y D (Fig. 13-37b) son:

$$\left[\sigma = -\frac{N}{A} \pm K\frac{6M}{bh^2}\right]$$

$$\sigma_C = -\frac{43.3 \times 10^3}{(0.050)(0.100)} - 1.30\frac{6(6495)}{(0.050)(0.100)^2}$$

$$= -(8.66 \times 10^6) - (101 \times 10^6) = -110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -\frac{43.3 \times 10^3}{(0.050)(0.100)} + 0.81\frac{6(6495)}{(0.050)(0.100)^2}$$

$$= -(8.66 \times 10^6) + (63.1 \times 10^6) = +54.4 \text{ MPa}$$

Aplicando la ecuación (13-13) al caso representado en la figura 13-38 se tiene:

$$e = R - \left(A \Big/ \int \frac{dA}{v}\right) = R - \left(bh \Big/ \int_{v_1}^{v_2} \frac{b\,db}{v}\right) = R - \left(h \Big/ \log_e \frac{v_2}{v_1}\right)$$

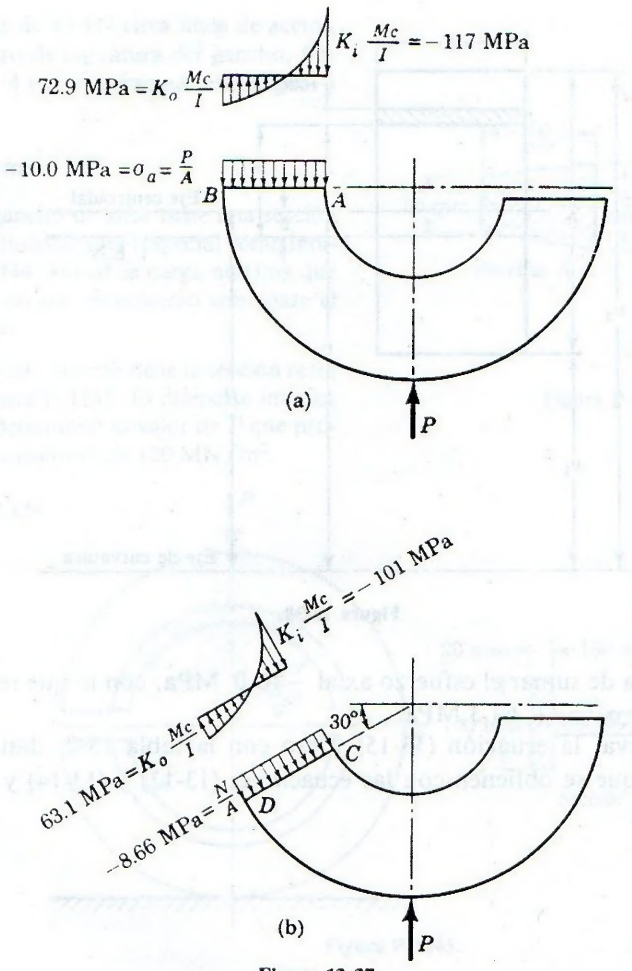


Figura 13-37.

Sustituyendo los valores numéricos,

$$e = 150 - \frac{100}{\log_e(200/100)} = 150 - \frac{100}{0.6931} = 150 - 144.3 = 5.7 \text{ mm}$$

Determinado e, se puede aplicar la ecuación (13-14), que da para las tensiones en A y B los valores:

$$\left[\sigma = \frac{M}{Ae} \cdot \frac{y}{v}\right]$$

$$\sigma_A = \frac{7500}{(0.050 \times 0.100)(0.0057)} \cdot \frac{(0.050 - 0.0057)}{0.100}$$
$$= 117 \text{ MPa, compresión}$$

$$\sigma_B = \frac{7500}{(0.050 \times 0.100)(0.0057)} \cdot \frac{(0.050 + 0.0057)}{0.200}$$
$$= 73.3 \text{ MPa, tensión}$$

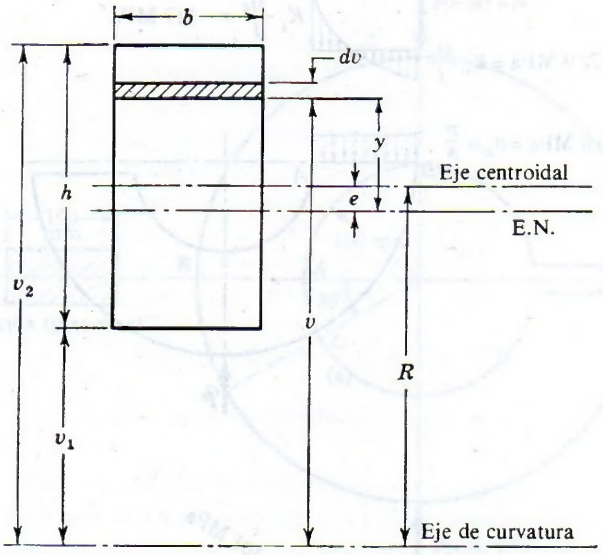


Figura 13-38.

A estos valores se ha de sumar el esfuerzo axial -10.0 MPa, con lo que resulta, por tanto, $\sigma_A = -127$ MPa y $\sigma_B = +63.3$ MPa.

Como se observa, la ecuación (13-15) junto con la tabla 13-2, dan resultados muy aproximados a los que se obtienen con las ecuaciones (13-13) y (13-14) y su aplicación es mucho más sencilla.

PROBLEMAS

1340. Una viga curva de sección rectangular de 10 mm de espesor y 50 mm de altura tiene un radio de curvatura medio de 50 mm. Calcular los esfuerzos en función de M en un punto a 40 mm de la superficie exterior.

1341. En el gancho de sección circular de la figura P-1341, determinar: (*a*) La carga máxima P que puede soportar sin que el esfuerzo sobrepase 120 MN/m^2, y (*b*) el esfuerzo que este valor de P produce en B.

Resp. (a) $P = 46.1$ kN

1342. Repetir el problema anterior si el gancho tiene una sección circular de 75 mm de diámetro. Obtener K_i y K_e mediante un gráfico de sus valores en función de R/c.

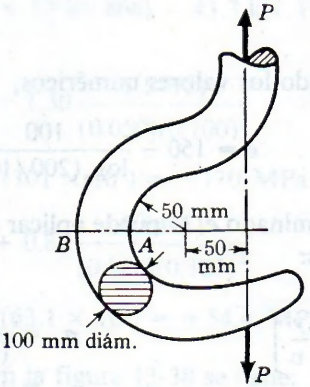


Figura P-1341 y P-1342.

1343. Determinar el diámetro de una barra de acero para construir un gancho que ha de so-

portar una carga de 10 kN cuya línea de acción pasa por el centro de curvatura del gancho. Supóngase $R/c = 4$ y el esfuerzo admisible igual a 110 MPa.

Resp. $d = 49.0$ mm

1344. Un gancho de grúa tiene una sección recta muy aproximadamente trapecial como indica la figura P-1344. Hallar la carga máxima que puede soportar sin que el esfuerzo sobrepase el valor de 80 MPa.

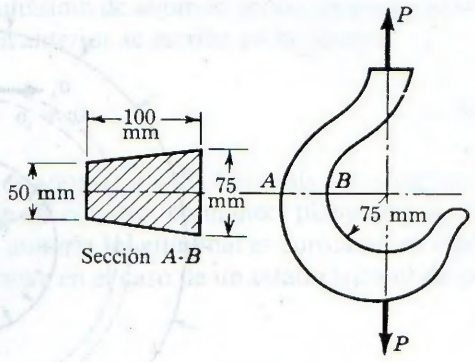


Figura P-1344.

1345. Un anillo abierto tiene la sección recta que indica la figura P-1345. El diámetro interior es de 366 mm. Determinar el valor de P que produce un esfuerzo máximo de 120 MN/m^2.

Resp. $P = 80.2$ kN

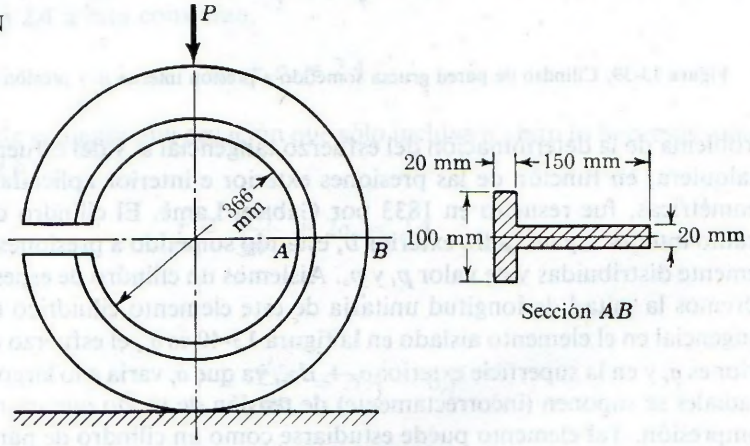


Figura P-1345.

13-11. CILINDROS DE PARED GRUESA

En el estudio de los cilindros de pequeño espesor, realizado en la sección 1-6, se determinó el valor de la fuerza que actúa en una sección longitudinal de sus paredes mediante las ecuaciones de la estática (Fig. 1-11). En un cilindro de pared gruesa, se puede seguir un proceso análogo para determinar la fuerza total que transmite la sección longitudinal. Dividiendo esta fuerza entre el área sobre la que actúa se obtiene el valor *medio* del esfuerzo circunferencial o tangencial, tanto en el caso de paredes delgadas como en el de paredes gruesas. La diferencia entre uno y otro caso estriba en que en el cilindro de pared delgada, cuando el espesor es igual o menor que $\frac{1}{20}$ del diámetro interior, dicho valor medio es prácticamente igual al máximo esfuerzo tangencial, esto es, el esfuerzo tangencial se distribuye casi uniformemente en el espesor, mientras que en el caso de pared gruesa es mucho menor que el máximo valor de este esfuerzo tangencial, que no se distribuye uniformemente en el espesor, y su variación ni siquiera es lineal.

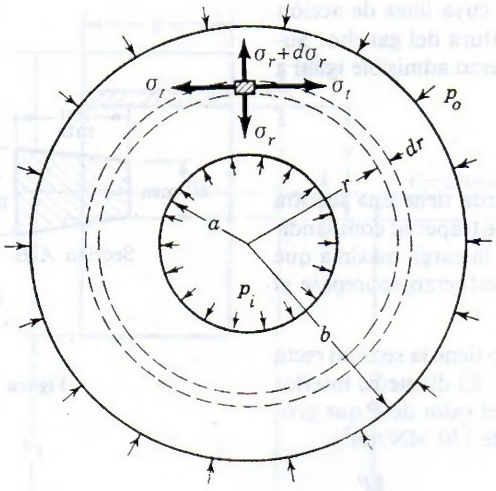


Figura 13-39. Cilindro de pared gruesa sometido a presión interna p_i y presión externa p_o.

El problema de la determinación del esfuerzo tangencial σ_t y del esfuerzo radial σ_r en un punto cualquiera, en función de las presiones exterior e interior aplicadas, y de las condiciones geométricas, fue resuelto en 1833 por Gabriel Lamé. El cilindro de la figura 13-39 tiene un radio interior a y un radio exterior b, estando sometido a presiones interna y externa uniformemente distribuidas y de valor p_i y p_o. Aislemos un cilindro de espesor diferencial dr, y consideremos la mitad de longitud unitaria de este elemento cilíndrico diferencial. El esfuerzo tangencial en el elemento aislado en la figura 13-40 es σ_t, el esfuerzo radial en la superficie interior es σ_r y en la superficie exterior $\sigma_r + d\sigma_r$, ya que σ_r varía a lo largo del radio. Los esfuerzos radiales se suponen (incorrectamente) de tensión de modo que un resultado negativo indica compresión. Tal elemento puede estudiarse como un cilindro de pared delgada y, por tanto, para el equilibrio, la suma total de las fuerzas aplicadas debe ser igual a cero:

$$(\sigma_r + d\sigma_r) \cdot 2(r + dr) - \sigma_r(2r) - 2\sigma_t\, dr = 0$$

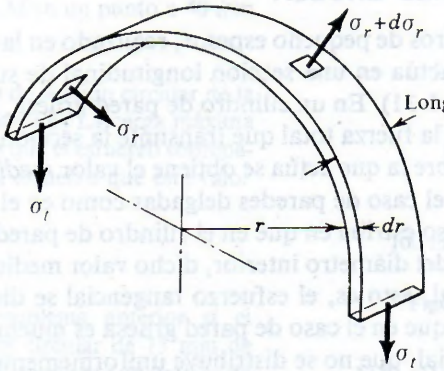


Figura 13-40. Esfuerzos en medio cilindro diferencial

El producto $dr \cdot d\sigma_r$ puede despreciarse, como infinitésimo de segundo orden, respecto de las otras cantidades. En estas condiciones la ecuación anterior se escribe en la forma:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \qquad (a)$$

Para obtener otra relación entre σ_r y σ_t hay que adoptar alguna hipótesis complementaria. Se supone que una sección recta, normal al eje del cilindro, permanece plana después de la deformación y, por tanto, que la deformación unitaria longitudinal es constante en cualquier punto de la sección. Aplicando la ley de Hooke en el caso de un estado triaxial de esfuerzos (Sec. 2-4) resulta:

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)\right]$$

Ahora bien, como ϵ_z, E, σ_z y ν son constantes, la suma $\sigma_r + \sigma_t$ ha de ser constante en toda la sección. Llamando $2A$ a esta constante,

$$\sigma_r + \sigma_t = 2A \qquad (b)$$

Ahora se puede enunciar una ecuación que sólo incluya σ_r; esto lo hacemos sumando las ecuaciones (a) y (b):

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\sigma_r = 2A$$

o bien,

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = 2(A - \sigma_r)$$

de donde, al separar las variables, se obtiene

$$\frac{d\sigma_r}{A - \sigma_r} = 2\frac{dr}{r}$$

La integración da

$$-\log_e (A - \sigma_r) = 2\log_e r + C = \log_e r^2 + C$$

y

$$\log_e (A - \sigma_r)r^2 = -C$$

o bien,

$$\log_e (A - \sigma_r)\, r^2 = e^{-C} = B$$

donde B es una constante más adecuada que e^{-C}. Resolviendo para σ_r, finalmente se obtiene

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \qquad (c)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (b) resulta:

$$\sigma_t = A + \frac{B}{r^2} \qquad (d)$$

Los valores de las constantes A y B se determinan mediante las condiciones de frontera, que son

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -p_i \quad \text{para} \quad r = a \\ \sigma_r &= -p_o \quad \text{para} \quad r = b \end{aligned}\right\}$$

donde el signo menos indica que σ_r es un esfuerzo de compresión.

Con estos valores se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -p_i &= A - \frac{B}{a^2} \\ -p_o &= A - \frac{B}{b^2} \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es:

$$A = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2}$$

$$B = \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{b^2 - a^2}$$

Sustituyendo estos valores en la expresiones (c) y (d) se obtienen las expresiones generales de σ_r y σ_t en un punto cualquiera a la distancia r del centro:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{(b^2 - a^2) r^2} \\ \sigma_t &= \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{(b^2 - a^2) r^2} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(13–16)}$$

CASOS PARTICULARES: ESFUERZOS MÁXIMOS

Caso I: Sólo presión interior. Si la presión interior es p_i y la exterior es nula ($p_o = 0$), las ecuaciones (13-16) adquieren la forma:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \\ \sigma_t &= \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(13–17)}$$

Obsérvese que σ_r siempre es negativa (compresión) y que σ_t siempre es positiva (tensión) y mayor que σ_r. Su valor máximo aparece en la superficie interior del cilindro:

$$(\sigma_t)_{máx} = \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}\right) p_i \tag{13-18}$$

Llamando K a la relación b/a se puede escribir en la forma:

$$(\sigma_t)_{máx} = \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} p_i$$

El valor *medio* del esfuerzo circunferencial, obtenido con el mismo método que en el caso de un cilindro de pared delgada, es:

$$(\sigma_t)_{med} = \frac{ap_i}{b - a} = \frac{p_i}{K - 1}$$

y la relación del valor máximo al valor medio de este esfuerzo tangencial es:

$$\frac{(\sigma_t)_{máx}}{(\sigma_t)_{med}} = \frac{K^2 + 1}{K + 1} \tag{13-19}$$

Según esta expresión, para un espesor de pared igual a $\frac{1}{20}$ del diámetro interior, $K = b/a = 1.1$, y $(\sigma_t)_{máx}$ es solamente un 5% mayor que $(\sigma_t)_{med}$. Este resultado justifica el procedimiento (Sec. 1-6) aplicado en el caso de elementos de pared delgada.

Como el esfuerzo cortante máximo es igual a la semidiferencia de los esfuerzos principales, como se deduce del círculo de Mohr, y como la falla de un material dúctil, tal como el acero (material con el que se fabrican muchos tubos de este tipo), se supone debido al esfuerzo cortante (como establece la teoría del esfuerzo cortante máximo, sección 13-4) este valor es muy importante en el diseño de estos tubos. El valor máximo tiene lugar en la superficie interior del cilindro, en donde σ_r y σ_t son máximos y de signos contrarios, lo que da para $\tau_{máx}$ el valor:

$$\tau_{máx} = \frac{(\sigma_t)_{máx} - (\sigma_r)_{máx}}{2} = \frac{b^2}{b^2 - a^2} p_i \tag{13-20}$$

Caso II: Sólo presión exterior. Si la presión exterior es p_o y la interior es cero ($p_i = 0$), las ecuaciones (13-16) se convierten en:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_o b^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_t &= -\frac{p_o b^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{13-21}$$

En este caso, σ_r y σ_t son siempre negativos (compresión) y σ_t es siempre mayor que σ_r. El máximo esfuerzo de compresión (σ_t) tiene lugar en la superficie interior, en donde σ_r es nulo,

y viene dado por:

$$(\sigma_t)_{máx} = -\frac{2b^2 p_o}{b^2 - a^2} \tag{13-22}$$

El valor de $(\sigma_t)_{máx}$ se aproxima a $-2p_o$ cuando b es muy grande en relación con a, como ocurre en un cilindro con un pequeño orificio central.

PROBLEMAS

1346. El cilindro de una prensa hidráulica tiene un diámetro interior de 300 mm. Determinar el espesor de la pared si ha de resistir una presión interior de 40 MPa sin que el esfuerzo cortante sobrepase el valor de 80 MPa.

Resp. $e = 62.1$ mm

1347. Trazar una curva que represente el tanto por ciento de aumento de $(\sigma_t)_{máx}$ sobre $(\sigma_t)_{med}$, en función de la relación k' entre el espesor del tubo y el radio interior desde $k' = 0$ hasta $k' = 3$.

1348. Un aro ejerce sobre un tubo una presión de contacto de 20 MN/m^2. Se aplica al tubo una presión interior de 70 MN/m^2. Los radios interior y exterior son 40 y 60 mm para el tubo y 60 y 100 mm para el aro. Calcular el esfuerzo tangencial máximo en el tubo, (*a*) antes y, (*b*) después de aplicar la presión interior. (*c*) Si la presión de contacto es la única que actúa sobre el aro, hallar el esfuerzo tangencial máximo en él. Tubo y aro están hechos del mismo material.

Resp. (*a*) -72.0 MN/m^2; (*b*) 24.7 MN/m^2; (*c*) 42.5 MN/m^2

1349. Se construye un cilindro de pared gruesa mediante un tubo de aluminio de 20 mm de espesor contraído sobre un cilindro hueco (también de aluminio) de 150 mm de diámetro exterior y de 100 mm de diámetro interior, con una presión de contacto de 20 MPa. Calcular la presión interior máxima que puede aplicarse al conjunto sin que el esfuerzo tangencial sobrepase el valor de 100 MPa en la superficie interior.

Resp. $p = 97.4$ MPa

1350. Los radios interior y exterior de un eje hueco son 50 y 100 mm, respectivamente. El cubo de una rueda dentada del mismo material, montada a presión sobre el eje, tiene un radio exterior de 150 mm y el esfuerzo tangencial máximo que aparece por efecto del apriete es 200 MPa. La longitud axial del cubo de la rueda es de 200 mm y el coeficiente de fricción estático entre el eje y el cubo es de 0.40. Calcular el momento de rotación máximo que puede transmitirse sin que la rueda patine sobre el eje.

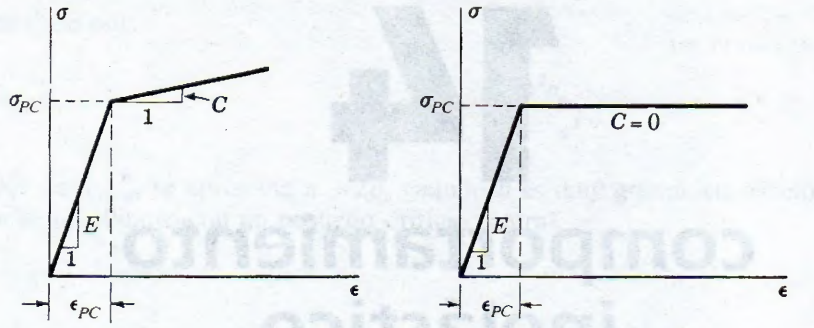
Resp. $T = 377$ kN · m

14 comportamiento inelástico

14-1. INTRODUCCIÓN

En todos los capítulos anteriores se supuso que los esfuerzos permanecían en la zona elástica en donde el esfuerzo es proporcional a la deformación. El esfuerzo máximo admisible era el límite de proporcionalidad, aunque el esfuerzo de último fuera más alto. En este capítulo se estudia lo que ocurre cuando las cargas aplicadas producen deformaciones inelásticas en una estructura, aunque, trabajando el material en esta zona, subsistan deformaciones permanentes en el elemento o estructura al descargarla. De aquí que haya de ampliarse el concepto de carga de seguridad y englobar en aquella las que, aun produciendo deformaciones grandes en relación con las deformaciones elásticas, no llegan a producir el colapso del elemento. Se llaman *cargas límite*. La carga límite es la carga máxima que puede aplicarse a un elemento antes de que empiece el colapso. Con un material dúctil, y en estructuras estáticamente determinadas, el colapso no sobrevendrá hasta que se haya alcanzado el esfuerzo de cedencia en todos los puntos de la sección más cargada. En la sección 14-5 se estudia la aplicación de las cargas límite a estructuras estáticamente indeterminadas, lo que se denomina *análisis al límite*. Obsérvese que *nada* de lo que se estudia en este capítulo es aplicable a los materiales frágiles. Para que los conceptos y soluciones que se dan sean aplicables a un material dado, éste debe presentar siempre algo de ductilidad, es decir, ha de tener un punto de cedencia y una zona de deformación inelástica o plástica en los diagramas de ensayo a esfuerzo simple.

La relación esfuerzo-deformación en un material dúctil se puede representar aproximadamente mediante el diagrama ideal de la figura 14-1a. La zona elástica del diagrama es el



(a) Material elasto-plástico (b) Material elasto-plástico perfecto

Figura 14-1. Diagramas esfuerzo-deformación idealizados.

segmento de pendiente E, módulo elástico del material. La zona plástica también es una línea recta, que empieza en el punto de cedencia y tiene una pendiente C. Esta pendiente es mucho menor que E, por lo que el aumento de esfuerzo necesario para producir un incremento de deformación determinado, es mucho menor en la zona plástica que en la elástica, pero siempre es necesario un incremento de esfuerzo, aunque sea pequeño, para producir un incremento de deformación. Un material en el que C sea nulo se llama elasto-plástico perfecto; en un material de este tipo, sobrepasado el punto de cedencia, la deformación puede seguir aumentando indefinidamente sin aumento ulterior del esfuerzo. En la figura 14-1b se ha representado el diagrama ideal de este tipo de materiales. En este capítulo se supone que los materiales son elasto-plásticos perfectos.

14-2. MOMENTO TORSIONANTE LÍMITE

En el estudio de la torsión de una barra de sección circular en la fase plástica se hacen las mismas hipótesis que en la sección 3-1, hipótesis, por otra parte, comprobadas experimentalmente; la única variación es que la deformación unitaria puede exceder a la correspondiente al punto de cedencia. Las secciones transversales se comportan exactamente igual que en la zona elástica, girando como cuerpo rígido unas con respecto a las otras y sin alabearse. La distorsión permanece proporcional a la distancia radial al centro de la sección.

Veamos lo que ocurre a una barra de un material elasto-plástico perfecto que se somete a una torsión progresiva, pasando de trabajar en la zona elástica a hacerlo en la zona plástica. Antes de alcanzar el punto de cedencia, la distribución de esfuerzos cortantes es de la forma indicada en la figura 14-2a. Cuando en los puntos más alejados del centro se alcanza el esfuerzo de cedencia (PC), el momento torsionante que está absorbiendo la sección viene dado por:

$$T_{PC} = \frac{\pi r^3}{2} \tau_{PC} \qquad (a)$$

Si la torsión de la barra sobrepasa este punto, la distorsión γ aumenta, pero el esfuerzo cortante permanece constante e igual al esfuerzo de cedencia τ_{PC}, como se indica en la figura 14-1b. Así, pues, en el estado parcialmente plástico que representa la figura 14-2b, a partir de cierto radio r_i, la parte exterior está sometida al esfuerzo cortante de cedencia, mientras que

el núcleo central sigue comportándose elásticamente, ya que en él la distorsión no ha alcanzado todavía el valor de cedencia γ_{PC}. El momento de torsión absorbido por este núcleo, elásticamente, es:

$$T_i = \frac{J_i}{r_i}\tau_{PC} = \frac{\pi r_i^3}{2}\tau_{PC}$$

y el absorbido por la corona exterior, en fase plástica, es:

$$T_o = \int_{r_i}^{r} \rho(\tau_{PC}\, dA) = \tau_{PC}\int_{r_i}^{r} \rho(2\pi\rho\, d\rho) = \frac{2\pi}{3}(r^3 - r_i^3)\tau_{PC}$$

Por tanto, el momento total, suma de ambos, es:

$$T = \frac{\pi r_i^3}{2}\tau_{PC} + \frac{2\pi}{3}(r^3 - r_i^3)\tau_{PC}$$

Simplificando se obtiene:

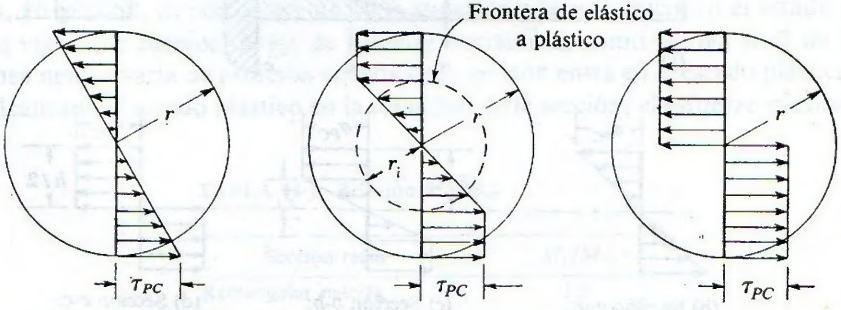
$$T = \frac{\pi r^3}{6}\left(4 - \frac{r_i^3}{r^3}\right)\tau_{PC} \qquad \textbf{(14-1)}$$

El estado totalmente plástico que representa la figura 14-2c no puede alcanzarse teóricamente, ya que requerirá un ángulo de torsión infinito. El momento torsionante necesario para producir este estado se llama momento de torsión límite, que representaremos por T_L. Su valor se obtiene haciendo $r_i = 0$ en la ecuación (14-1), con lo que resulta:

$$T_L = \tfrac{2}{3}\pi r^3 \tau_{PC} \qquad (b)$$

que es una tercera parte mayor que el máximo momento torsor elástico T_{PC}. Para referencia posterior se expresa esta relación:

$$T_L = \tfrac{4}{3} T_{PC} \qquad \textbf{(14-2)}$$



(a) Material elástico (b) Parcialmente plástico (c) Totalmente plástico

Figura 14-2. Distribución de esfuerzos cortantes al aumentar el momento torsionante.

PROBLEMAS

1401. Un eje circular macizo de 80 mm de diámetro soporta un par torsor de 16 kN·m. Si el esfuerzo de cedencia es $\tau_{PC} = 140$ MN / m^2, determinar el radio r_i del núcleo que permanece en estado elástico.

Resp. $r_i = 33.5$ mm

1402. Determinar la relación del momento torsor límite al máximo elástico o de cedencia, en un eje circular hueco cuyo radio exterior sea el doble del interior.

Resp. 1.24

1403. Determinar, en función de T_{PC}, el valor del momento torsor que produce la cedencia en una capa de espesor $r/4$ en un eje de sección circular maciza.

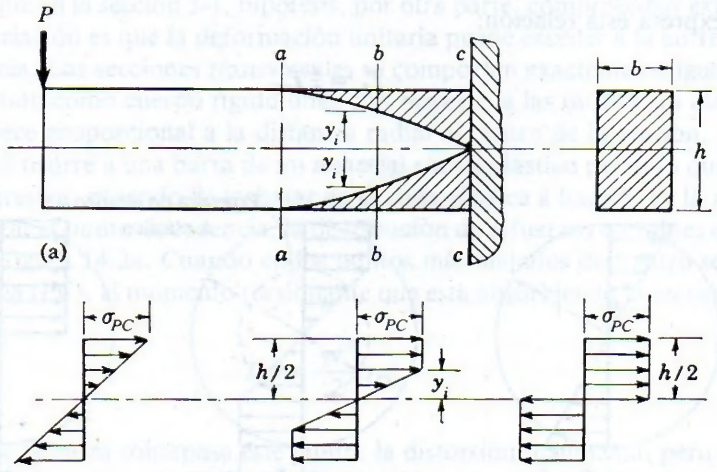
Resp. 1.19

14-3. MOMENTO FLEXIONANTE LÍMITE

En la flexión en la zona plástica se hacen las mismas hipótesis que en la sección 5-1 salvo que los esfuerzos no son proporcionales a las deformaciones. Las secciones planas permanecen planas después de la deformación, con lo que las deformaciones unitarias son proporcionales a su distancia a la línea neutra; sin embargo, si el material de la viga es elastoplástico perfecto, los esfuerzos no sobrepasan el valor del punto de cedencia, permaneciendo constantes a partir del momento en que la deformación excede a la ϵ_{PC}.

La zona rayada de la figura 14-3a indica la parte de viga en la que la deformación unitaria ha sobrepasado el punto de cedencia cuando la carga P aumenta lo suficiente. En la sección a-a, el esfuerzo en las fibras extremas ha alcanzado exactamente el valor σ_{PC}, pero la distribución es todavía elástica, como se observa en la figura 14-3b. Aplicando la fórmula de la flexión, el momento que absorbe esta sección es:

$$M_{PC} = \sigma_{PC} \frac{bh^2}{6} \qquad (a)$$



(b) Sección a-a: material elástico

(c) Sección b-b: parcialmente plástico

(d) Sección c-c: totalmente plástico

Figura 14-3.

En la sección *b-b* la distribución de esfuerzos es elástica en una región de altura $2y_i$, pero plástica fuera de esta región, tal como se representa en la figura 14-3c. El esfuerzo es constante e igual a σ_{PC} en la región plástica, y varía linealmente en el núcleo elástico. El momento que absorbe este núcleo elástico está determinado por la fórmula de la flexión:

$$M = \frac{\sigma_{PC}}{y_i} I_i$$

siendo I_i el momento de inercia de la parte central, elástica, de la sección respecto de la línea neutra. Para la región plástica, simétrica en este caso, en relación con la línea neutra, el momento absorbido es:

$$M = 2\int_{y_i}^{h/2} y(\sigma_{PC}\, dA) = 2\sigma_{PC}\int_{y_i}^{h/2} y\, dA = 2\sigma_{PC}Q$$

siendo Q el momento estático del área de *una* de las regiones que están en cedencia respecto de la línea neutra. En estas condiciones, el momento total que soporta la sección en este estado parcialmente plástico viene dado por:

$$\boldsymbol{M = \frac{\sigma_{PC} I_i}{y_i} + 2\sigma_{PC} Q} \qquad \textbf{(14–3)}$$

En la sección *c-c*, toda la viga está en estado plástico, y la distribución de esfuerzos es constante e igual al valor de σ_{PC}, tanto en la zona de tensión como en la comprimida, como se indica en la misma figura 14-3d. El momento que soporta en este estado, o que produce este estado de esfuerzos, se llama *momento flexionante límite* y viene dado por:

$$M_L = 2\sigma_{PC}Q = 2\sigma_{PC}\left(\frac{bh}{2}\cdot\frac{h}{4}\right) = \sigma_{PC}\frac{bh^2}{4} \qquad (b)$$

Comparando con la ecuación (a) resulta:

$$\boldsymbol{M_L = \tfrac{3}{2} M_{PC}} \qquad \textbf{(14–4)}$$

La relación M_L/M_{PC} vale en este caso $\frac{3}{2}$, pero depende de la forma de la sección. En la tabla 14-1 se indican algunos valores de esta relación, para diversas formas de sección recta. Se observa que el momento límite, para una sección rectangular o circular, es de un 50 a un 70% superior al momento en cedencia, o momento elástico máximo, mientras que en los perfiles laminados, en general, es solamente un 10% superior a la resistencia en el estado plástico.

En las vigas que carecen de eje de simetría horizontal, como la viga en T de la figura 14-4, la línea neutra varía de posición conforme la sección entra en el estado plástico. Cuando se ha alcanzado el estado plástico en la totalidad de la sección, el esfuerzo es constante en

TABLA 14-1. Relación M_L/M_{PC}

Sección recta	M_L/M_{PC}
Rectangular maciza	1.5
Circular maciza	1.7
Anillo circular delgado	1.27
Sección H típica	1.1

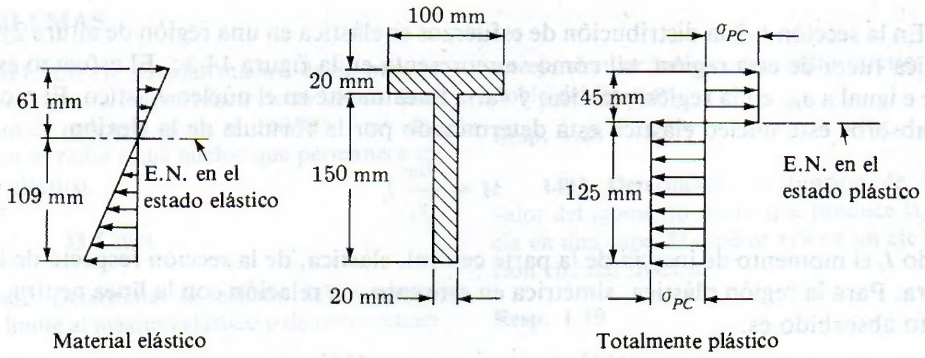


Figura 14-4. Desplazamiento del E.N. en secciones asimétricas.

toda ella, e igual a σ_{PC}. El equilibrio estático de la fuerza axial total requiere que el área sometida a tensión sea igual al área sometida a compresión, es decir,

$$[T = C] \qquad \sigma_{PC}A_t = \sigma_{PC}A_c \text{ o bien, } A_t = A_c \qquad \textbf{(14–5)}$$

Aplicar esta condición a la sección de la figura 14-4 y comprobar que, para las dimensiones indicadas, la línea neutra en el estado plástico total está a 16 mm por encima de la línea neutra en el estado elástico.

PROBLEMAS

1404. Comprobar los valores de M_L / M_{PC} indicados en la tabla 14-1 para el círculo macizo y para el anillo circular delgado.

1405. Calcular la relación M_L / M_{PC} en un perfil W200 × 100.

Resp. 1.15

1406. Repetir el problema 1405 con un perfil W360 × 91.

1407. Repetir el problema 1405 para la sección en T de la figura 14-4.

Resp. 1.77

1408. El centro de gravedad de la sección representada en la figura P-1408 dista $\bar{y}$ = 202 mm del borde inferior, y el momento de inercia de la sección respecto del eje X_0 es 260 × 10^6 mm^4. Determinar M_L/M_{PC} en una viga de esta sección.

Resp. 1.38

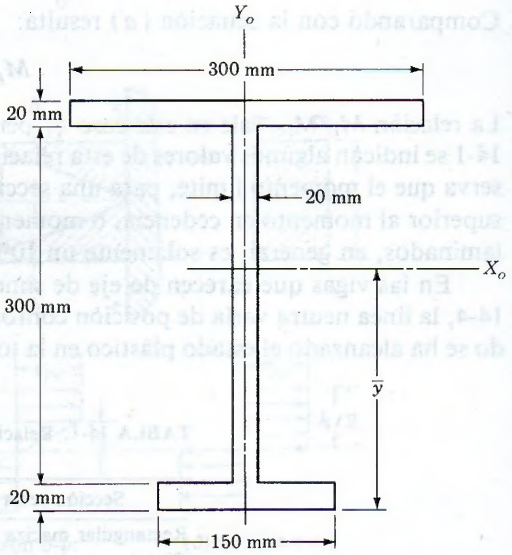


Figura P-1408.

1409. Una viga de sección rectangular de 50 mm de ancho por 160 mm de altura está construida de un material elasto-plástico perfecto en el que $\sigma_{PC} = 300$ MPa. Calcular el momento flexionante que dará lugar a que la mitad de la sección entre en fluencia.

Resp. $M = 88.0$ kN·m

1410. En el problema 1409 determinar el momento flexionante preciso para que los dos tercios de la sección permanezcan en el estado elástico.

1411. Sabiendo que $\sigma_{PC} = 270$ MPa, calcular el momento límite para la sección indicada en la figura P-1411.

Resp. $M_L = 177$ kN·m

1412. En el problema anterior, determinar el momento flexionante necesario para que la región elástica se extienda 40 mm a uno y otro lado de la línea neutra.

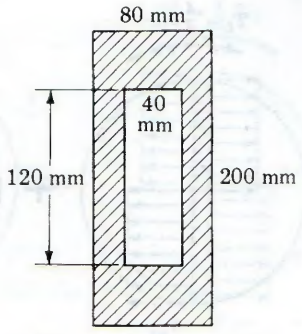


Figura P-1411 y P-1412.

Resp. 171 kN·m

1413. Una sección rectangular está sometida a la acción de un momento flexionante M tal que $M_{PC} < M < M_L$. Si k es la fracción de la altura que está en el del estado elástico, determinar M y M_L en función de k.

Resp. $k^2 = 3[1 - (M/M_L)]$

14-4. ESFUERZOS RESIDUALES

Los experimentos realizados con materiales dúctiles demuestran que, cargados más allá del punto de cedencia (curva OAB en la figura 14-5a) se descargan elásticamente, siguiendo el camino BC, prácticamente paralelo al tramo inicial elástico OA. Si se vuelve a cargar, se forma un pequeño ciclo de histéresis, pero el material permanece ahora elástico hasta el punto B, alcanzado en la primera carga, y después sigue ya la curva inicial plástica BD. Para un material ideal elasto-plástico perfecto al que se limita este estudio, el ciclo de carga, descarga, nueva carga, etc., tiene lugar como aparece en la figura 14-5b.

El efecto principal de la descarga de un material que ha sido deformado más allá del punto de cedencia y, por tanto, ha alcanzado un estado parcial o totalmente plástico, es que al

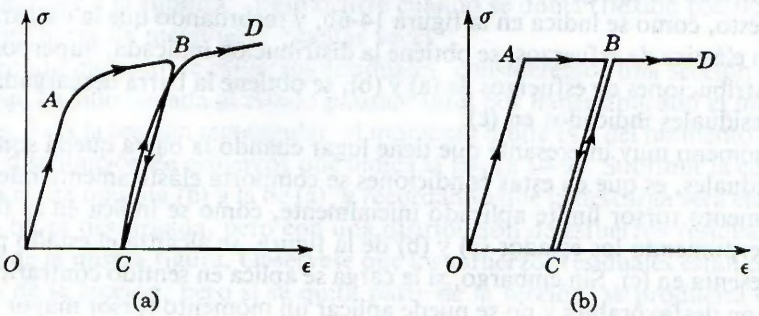
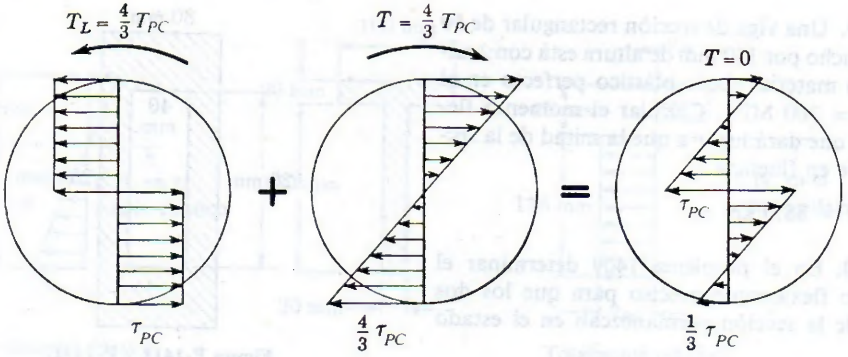


Figura 14-5. Descarga y nueva carga de (a) un material dúctil real, y (b) un material elasto-plástico perfecto. En (b), la descarga y nueva carga siguen la misma línea BC y CB, aunque se hayan dibujado ligeramente separadas para su comparación con (a).



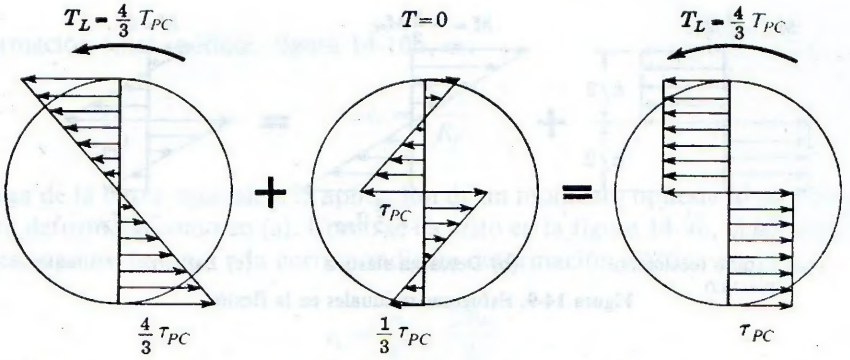
(a) Carga plástica (b) Descarga elástica (c) Esfuerzos residuales

Figura 14-6. Esfuerzos residuales en la torsión.

haberse producido unas deformaciones permanentes, si éstas no son compatibles con el estado inicial del sólido (ya que, al descargarlo, en principio estas deformaciones plásticas no desaparecen), se crea un estado de esfuerzos internamente equilibrados sin resultante exterior, que tienden a que estas deformaciones permanentes desaparezcan, y que se llaman *esfuerzos residuales*. La magnitud y distribución de estos esfuerzos residuales se puede determinar superponiendo a la distribución de esfuerzos (parcial o totalmente plásticos) producida por la carga inicial, la producida por una carga igual y de sentido contrario. El efecto exterior de añadir a la carga inicial otra igual y opuesta equivale a descargar el elemento. Sin embargo, en esta descarga la distribución de esfuerzos es elástica, como se indica en la figura 14-5. Más aún, la descarga *BC* puede prolongarse de manera que se obtengan esfuerzos de signo contrario, por debajo del eje ϵ, y seguiría la dirección y sentido de *BC* hasta alcanzar el punto de cedencia en esta compresión. Naturalmente que la descarga será elástica, y se podrá seguir este método, en tanto que los esfuerzos residuales así obtenidos no rebasen el valor del esfuerzo de cedencia.

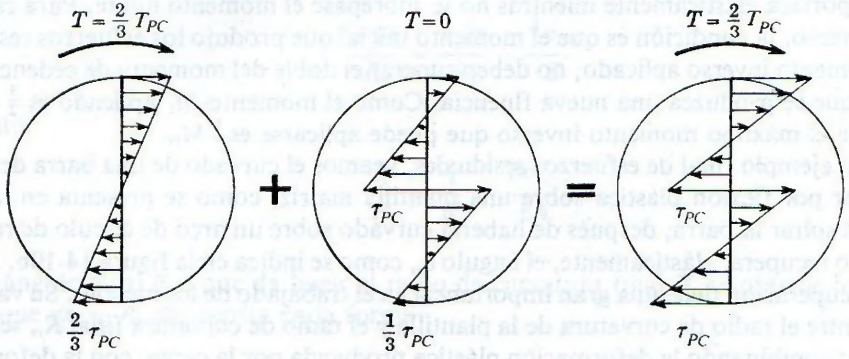
Como primer ejemplo de distribución de esfuerzos residuales, veamos el caso de una barra de sección circular en la que, mediante la aplicación del momento torsionante límite, se ha alcanzado el estado plástico en toda la sección. Como se ha dicho en la sección 14-2, el momento límite en este caso es $\frac{4}{3}$ del momento torsor de cedencia, y la distribución de esfuerzos es la representada en la figura 14-6a. Para descargar la barra, se aplica un momento torsor igual y opuesto, como se indica en la figura 14-6b, y recordando que la descarga supone una distribución elástica de esfuerzos, se obtiene la distribución indicada. Superponiendo las cargas y las distribuciones de esfuerzos de (a) y (b), se obtiene la barra descargada, pero con los esfuerzos residuales indicados en (c).

Un fenómeno muy interesante que tiene lugar cuando la barra queda sometida a los esfuerzos residuales, es que en estas condiciones se comporta elásticamente mientras no se rebase el momento torsor límite aplicado inicialmente, como se indica en la figura 14-7. En efecto, superponiendo los estados (a) y (b) de la figura, se alcanza el estado plástico inicial, como se presenta en (c). Sin embargo, si la carga se aplica en sentido contrario, los esfuerzos residuales son desfavorables y no se puede aplicar un momento torsor mayor de $\frac{2}{3}$ de T_{PC} sin que se alcance el esfuerzo límite en algunos puntos, como se observa en la figura 14-8. Evidentemente, si la suma del momento torsionante inicial que cansó los esfuerzos residuales, y



(a) Esfuerzos elásticos (b) Esfuerzos residuales (c) Totalmente plástico

Figura 14-7. Momento torsionante inicial vuelto a aplicar, en (c) de la figura 14-6.



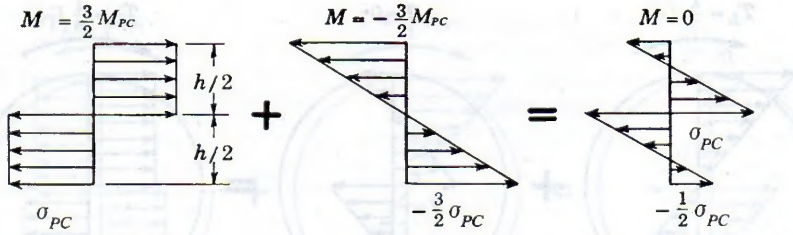
(a) Esfuerzos elásticos (b) Esfuerzos residuales (c) Comienzo de la cedencia

Figura 14-8. Efecto de una nueva carga en sentido inverso, en (c) de la figura 14-6.

este último aplicado en sentido contrario, es mayor que $2T_{PC}$, tendrán lugar nuevas deformaciones plásticas. En tales condiciones, la cedencia adicional que tiene lugar en cada ciclo, conduce rápidamente a la ruptura, como ocurre cuando se dobla (flexión plástica) en uno y otro sentido una barra de metal unas cuantas veces*.

Como segundo ejemplo de esfuerzos residuales, consideremos una sección rectangular de una viga, que ha sido llevada al estado plástico total por haber aplicado el momento flexionante límite. Para la sección rectangular, el momento límite es $\frac{3}{2}$ del momento de cedencia y da lugar a la distribución de esfuerzos que indica la figura 14-9a. Suprimir la carga equivale a añadir una carga opuesta (b) a la de (a), y recordando que la descarga será elástica, el resultado es una barra descargada, pero con una distribución de esfuerzos residuales como la indicada en (c) de la misma figura. Obsérvese que los esfuerzos residuales están equilibrados en el conjunto de la sección, pero si se quita parte de la sección, se producirá cierto dese-

* Para más detalles, véase *Theory of Limit Design* de J. A. van den Broek, Wiley, Nueva York, 1948, págs. 23-25.



(a) Estado totalmente plástico (b) Descarga elástica (c) Esfuerzos residuales

Figura 14-9. Esfuerzos residuales en la flexión.

quilibrio que se traducirá en deformaciones. Esto explica por qué las piezas metálicas obtenidas por deformación en frío (estampado por ejemplo), se pueden deformar o distorsionar al ser maquinadas posteriormente.

Como se ha dicho en el caso de la torsión una viga que ha sido descargada después de haber alcanzado el estado plástico total puede cargarse de nuevo en el mismo sentido, y la viga se comportará elásticamente mientras no se sobrepase el momento límite. Para cargas en sentido inverso, la condición es que el momento inicial que produjo los esfuerzos residuales, más el momento inverso aplicado, no deben superar el doble del momento de cedencia, si no se quiere que se produzca una nueva fluencia. Como el momento M_L aplicado es $\frac{3}{2}$ de M_{PC}, resulta que el máximo momento inverso que puede aplicarse es $\frac{1}{2}M_{PC}$.

Como ejemplo final de esfuerzos residuales, veamos el curvado de una barra de sección rectangular por flexión plástica sobre una plantilla matriz, como se presenta en la figura 14-10a. Al soltar la barra, después de haberla curvado sobre un arco de círculo de radio R_o, retrocede o recupera, elásticamente, el ángulo θ_r, como se indica en la figura 14-10b. Este ángulo de recuperación tiene una gran importancia en el trabajado de los metales. Su valor, y la relación entre el radio de curvatura de la plantilla y el radio de curvatura final R_f, se pueden determinar combinando la deformación plástica producida por la carga, con la deformación elástica producida por la descarga.

Como se dijo en la sección 5-2, la deformación unitaria en la flexión es $\epsilon = y/\rho$, por lo que en un elemento de la superficie de la barra, la deformación plástica inicial, en la figura 14-10a viene dada por:

$$\epsilon_o = \frac{h/2}{R_o}$$

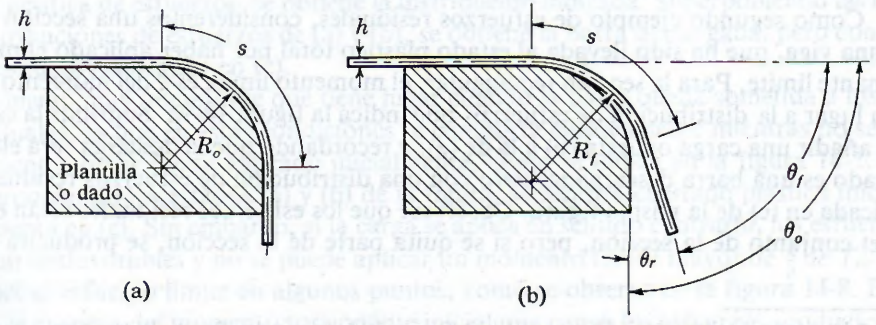


Figura 14-10. Recuperación elástica en el curvado o doblado de barras.

y la deformación final residual, figura 14-10b, es:

$$\epsilon_f = \frac{h/2}{R_f}$$

La descarga de la barra equivale a la aplicación de un momento opuesto al momento límite, en la barra deformada como en (a). Como se ha visto en la figura 14-9b, el esfuerzo máximo en esta descarga es $\frac{3}{2}$ de σ_{PC} y la correspondiente deformación elástica es:

$$\epsilon_e = \frac{\sigma}{E} = \frac{\frac{3}{2}\sigma_{PC}}{E}$$

Superponiendo estas deformaciones resulta la deformación final o residual:

$$\epsilon_f = \epsilon_o - \epsilon_e$$

es decir,

$$\frac{h/2}{R_f} = \frac{h/2}{R_o} - \frac{\frac{3}{2}\sigma_{PC}}{E}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{R_f} = \frac{1}{R_o} - \frac{3\sigma_{PC}}{Eh} \qquad (14\text{–}6)$$

El ángulo final θ_f a que da lugar el radio de curvatura final R_f se obtiene teniendo en cuenta que $ds = R_f\, d\theta$, escrita en la forma

$$d\theta = \frac{1}{R_f}\, ds$$

e integrando,

$$\theta_f = \int_0^s \frac{1}{R_f}\, ds$$

Como $1/R_f$ es constante y la longitud s de la porción curvada es $s = R_o\theta_o$, resulta:

$$\theta_f = \frac{R_o}{R_f}\theta_o$$

con lo que el ángulo de recuperación elástica es:

$$\theta_s = \theta_o - \theta_f = \theta_o\left(1 - \frac{R_o}{R_f}\right)$$

Sustituyendo el valor de R_f dado en la ecuación (14-6) se obtiene finalmente:

$$\theta_s = \theta_o R_o\left(\frac{3\sigma_{PC}}{Eh}\right) \qquad (14\text{–}7)$$

Esta expresión indica que el valor relativo del ángulo de recuperación elástica se reduce empleando un radio de curvado pequeño, o barras de espesor grande, o un material que tenga un valor pequeño de la deformación en el punto de fluencia, σ_{PC}/E. También dice cual es el valor que debe darse al ángulo de curvado θ_o para que después de la recuperación, el ángulo final sea el especificado.

En las barras de sección circular sometidas a torsión en estado plástico, también tiene lugar una recuperación elástica cuando se deja de aplicar el momento torsionante límite. En este caso, el retroceso elástico es igual al ángulo de torsión producido por la descarga (elástica) de la barra.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1414. Las barras extremas, en la figura 14-11, son de aluminio (aleación 2024-T4) para el que $\sigma_{PC} = 330$ MPa. La barra central es de acero, con $\sigma_{PC} = 290$ MPa. La sección recta de cada barra de aluminio tiene un área de 600 mm^2 y la de la barra de acero es de 900 mm^2. Si P es la carga límite, determinar los esfuerzos residuales al suprimir P. Se supone que las barras están firmemente empotradas en su base, y en su extremo superior perfectamente sujetas a la placa rígida que les transmite la acción de la carga P; $E_{\text{Alum.}} = 70$ GPa y $E_{\text{Acero}} = 200$ GPa.

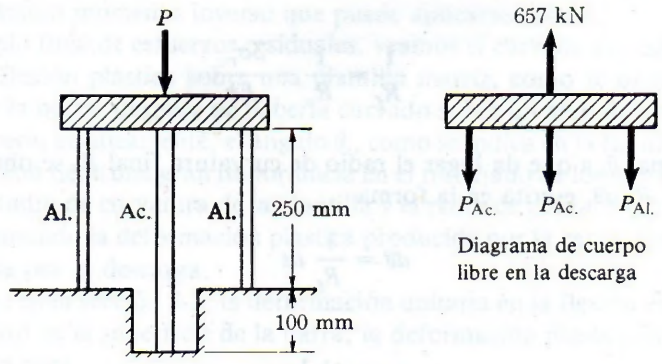


Figura 14-11.

Solución: La carga límite es aquella para la que comienza la cedencia en las tres barras. Su valor es:

$$[P = \Sigma A\sigma_{PC}] \qquad P_L = 2(600 \times 10^{-6})(330 \times 10^6) + (900 \times 10^{-6})(290 \times 10^6)$$
$$= [2(198) + 261] \times 10^3 = 657 \text{ kN}$$

La aplicación de una carga igual y opuesta a este valor equivale a suprimir la carga. Suponiendo que esta acción es elástica, se aplica el procedimiento de la sección 2-5 para sistemas estáticamente indeterminados. Se obtiene una primera relación entre las fuerzas de las barras aplicando la condición de equilibrio estático,

$$[\Sigma F = 0] \qquad 2P_{\text{Al.}} + P_{\text{Ac.}} = 657 \text{ kN} \qquad (a)$$

La otra relación necesaria es una condición entre deformaciones; el alargamiento ha de ser el mismo en las tres barras:

$$\left[\left(\frac{PL}{AE}\right)_{Al.} = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{Ac.}\right] \qquad \frac{P_{Al.}(250)}{(600)(70)} = \frac{P_{Ac.}(350)}{(900)(200)} \quad \text{o} \quad P_{Ac.} = 3.06P_{Al.} \qquad (b)$$

Resolviendo el sistema formado se obtiene:

$$P_{Al.} = 130 \text{ kN} \quad \text{y} \quad P_{Ac.} = 398 \text{ kN}$$

Sumando algebraicamente estos resultados de la descarga y las cargas iniciales (en cedencia) se obtienen las fuerzas residuales:

$$P_{Al.} = 130 - 198 = -68 \text{ kN}$$
$$P_{Ac.} = 398 - 261 = +137 \text{ kN}$$

Por tanto, los esfuerzos residuales pedidos son:

$$\left[\sigma = \frac{P}{A}\right] \qquad \sigma_{Al.} = -\frac{68 \times 10^3}{600 \times 10^{-6}} = -113 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

$$\sigma_{Ac.} = \frac{137 \times 10^3}{900 \times 10^{-6}} = +152 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp.}$$

Obsérvese que después de este preesforzado el sistema sigue comportándose como elástico para cualquier valor de la carga que se vuelve a aplicar con tal de que no se sobrepase la carga límite.

PROBLEMAS

1415. En el problema ilustrativo 1414 la sección de la barra de acero tiene un área de 1200 mm^2. Si se aplica una carga de 600 kN y luego se suprime, determinar la fuerza residual en cada barra.

Resp. $P_{Ac.} = 54.7$ kN

1416. La barra de la figura P-1416 tiene sus extremos firmemente empotrados en soportes rígidos. Los esfuerzos de cedencia para el acero y el aluminio son, respectivamente, 290 y 330 MPa. Determinar los esfuerzos residuales si se aplica la carga límite P y luego se suprime.

1417. Resolver el problema anterior si se aplica una fuerza $P = 350$ kN que luego se suprime.

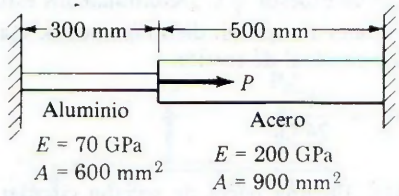


Figura P-1416 y P-1417.

Resp. $\sigma_{Al.} = -15.0$ MN/m^2;
$\sigma_{Ac.} = -10.0$ MN/m^2

1418. Una viga compuesta está formada por cuatro tiras de aluminio de 4 mm de espesor, con

unas capas de material plástico entre ellas, presentando la sección indicada en la figura P-1418.

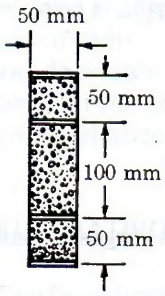


Figura P-1418.

Las capas de plástico actúan solamente como elemento de unión entre las tiras de aluminio, pero su efecto en la flexión es pácticamente despreciable. Se aplica a la sección un momento flexionante de 16 kN · m, suprimiéndolo a continuación. Determinar los esfuerzos residuales si el de cedencia es $\sigma_{PC} = 300$ MPa.

Resp. $\mp$ 20 MPa en las tiras interiores; o $\pm$ 40 MPa en los exteriores.

1419. El diámetro exterior de un eje circular hueco es el doble del anterior. Determinar los esfuerzos residuales una vez aplicado durante unos instantes el momento torsor límite.

1420. El torsionante aplicado a una barra circular maciza da lugar a que la cedencia alcance una capa de espesor $\frac{1}{2}r$. Determinar los esfuerzos residuales al suprimir dicho momento. Hallar el ángulo residual de torsión.

Resp. $\sigma_r = \dfrac{17_D}{24\ G_r}$

1421. En una barra de sección circular de 10 mm de diámetro y 1 m de longitud se doblan sus extremos en ángulos rectos con la barra, en un trozo de 150 mm en cada uno. Determinar el ángulo de torsión que hay que dar a uno de los extremos respecto del otro para que el ángulo residual de torsión sea exactamente de 90°; G = 80 GN/m^2 y $\tau_{PC} = 140$ MN/m^2.

Resp. 108.7°

1422. Una barra de sección rectangular de 50 mm de espesor por 90 mm de altura se somete a un momento flexionante que da lugar a que dos tercios de la sección estén en estado plástico. Si $\sigma_{PC} = 260$ MN/m^2, determinar los esfuerzos residuales al dejar de aplicar el momento.

1423. A una barra de sección rectangular de 30 mm de ancho por 60 mm de altura se aplica un momento flexionante de 6 kN · m durante unos instantes. Sabiendo que $\sigma_{PC} = 280$ MN/m^2, determinar el esfuerzo residual en un punto de sección a 20 mm de la línea neutra.

Resp. $\sigma_r = 15.1$ MN/m^2

1424. Si la sección de una viga carece de eje de simetría horizontal, y se carga hasta alcanzar el estado plástico total, demostrar que la descarga elástica da lugar a un esfuerzo residual superior al esfuerzo de cedencia, lo cual, al ser imposible, indica que en este caso no se puede aplicar la teoría de la descarga elástica.

1425. La sección representada en la figura P-1425 se somete a un momento flexionante tal que se alcanza el esfuerzo de cedencia a una distancia de 60 mm a uno y otro lado de la línea neutra. Sabiendo que $\sigma_{PC} = 270$ MPa, determinar los esfuerzos residuales al suprimir la carga.

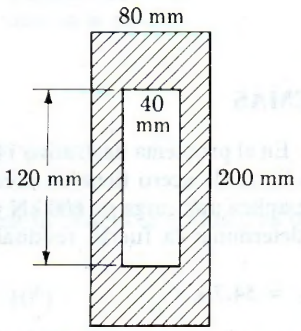


Figura P-1425.

1426. Una lámina de acero de 10 mm de espesor se ha curvado en forma de arco de 90° y 100 mm de radio. Sabiendo que $\sigma_{PC} = 270$ MPa y $E = 200$ GPa, determinar el radio residual de curvatura.

Resp. $R = 110$ mm

1427. Hallar la magnitud inicial que debe darse al arco de la lámina del problema anterior para que el arco final sea de 90°.

1428. Se utiliza una plantilla circular de 250 mm de radio para curvar una placa de aluminio 2024-T4 de 10 mm de espesor. Determinar el arco de contacto para que el residual sea 180°; σ_{PC} = 330 MN/m^2 y E = 70 GN/m^2.

Resp. $\theta_o = 282°$

14-5. ANÁLISIS AL LÍMITE

Se estudia ahora la aplicación de la carga límite y de los momentos límites de torsión y de flexión al análisis de estructuras estáticamente indeterminadas. Este estudio, llamado *análisis al límite**, tiene por objeto obtener la carga que produce el colapso real de la estructura al producirse deformaciones muy grandes. Sólo es aplicable a materiales dúctiles, que en este estudio aproximado, se suponen elasto-plásticos perfectos, figura 14-1b. El método es realmente sencillo, y consta sólo de dos fases. La primera es un estudio geométrico de la estructura para determinar qué parte o partes deben llegar al estado plástico total, para permitir que la estructura, en conjunto, pueda tener grandes deformaciones. La segunda fase es una aplicación de las condiciones de equilibrio estático, lo que determina los valores de las cargas exteriores que dan lugar a que en estos puntos localizados se alcance el estado plástico total.

En el problema ilustrativo 1414 se ha tenido ocasión de realizar un caso de análisis límite aplicado a barras axialmente cargadas. Como segundo ejemplo, veamos el caso de la barra rígida de la figura 14-12 soportada por dos varillas de diferentes longitudes y articulada en un extremo. En la solución elástica, los alargamientos de las varillas han de ser proporcionales a su distancia a la articulación. Esta condición se traduce en una relación entre P_A y P_B que, junto con las ecuaciones de la estática $\Sigma M_R = 0$, permite determinar la máxima carga que puede aplicarse sin sobrecargar ninguna de las dos varillas.

En el análisis al límite, sin embargo, el cálculo es más simple. La primera fase indica que, para que las deformaciones puedan ser muy grandes, en este caso, las dos varillas han de alcanzar el estado plástico total. Por tanto, como segunda fase, se han de aplicar únicamente

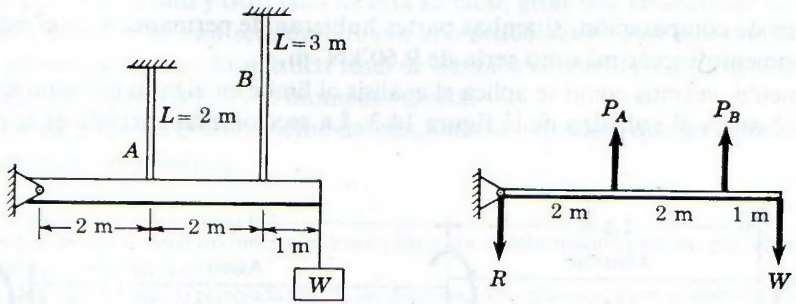


Figura 14-12.

* Véase J. A. Van den Broek, *Theory of Limit Design*, Wiley, N. York, 1948, para una justificación de los principios expuestos y una extensa aplicación a vigas hiperestáticas y otras estructuras.

ecuaciones de la estática. La capacidad de carga de cada varilla, en el estado plástico total, es $P = A\sigma_{PC}$. Se supone que las secciones de las barras de acero A y B son 300 mm^2 y 400 mm^2, respectivamente, y que los esfuerzos de cedencia son de 300 y de 290 MPa. Tomando momentos respecto de la articulación, para W resulta el valor:

$$[\Sigma M_R = 0] \qquad 5W = 2(300 \times 10^{-6})(330 \times 10^6) + 4(400 \times 10^{-6})(290 \times 10^6)$$
$$W = 132 \text{ kN}$$

Obsérvese que, como se ha indicado en la fase primera, mientras no se alcance este valor de W, las deformaciones del conjunto de la estructura no serán grandes, ya que una de las dos varillas no habrá llegado al estado plástico y, por tanto, su alargamiento será elástico. En estas condiciones, la barra rígida horizontal no podrá tener otro giro respecto a la articulación que el que le permita el alargamiento elástico de la varilla que no ha alcanzado la cedencia. Como carga de seguridad se toma el valor calculado de W dividido entre un factor de seguridad apropiado. A efectos de comparación, si ambas varillas hubieran de permanecer en el estado elástico, la carga máxima se reduciría a 119 kN.

Como ejemplo de análisis al límite en torsión, veamos el problema de la barra compuesta, empotrada en sus dos extremos, que representa la figura 14-13. El problema consiste en la determinación del torsionante máximo T que puede aplicarse en la sección de unión de las dos partes de que consta la barra. Será aquel que empiece a producir una deformación, en este caso ángulo de torsión, excesivamente grande y que continúa sin aumento posterior de carga.

Primera fase: Para que esto ocurra, ambas partes constitutivas del eje han de entrar en el estado plástico total, ya que mientras una de ellas no lo alcance, el ángulo girado por efecto de T es solamente el que le permita la parte de barra que no ha llegado a este estado plástico total. El momento límite de cada parte es $T_L = \frac{4}{3} T_{PC} \frac{4}{3} \pi r^3/2 \tau_{PC}$. Del equilibrio de momentos con respecto al eje, segunda fase, se tiene:

$$[\Sigma T = 0] \qquad T = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)(0.035)^3(160 \times 10^6) + \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)(0.025)^3(140 \times 10^6)$$
$$= 18.9 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textbf{Resp.}$$

Para efectos de comparación, si ambas partes hubieran de permanecer en el estado elástico total, el momento torsor máximo sería de 9.60 kN · m.

Finalmente, veamos cómo se aplica el análisis al límite en vigas o estructuras sometidas a flexión. Volvamos al voladizo de la figura 14-3. La sección más cargada es la del empotra-

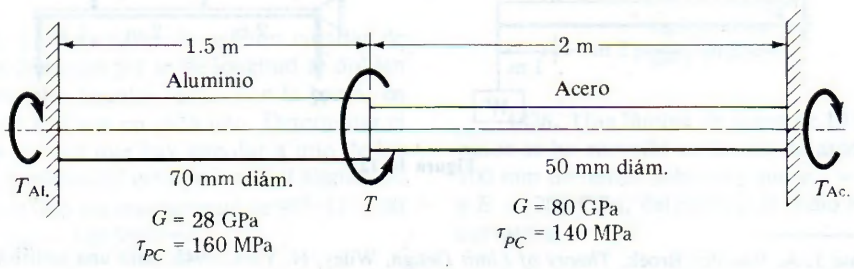


Figura 14-13.

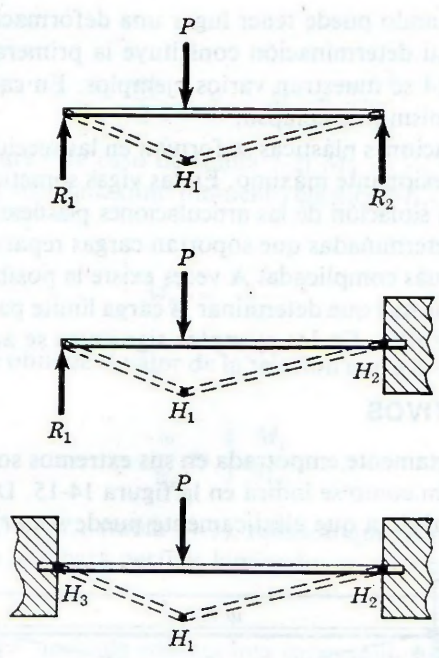


Figura 14-14. Las articulaciones plásticas *H* se forman en las secciones de máximo momento flexionante.

miento, y al aumentar las fuerzas exteriores pasa sucesivamente por el estado totalmente elástico, al parcialmente plástico y, por último, al totalmente plástico. En tal punto, otras secciones, como *b-b*, están en estado parcialmente plástico, mientras que las secciones a la izquierda de *a-a* permanecen en estado elástico. Así, pues, hasta que alguna sección alcance el estado elástico total, el extremo del voladizo no tendrá un desplazamiento incontrolado, ya que la sección de empotramiento, que es la más cargada, podrá seguir absorbiendo un incremento de momento flexionante. Ahora bien, al llegar una sección al estado plástico total, todas las fibras siguen deformándose sin necesidad de aumento de carga, lo que permite a las dos partes de una viga, a uno y otro lado de esta sección, girar una respecto de la otra, como cuerpo rígido*, como si en esta sección hubiera una articulación. Por este motivo, una sección que ha alcanzado el estado plástico total se llama *articulación plástica*, y el momento flexionante que da lugar a ello es el momento límite.

El colapso de una viga estáticamente determinada se considera que ha llegado cuando se forma una articulación plástica†

---

* No se tiene en cuenta el reendurecimiento que se produce por la deformación plástica, por suponer que se trata de un material elasto-plástico perfecto.

† **N. de T.** Una viga isostática, prescindiendo de las deformaciones elásticas, es un sistema estrictamente indeformable, por lo que al introducir *una* articulación plástica (equivalente a una articulación con rozamiento) pasa a ser deformable (como sólido rígido) para los valores de las fuerzas o cargas que puedan vencer este rozamiento.

En las vigas y estructuras estáticamente indeterminadas, cada ligadura hiperestática o sobrante es una condición más, superabundante, de indeformabilidad del sistema (como sólido rígido y prescindiendo de las deformaciones elásticas, como antes). Por tanto, el número de articulaciones plásticas necesarias para producir el colapso es igual al de ligaduras sobrantes, para pasar a ser estrictamente indeformable, más una, para que ya sea deformable

El perfil de la viga, cuando puede tener lugar una deformación incontrolada, se llama *mecanismo de colapso*, y su determinación constituye la primera fase citada en el análisis al límite. En la figura 14-14 se muestran varios ejemplos. En cada uno de ellos, las líneas punteadas indican el mecanismo de colapso.

En general, las articulaciones plásticas se forman en las secciones de fuerza cortante nula, es decir, de momento flexionante máximo. En las vigas sometidas a fuerzas concentradas es, fácil pues, determinar la situación de las articulaciones plásticas que se puedan formar. En las vigas estáticamente indeterminadas que soportan cargas repartidas, la localización de las articulaciones plásticas es más complicada. A veces existe la posibilidad de más de un mecanismo de colapso, por lo que hay que determinar la carga límite para cada una de las posibilidades y tomar la menor de ellas. En los ejemplos siguientes se aclara todo lo dicho.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

1429. Una viga perfectamente empotrada en sus extremos soporta una carga uniformemente distribuida de w N/m como se indica en la figura 14-15. Determinar la carga límite y compararla con la carga máxima que elásticamente puede soportar.

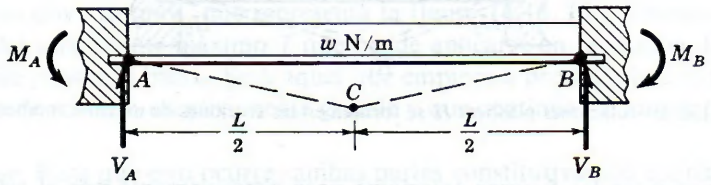


Figura 14-15.

Solución: Por simetría, las secciones de fuerza cortante nula y momento flexionante máximo son la central y las dos extremas. El mecanismo de colapso se ha dibujado en línea punteada, y tiene lugar al formarse articulaciones plásticas en A, B y C, por alcanzar, en estos puntos, los momentos flexionantes el valor del momento límite M_L. Las reacciones hiperestáticas V_A y M_A se calculan aplicando las condiciones de equilibrio estático, en cada una de las partes entre dos articulaciones plásticas, con la condición de que el momento en estas articulaciones plásticas ha de ser igual al momento límite a diferencia del caso en una articulación normal. Un procedimiento equivalente y preferible, consiste en aplicar la definición de momento flexionante, como se ve a continuación.

Como los valores de M_A, M_B y M_C se hacen todos iguales a M_L, pero los signos son negativos en A y B y positivo en C, se tiene:

$$[M_C = (\Sigma M)_{izq}] \qquad M_L = V_A \frac{L}{2} - M_L - \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right) \qquad (a)$$

$$[M_B = (\Sigma M)_{izq}] \qquad -M_L = V_A L - M_L - (wL)\left(\frac{L}{2}\right) \qquad (b)$$

como sólido rígido. En las vigas estáticamente indeterminadas de la figura 14-14 no se han tenido en cuenta las reacciones horizontales, pero en una estructura porticada, por ejemplo con dos empotramientos, es decir, tres reacciones sobrantes, serían necesarias cuatro articulaciones plásticas para producir el colapso, como puede comprobarse fácilmente.

de donde

$$V_A = \frac{wL}{2} \quad \text{y} \quad M_L = \frac{wL^2}{16} \tag{c}$$

La solución elástica para este caso da (tabla 7-2) $M_A = -wL^2/12$. Prescindiendo del signo y suponiendo que M_A sea el máximo momento elástico M_{PC}, y w_e la máxima carga elástica, se tiene:

$$M_{PC} = \frac{w_e L^2}{12} \tag{d}$$

Dividiendo (*c*) entre (*d*) se obtiene el valor de la relación entre la carga límite y la carga elástica máxima:

$$\frac{w}{w_e} = \frac{4}{3}\frac{M_L}{M_{PC}} \qquad \textbf{Resp.}$$

que depende de la relación M_L/M_{PC} (tabla 14-1), relación que es apreciable para una sección rectangular o circular, pero que para perfiles laminados es próxima a la unidad, por lo que suele tomarse $M_L = M_{PC}$.*

1430. Una viga cantiléver apoyada soporta una carga uniformemente distribuida w N/m sobre toda su longitud, como se representa en la figura 14-16a. Determinar la relación entre la carga límite y el momento límite de su sección.

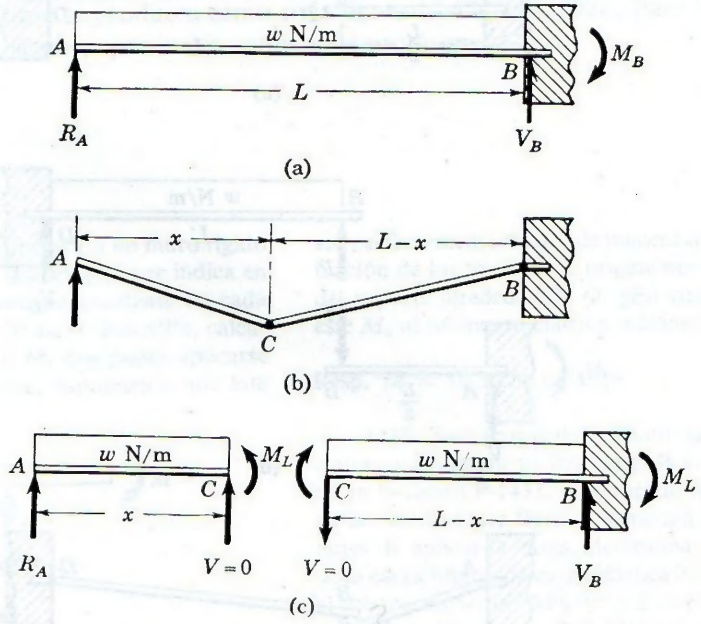


Figura 14-16.

* Véase Van den Broek, *Theory of Limit Design*, pág. 39.

Solución: El mecanismo de colapso es el indicado en la figura 14-16b. La posición de la articulación plástica C es desconocida, pero puede determinarse por la condición de que, siendo máximo el momento en C, la fuerza cortante vertical es nula. Esta condición (Sec. 4-4) es válida estén o no los esfuerzos y deformaciones en la zona elástica. Dibujando el diagrama del cuerpo libre de los dos segmentos de la viga, como en la figura 14-16c, y siendo los momentos en C y B los momentos límite de la sección, para el segmento AC tenemos:

$$[M_A = (\Sigma M)_{\text{der}}] \qquad 0 = M_L - \frac{wx^2}{2} \qquad (a)$$

y para el segmento CB:

$$[M_B = (\Sigma M)_{\text{izq}}] \qquad -M_L = M_L - \frac{w}{2}(L - x)^2 \qquad (b)$$

Resolviendo el sistema:

$$x = 0.414L \quad \text{y} \quad M_L = 0.0858qL^2 \qquad \textbf{Resp.}$$

1431. Dos vigas en voladizo tienen sus extremos en contacto mediante una articulación deslizante, y soportan una carga uniformemente distribuida como se indica en la figura 14-17. Determinar la carga límite.

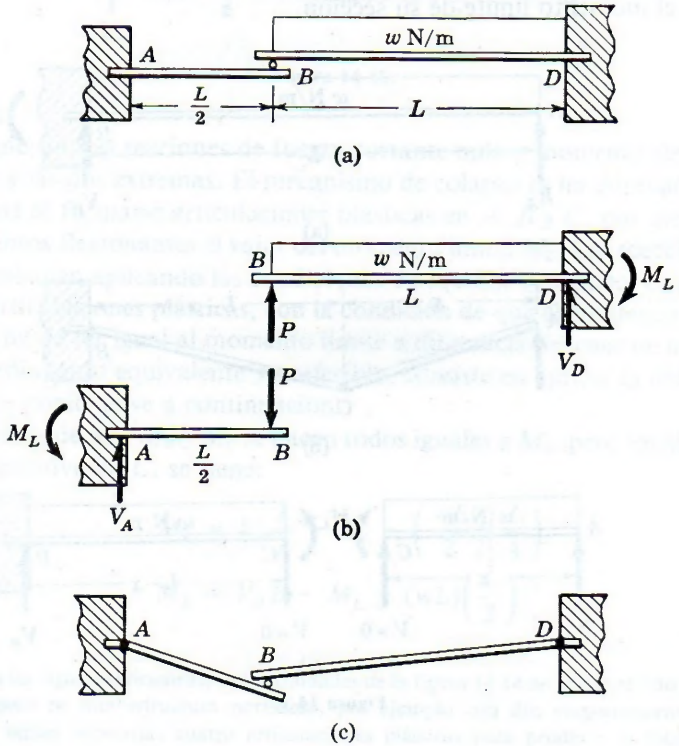


Figura 14-17.

Solución: En esta variante del problema anterior, al sustituir el apoyo fijo por el apoyo sobre el extremo de un voladizo, se introduce la posibilidad de una articulación plástica en A. Si ésta no se forma, se obtiene la solución del problema anterior, en la que $M_L = 0.0858\ wL^2$. Si se forma articulación plástica en A, el colapso puede producirse como se indica en la figura 14-17c.

Para determinar la carga límite para esta segunda posibilidad de colapso, se dibujan los diagramas de cuerpo libre de las dos vigas, como en (b) de la misma figura, donde los momentos de empotramiento valen M_L. Expresando estos momentos en función de la fuerza de contacto desconocida P, se tiene:

$$[M_A = (\Sigma M)_R] \qquad -M_L = -P\frac{L}{2}$$

$$[M_D = (\Sigma M)_L] \qquad -M_L = PL - \frac{wL^2}{2}$$

Eliminando P resulta:

$$M_L = \frac{wL^2}{6} = 0.167wL^2$$

Como este momento límite se produce con una carga w menor que la hallada anteriormente para $M_L = 0.0858wL^2$, será esta segunda posibilidad de colapso la que se daría antes, y la carga obtenida será la carga límite pedida. Obsérvese que cuando, como en este ejemplo, existen dos (o varias) posibilidades de colapso (dos mecanismos de colapso), el que ocurre es el que da una carga límite menor. En este caso, puede comprobarse que la mínima longitud de AB para que el colapso se produzca como en la figura 14-17c, es $0.207L$. Para longitudes menores de AB, el colapso se producirá como en el problema 1435.

PROBLEMAS

1432. Se sujeta un soporte a un muro rígido mediante tres tornillos iguales como se indica en la figura P-1432. La sección resistente de cada tornillo es de 150 mm^2. Si $\sigma_{PC} = 300$ MPa, calcular el máximo momento M_L que puede aplicarse en el extremo del soporte, suponiendo que éste sea perfectamente rígido, de manera que la deformación de los tornillos se origine por la rotación del soporte alrededor de O. ¿En cuánto excede este M_L al momento elástico máximo?

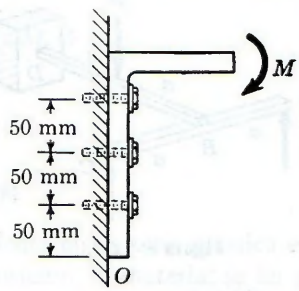


Figura P-1432.

Resp. $M = 13.5$ kN·m; 1.29

1433. Tres barras de 300 mm^2 cada una soportan conjuntamente una carga W como se indica en la figura P-1433. Suponiendo que ninguna de las varillas esté floja ni sometida a esfuerzos antes de aplicar la carga, determinar la relación de la carga límite a la carga elástica máxima. Para el bronce, $\sigma_{PC} = 140$ MN/m^2 y $E = 83$ GN/m^2, y para el acero, $\sigma_{PC} = 240$ MN/m^2 y $E = 200$ GN/m^2.

Resp. 1.31

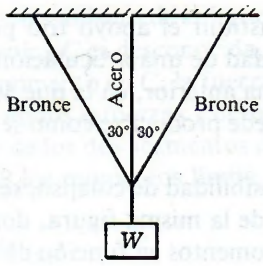


Figura P-1433.

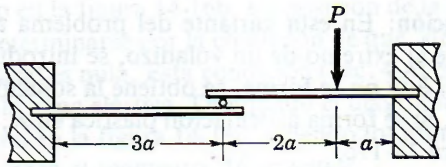


Figura P-1437.

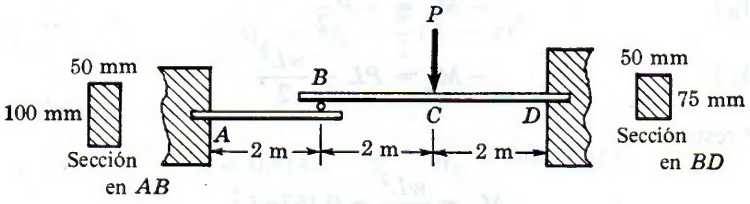


Figura P-1438.

1434. Determinar el máximo momento torsor que pueda aplicarse a 1.0 m del extremo derecho en el eje de la figura 14-13, sin que se produzca el colapso.

1435. Comprobar la afirmación hecha en el problema 1431 de que la longitud mínima de AB para que el colapso tenga lugar como en la figura 14-17c es de $0.207L$.

1436. Determinar la carga límite en la viga cantilever apoyada cargada como se indica en la figura P-1436.

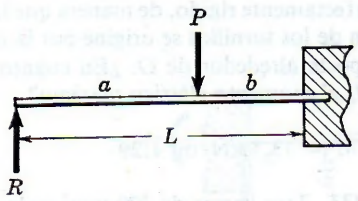


Figura P-1436.

Resp. $P_L = \dfrac{M_L}{ab}(L + a)$

1437. Una viga en voladizo apoya su extremo libre en el extremo de otra igual, por intermedio de un rodillo. Determinar la carga P_L que produce el colapso.

Resp. $P = 2M_L/a$

1438. Una viga en voladizo BD apoya su extremo libre en el extremo de otro voladizo AB, y soporta la carga P que indica la figura P-1438. Las secciones son las indicadas. Determinar la carga límite P_L si $\sigma_{PC} = 300$ MN/m^2. ¿Cómo sería el mecanismo de colapso si se intercambian las secciones de las vigas? ¿Cómo sería si ambas vigas tuvieran la misma sección?

Resp. $P = 31.6$ kN

1439. Una carga P está soportada por una viga en voladizo, cuyo extremo libre apoya en el centro de una viga simplemente apoyada, como se indica en la figura P-1439. Si el momento límite de esta última es $\frac{3}{4}$ del correspondiente al voladizo, determinar la carga límite P_L para la que empieza el colapso.

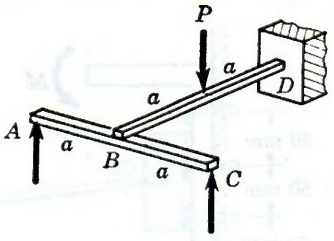


Figura P-1439.

Resp. $P = 3M_L/a$

1440. Dos vigas de acero se han montado en ángulo recto, y en contacto en sus puntos medios. La viga superior es un perfil W200 × 27 simplemente apoyado sobre un claro de 3 m, y la inferior es un perfil W250 × 33 simplemente apoyado sobre claro de 4 m. Soportan conjuntamente una carga P aplicada en el punto de contacto. Sabiendo que $\sigma_{PC} = 290$ MPa, determinar la carga P_L para la que comienza el colapso, suponiendo que $M_L = M_{PC}$.

Resp. $P = 206$ kN

1441. Una viga doblemente empotrada se carga como indica la figura P-1441. Llamando K a la relación del momento límite al momento elástico máximo, determinar la relación de la carga límite a la carga máxima en que empieza la cedencia. *Indicación*: Véase el problema 713.

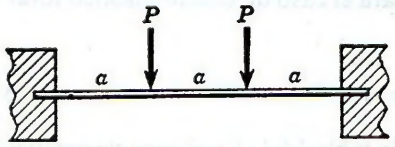


Figura P-1441.

Resp. $4/3\ K$

1442. Repetir el problema anterior en una viga doblemente empotrada con la carga del caso 6 de la Tabla 7-2.

Resp. $5/4\ K$

1443. Determinar la carga P en función del momento límite para la que empieza el colapso en la viga doblemente empotrada que indica la figura P-1443.

Resp. $P = 2M_L/3$

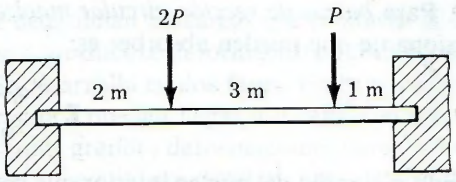


Figura P-1443.

1444. Una viga continua se apoya sobre dos claros de igual longitud L. Soporta una carga uniformemente repartida de w N/m sobre toda su longitud, como se indica en la figura P-1444. Determinar w en función de M_L al iniciarse el colapso.

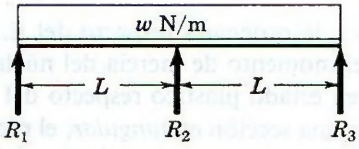


Figura P-1444 y P-1445.

1445. Repetir el problema 1444 si los extremos de la viga están perfectamente empotrados.

1446. Determinar la carga límite P_L en función del momento límite en la viga continua de la figura P-1446 cargada como se indica.

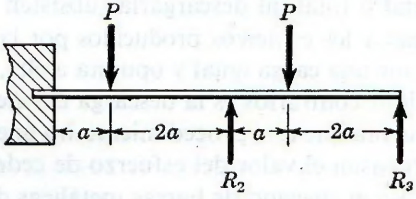


Figura P-1446.

Resp. $P = 2.5\ M_L/a$

RESUMEN

El cálculo en la zona plástica es aplicable solamente a los materiales dúctiles. En esta breve exposición, el material se ha supuesto elasto-plástico perfecto, sin tener en cuenta el efecto de reendurecimiento que se presenta al final de la deformación en la zona plástica.

Para *barras de sección circular maciza* a torsión en estado plástico parcial el momento torsionante que pueden absorber es:

$$T = \frac{\pi r^3}{6}\left(4 - \frac{r_i^3}{r^3}\right)\tau_{PC} \tag{14-1}$$

siendo r_i el radio del núcleo interior que permanece en estado elástico. Para el caso de estado plástico total, el momento torsor límite viene dado por:

$$T_L = \tfrac{4}{3}T_{PC} \tag{14-2}$$

Para vigas *simétricas* a flexión en un estado plástico parcial, el momento flexionante que puede ser absorbido es:

$$M = \frac{\sigma_{PC} I_i}{y_i} + 2\sigma_{PC} Q \tag{14-3}$$

siendo y_i la ordenada respecto del E.N. del plano límite entre los estados plástico y elástico, I_i el momento de inercia del núcleo aún elástico y Q el momento estático de *una* de las zonas en estado plástico respecto del E.N.

En una sección *rectangular*, el momento límite para el caso de estado plástico total viene dado por:

$$M_L = \tfrac{3}{2}M_{PC} \tag{14-4}$$

Para otras secciones, la relación M_L/M_{PC} aparece en la tabla 14-1. En el caso de perfiles laminados, el momento límite es prácticamente igual al máximo momento elástico M_{PC}.

Para secciones *asimétricas*, el E.N. varía de posición cuando la sección entra en el estado plástico. Para el estado totalmente plástico, el E.N. viene determinado por la condición de que las áreas a tensión y a compresión sean iguales.

Cuando la carga en una estructura hizo entrar a alguna sección en el estado plástico, parcial o total, al descargarla subsisten unos esfuerzos residuales. Se determinan superponiendo a los esfuerzos producidos por la carga real, los producidos (estado totalmente elástico) por una carga igual y opuesta a ella, ya que el efecto exterior de dos cargas iguales y de sentidos contrarios es la descarga del elemento o de la estructura. Es muy importante tener en cuenta que este procedimiento no puede aplicarse si los esfuerzos residuales así obtenidos sobrepasan el valor del esfuerzo de cedencia.

En el curvado de barras metálicas de sección rectangular sobre una superficie de radio R_o, la recuperación elástica al suprimir las fuerzas que han originado el curvado (plástico) da lugar a que el radio de curvatura residual sea distinto a R_o, y venga expresado por:

$$\frac{1}{R_f} = \frac{1}{R_o} - \frac{3\sigma_{PC}}{Eh} \tag{14-6}$$

y a la existencia de un ángulo de recuperación

$$\theta_r = \theta_o R_o\left(\frac{3\sigma_{PC}}{Eh}\right) \tag{14-7}$$

siendo h la altura (espesor de material) de la sección, y R_o y R_f los radios de curvatura del plano neutro.

El análisis al límite es el proceso por el cual se determinan las cargas que producen el colapso real de un elemento o estructura, al empezar a producirse deformaciones grandes que aumentarían sin incremento ulterior de la carga. Se desarrolla en dos fases. En la primera se determina qué parte o partes del elemento o estructura pueden llegar a alcanzar el estado de plasticidad total, dando lugar a que pueda presentar grandes deformaciones como sólido rígido. En la segunda fase se aplican las condiciones de equilibrio estático, para determinar las cargas exteriores que originan el estado plástico total en estas secciones.

15 información complementaria

15-1. ESFUERZO CORTANTE MÁXIMO ABSOLUTO (ECMA)

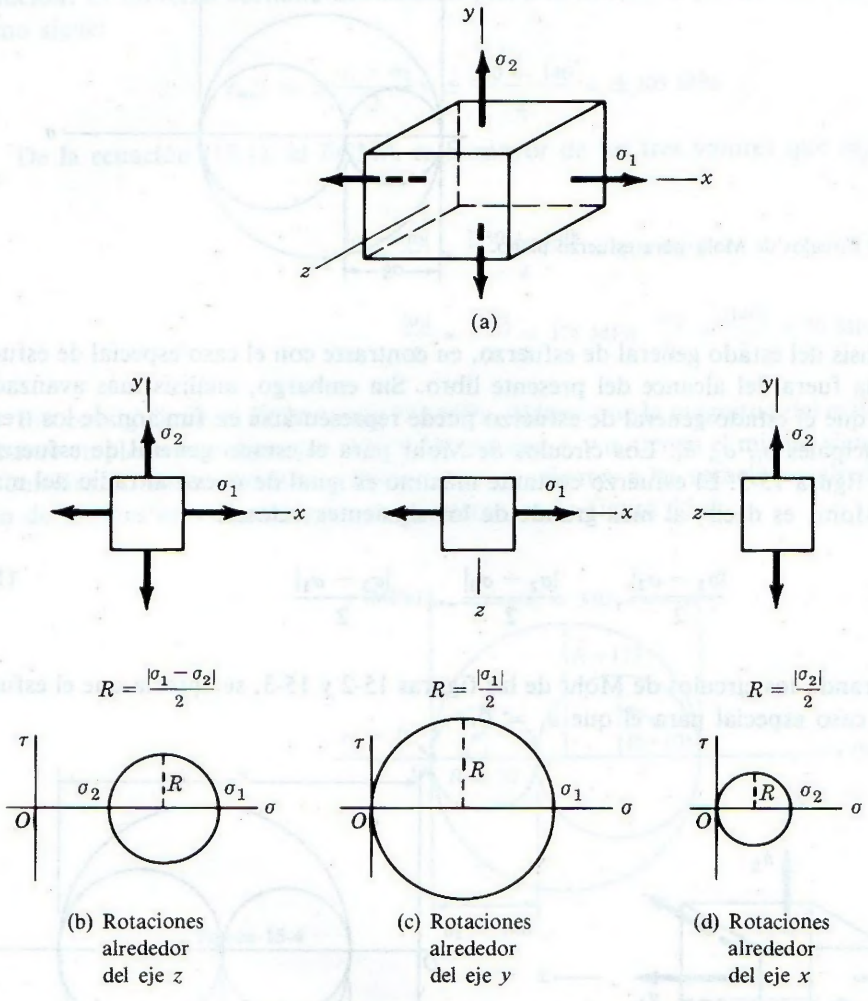
Hasta este momento el análisis de los esfuerzos cortantes para el caso de esfuerzo plano se ha limitado a los valores "en el plano". Consideraremos ahora la determinación del esfuerzo cortante máximo en un punto, ya sea que los esfuerzos cortantes estén "en el plano", o no. Como veremos, el esfuerzo cortante máximo no es necesariamente igual al esfuerzo cortante máximo en plano, dado por la ecuación que resulta de comparar las ecuaciones (9-9) y (9-10), o sea la

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad \textbf{(9-10a)}$$

Consideremos el estado de esfuerzo plano que actúa en un elemento diferencial de volumen, como el indicado en la figura 15-1(a). Por conveniencia, los ejes coordenados se han alineado en las direcciones de los esfuerzos principales. Los círculos de Mohr para las rotaciones del elemento alrededor de los ejes z, y, x, se muestran en las figuras 15-1(b), (c) y (d), respectivamente. (Se supone que $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$, pero las conclusiones son válidas aun si uno o ambos esfuerzos principales son negativos.) El esfuerzo cortante máximo estará representado por el radio del mayor círculo de Mohr, y por tanto será igual al mayor de los tres valores siguientes:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \quad \frac{|\sigma_1|}{2}, \quad \frac{|\sigma_2|}{2} \qquad \textbf{(15-1)}$$

(Los valores absolutos se emplean en estas expresiones porque el signo del esfuerzo cortante no suele ser de interés en el diseño.)



(b) Rotaciones alrededor del eje z

(c) Rotaciones alrededor del eje y

(d) Rotaciones alrededor del eje x

Figura 15-1 Esfuerzo cortante máximo absoluto

El mayor de los valores dados en la ecuación (15-1) se denomina *esfuerzo cortante máximo absoluto* (ECMA). Los tres círculos de Mohr de la figura 15-1 pueden trazarse adecuadamente utilizando un sistema de ejes como el mostrado en la figura 15-2.

El cálculo del esfuerzo cortante máximo absoluto puede resumirse como sigue:

1. Si σ_1 y σ_2 tienen el mismo signo (ambos de tensión o ambos de compresión), el ECMA es igual a $|\sigma_1|/2$, o bien a $|\sigma_2|/2$, el que sea mayor.

2. Si σ_1 y σ_2 tienen diferente signo (uno es de tensión y el otro de compresión), el ECMA es igual al esfuerzo cortante máximo en plano $|\sigma_1 - \sigma_2|/2$.

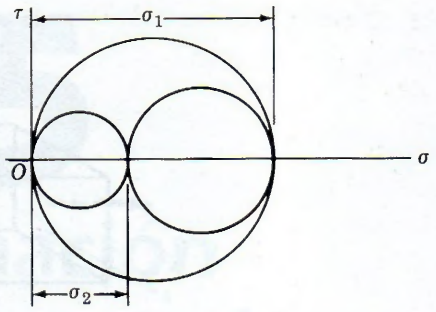


Figura 15-2 Círculos de Mohr para esfuerzo plano.

Un análisis del estado general de esfuerzo, en contraste con el caso especial de esfuerzo plano, queda fuera del alcance del presente libro. Sin embargo, análisis más avanzados* demuestran que el estado general de esfuerzo puede representarse en función de los tres esfuerzos principales σ_1, σ_2, σ_3. Los círculos de Mohr para el estado general de esfuerzo se tienen en la figura 15-3. El esfuerzo cortante máximo es igual de nuevo al radio del mayor círculo de Mohr, es decir, al más grande de los siguientes valores:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \quad \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \quad \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \tag{15-2}$$

Comparando los círculos de Mohr de las figuras 15-2 y 15-3, se aprecia que el esfuerzo plano es el caso especial para el que $\sigma_3 = 0$.

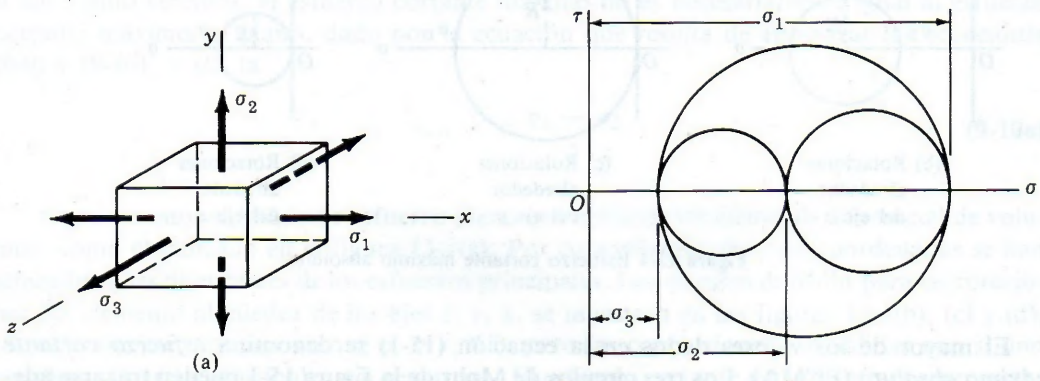


Figura 15-3 Círculos de Mohr para el estado general de esfuerzo.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

1501. Para un estado de esfuerzo plano, $\sigma_1 = \sigma_x = 350$ MPa y $\sigma_2 = \sigma_y = 140$ MPa. Determine el esfuerzo cortante máximo en plano y el esfuerzo cortante máximo absoluto (ECMA).

*Véase, por ejemplo, *Advanced Mechanics of Materials*, Robert D. Cook y Warren C. Young, MacMillan, Nueva York, 1985.

Solución: El esfuerzo cortante máximo en plano se calcula a partir de la fórmula (9-10a) como sigue:

$$\tau_{max} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm\frac{350 - 140}{2} = \pm 105 \text{ MPa} \qquad \textbf{Resp:}$$

De la ecuación (15-1), el ECMA es el mayor de los tres valores que siguen:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = \frac{|350 - 140|}{2} = 105 \text{ MPa}$$

$$\frac{|\sigma_1|}{2} = \frac{|350|}{2} = 175 \text{ MPa} \qquad \frac{|\sigma_2|}{2} = \frac{|140|}{2} = 70 \text{ MPa}$$

Por consiguiente, el ECMA vale 175 MPa. Nótese que la magnitud del esfuerzo cortante máximo en plano es menor que el ECMA, porque σ_1 y σ_2 tienen el mismo signo (ambos son de tensión). Los tres círculos de Mohr correspondientes a las rotaciones alrededor de cada uno de los tres ejes coordenados se muestran en la figura 15-4.

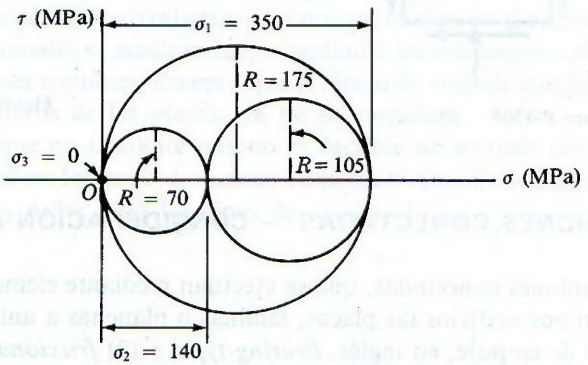


Figura 15-4

PROBLEMAS

1502. Mediante la figura 15-1(a) indique los planos en los que actúa cada uno de los tres esfuerzos cortantes dados en la ecuación (15-1).

1503. Para un estado de esfuerzo plano con $\sigma_1 = 35$ MPa y $\sigma_2 = 14$ MPa, determine (a) el esfuerzo cortante máximo en plano, y (b) el ECMA.

Resp. (b) 17.5 MPa.

1504. Repita el problema 1503 si $\sigma_1 = -40$ MPa y $\sigma_2 = -80$ MPa.

1505. Determine el ECMA para el estado de esfuerzo que se indica en la figura P-932 (pág. 312).

1506-1509. Para cada estado de esfuerzo que se muestra en las figuras P-1506 a P-1509, calcule (a) el esfuerzo cortante máximo en plano y (b) el ECMA.

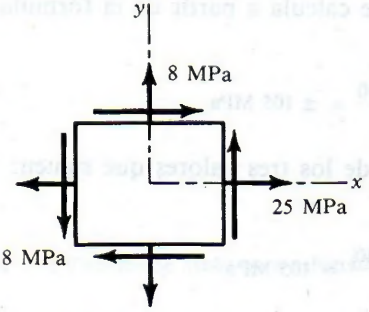


Figura P-1506

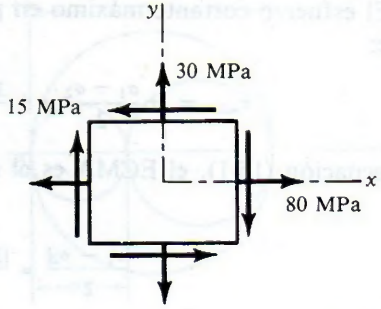


Figura P-1507

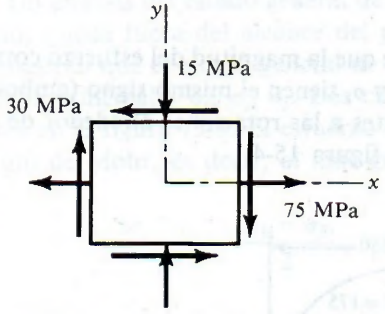


Figura P-1508

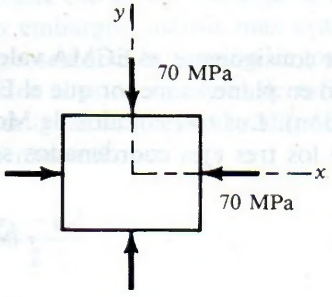


Figura P-1509

15-2. UNIONES CONECTADAS — CONSIDERACIÓN ADICIONAL

Las uniones conectadas, que se efectúan mediante elementos pasantes (conectores) que atraviesan por orificios las placas, láminas o planchas a unir, se dividen en (1) *comunes* (o de acción de empuje; en inglés, *bearing-type*) y (2) *friccionales* (o de acción de fricción; en inglés, *friction-type*). Las uniones conectadas comunes son las que utilizan remaches o tornillos (pernos) comunes o sin acabado. Las uniones conectadas friccionales se realizan con tornillos de alta resistencia, con acabado. Aunque las uniones con remaches o tornillos comunes se han empleado durante muchos años, desarrollos recientes en la elaboración de los tornillos de alta resistencia, han acelerado su utilización e impulsado su preferencia. En la construcción moderna en acero, la economía y la eficiencia se logran mejor con la soldadura de uniones hecha en el taller, y el atornillado con pernos de alta resistencia, en el montaje en campo. Sin embargo, el análisis de las uniones conectadas comunes sigue siendo la base para el diseño de conexiones del tipo friccional, con los tornillos extrarresistentes.

Durante el montaje de una estructura con uniones conectadas, se inducen fuerzas de tensión en los conectores, ya sea al enfriarse los remaches que son aplicados en caliente, o bien al apretar los tornillos (o pernos). Dichas tensiones producen una fuerza resultante entre las placas que se sujetan. Aunque no se conoce la intensidad de esa fuerza compresiva, suele ser relativamente pequeña. De manera que es despreciable la fricción entre las placas, y las cargas o fuerzas aplicadas se transmiten por los efectos comunes que se han descrito: cortante en el vástago de los conectores, y aplastamiento a presión de contacto entre éstos

y las placas. Cualquiera fricción o rozamiento que exista entre las planchas da un margen adicional de seguridad en las uniones conectadas comunes, o de empuje.

Se supone asimismo que los remaches o los tornillos no se flexionan, sino que permanecen esencialmente rectos. Esto es posible sólo si hay deformaciones elásticas iguales de las placas unidas y los cubrejuntas, entre filas contiguas de conectores. Del análisis realizado en el problema ilustrativo 1201 (pág. 391), referente al desgarramiento de la placa principal en la fila 2, es claro que dicha placa entre las filas 1 y 2 soporta sustancialmente más carga que el cubrejunta. Por tanto, el requisito físico de deformaciones iguales puede no verificarse, incluso si se considera el menor espesor de los cubrejuntas. Pero como las placas suelen ser dúctiles, deformaciones plásticas iguales pueden producírse a medida que los esfuerzos se aproximan al punto de fluencia.*

En las uniones conectadas friccionales, los tornillos de alta resistencia se aprietan hasta alcanzar un esfuerzo de tensión relativamente alto, causando con ello una intensa fuerza compresiva resultante entre las placas. Para asegurar una tensión inicial predeterminada en los tornillos, el apriete suele hacerse con una llave de tuercas calibrada, o torquimétrica, o con un procedimiento equivalente. En una unión conectada friccional, la carga se transmite por la fricción o rozamiento entre las placas, y no por los efectos del empuje y cortante en los conectores que se tienen en una unión conectada común, con remaches o pernos ordinarios. Aun cuando los tornillos no están sujetos a cortante, los reglamentos de diseño, por conveniencia, especifican la aplicación de un esfuerzo cortante permisible en el área transversal del tornillo. Estas uniones friccionales se analizan luego mediante los mismos procedimientos que se utilizan para las conexiones comunes, excepto que el efecto de empuje o aplastamiento de los tornillos contra los agujeros de las placas, ya no se considera.

En resumen, observamos que no obstante que no es factible un análisis exacto de las uniones remachadas o atornilladas, los procedimientos comparativamente sencillos explicados en el capítulo 12, son muy útiles para los fines de diseño.**

* Otros ejemplos de acción inelástica se discutieron en el capítulo 14.

** **(N. del R.)** La ingeniería de la construcción en acero perfecciona la combinación del uso de las uniones conectadas y las uniones soldadas, aprovechando los elementos mejores que se desarrollan en la actualidad.

A momentos de inercia

A-1. DEFINICIÓN DE MOMENTO DE INERCIA (DE UN ÁREA)

En muchas de las fórmulas empleadas en ingeniería, como resistencia de vigas, columnas, deformación de vigas, etc., aparecen expresiones analíticas de la forma $\int \rho^2 dA$, siendo ρ la distancia de un elemento diferencial de área dA a un eje. Las integrales de este tipo reciben el nombre genérico de *momentos de inercia**. Un momento de inercia de un área no tiene por sí mismo significado físico real alguno; es una mera expresión matemática que se representa en general por la letra I. Sin embargo, junto con otras magnitudes, como en la fórmula de la flexión $\sigma = Mc/I$, adquiere ya una cierta significación.

La expresión matemática del momento de inercia $\int \rho^2\, dA$ indica que un área se subdivide en elementos dA, y el área de cada uno de ellos se multiplica por el cuadrado de su distan-

* El término *momento de inercia* puede interpretarse así: La relación que existe entre la masa, es decir, inercia de un cuerpo, con la fuerza y la aceleración que produce es $F = Ma$. La ecuación que liga la fuerza aplicada a un sólido en rotación con su aceleración angular α es $Fd = (\int \rho^2\, dM)\, \alpha$. Si la primera ecuación indica que la fuerza es igual a la masa por la aceleración, por analogía, la segunda muestra que el momento de la fuerza es igual al momento de inercia por la aceleración angular. En este sentido, la expresión $\int \rho^2\, dM$ ha recibido el nombre de momento de inercia. Por semejanza, y porque en un sólido de espesor constante $\int \rho^2\, dM = \mu e \int \rho^2\, dA$, en el caso de áreas se denomina momento de inercia a la expresión $\int \rho^2\, dA$ (μ es la densidad o masa por unidad de volumen y e, el espesor).

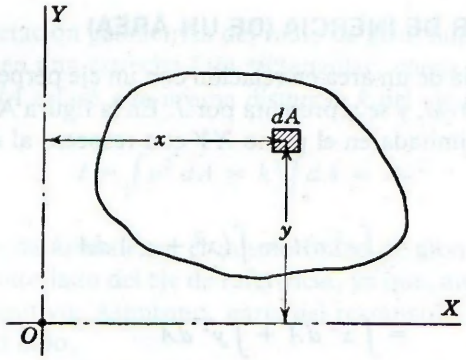


Figura A-1.

cia, o brazo de momento, al eje, sumándose después los productos obtenidos. Así, pues, si como representa la figura A-1, las coordenadas del centro del elemento diferencial dA son (x, y), el momento de inercia respecto del eje X es la suma de los productos de cada área dA por el cuadrado de su brazo de momento y. Por tanto:

$$I_x = \int y^2 \, dA \qquad \text{(A-1)}$$

Análogamente, el momento de inercia con respecto al eje Y viene dado por:

$$I_y = \int x^2 \, dA \qquad \text{(A-2)}$$

El momento de inercia (de un área) se llama en ocasiones *segundo momento* del área, ya que cada elemento superficial multiplicado por su brazo de momento da el momento del área (momento estático o *primer momento* del área); al multiplicarlo por segunda vez por el mismo brazo de momento, da lo que se ha llamado momento de inercia. Esta expresión de *segundo momento del área* es realmente más apropiada que la de *momento de inercia*, ya que las áreas no tienen masa y, por tanto, tampoco tienen inercia. Sin embargo, la expresión ha tomado tal carta de naturaleza que parece poco probable que pueda cambiarse.

Unidades y signos

Como $\int \rho^2 \, dA$ es el producto de una distancia al cuadrado por un área, es un término de cuarto grado. Así pues, si L es la dimensión longitud, la dimensión de I es L^4. Una unidad conveniente de L es el milímetro, lo que da milímetros cuartos (mm^4) como unidad dimensional de I.

El signo de I es independiente del signo del brazo de momento ρ, ya que éste aparece al cuadrado y siempre es positivo. El signo, pues, sólo depende del signo del área. Se define un área como positiva cuando intervenga sumando en la formación del área total que se considere, y como negativa cuando se reste (de otra mayor) para formar el área total. El momento de inercia de un área total siempre es positivo.

A-2. MOMENTO POLAR DE INERCIA (DE UN ÁREA)

El momento de inercia de un área en relación con un eje perpendicular a su plano se llama *momento polar de inercia*, y se representa por J. En la figura A-2, el momento de inercia de un área cualquiera delimitada en el plano XY con respecto al eje Z perpendicular a XY viene dado por:

$$\left[I = \int \rho^2 \, dA \right] \qquad J_z = \int r^2 \, dA = \int (x^2 + y^2) \, dA$$

$$= \int x^2 \, dA + \int y^2 \, dA$$

Por las ecuaciones (A-1) y (A-2) se tiene:

$$J_z = I_x + I_y \tag{A–3}$$

Esto significa que el momento polar de inercia de un área con respecto a un eje perpendicular a su plano es igual a la suma de los momentos de inercia respecto de dos ejes perpendiculares contenidos en dicho plano y que pasen por el punto de intersección del eje polar y del plano.

A-3. RADIO DE GIRO (O RADIO DE INERCIA)

El concepto de *radio de giro* se utiliza mucho en ingeniería, en particular, en las expresiones de las columnas. Se suele representar por k (a veces por r) y se define por:

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \text{o bien,} \quad I = Ak^2 \tag{A–4}$$

siendo I el momento de inercia y A el área.

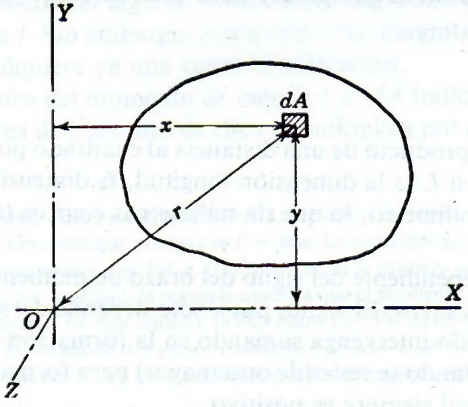


Figura A-2

Veamos una interpretación geométrica del radio de giro. Supongamos que el área de la figura A-1 se distribuye en una estrecha faja rectangular, como se indica en la figura A-3. Cada elemento de área dA estará a la misma distancia k del eje de inercia. El momento de inercia es, en este caso:

$$I = \int \rho^2 \, dA = k^2 \int dA = Ak^2$$

pues todos los elementos de área tienen el mismo brazo de momento. La faja rectangular puede colocarse a uno u otro lado del eje de referencia, ya que, aunque la distancia k sea negativa, su cuadrado es positivo. Asimismo, parte del rectángulo puede colocarse a un lado del eje, y el resto, al otro lado.

A la vista de estas consideraciones, el radio de giro se interpreta como la distancia uniforme a la que debe situarse el área total, respecto de un eje, para que tenga el mismo momento de inercia. De acuerdo con esto, para un área cuya dimensión, en sentido perpendicular al eje de referencia, sea muy pequeña comparada con la distancia al eje, el radio de giro equivale prácticamente a la distancia de su centro de gravedad al eje.

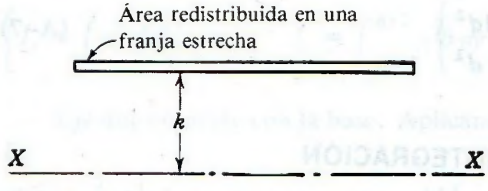


Figura A-3. Concepto de radio de giro (o radio de inercia).

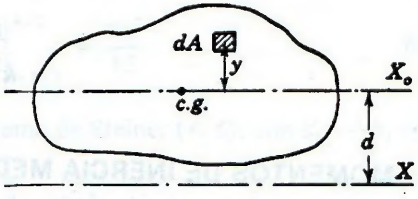


Figura A-4. Momentos de inercia con respecto a ejes paralelos.

A-4. TRASLACIÓN PARALELA DE EJES: TEOREMA DE STEINER

Con frecuencia, es necesario calcular el momento de inercia respecto de un eje, conocido el momento de inercia correspondiente a un eje paralelo. La fórmula para la traslación de ejes permite hacerlo sin necesidad de integrar de nuevo la fórmula general. Por ejemplo. en la figura A-4, el momento de inercia respecto del eje X_o que pasa por el centro de gravedad es $\bar{I}_x = \int y^2 \, dA$. El momento de inercia con respecto a un eje paralelo X situado a una distancia d del eje X_o viene dado por:

$$\left[I = \int \rho^2 \, dA \right] \qquad I_x = \int (y + d)^2 \, dA$$

$$= \int y^2 \, dA + 2d \int y \, dA + d^2 \int dA \qquad (a)$$

El factor d puede salir de la integral, ya que es constante. El segundo sumando del segundo miembro es cero, ya que $\int y \, dA$ es el momento estático del área respecto de X_o, que es igual a $A \cdot y$, siendo y la distancia del centro de gravedad al eje de referencia, que es nula por pasar X_o por el c.g. Por tanto:

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2 \qquad \textbf{(A-5)}$$

Esto significa que, para un área dada, el momento de inercia en relación con un eje cualquiera en su plano es igual al momento de inercia respecto de un *eje paralelo que pase por el centro de gravedad*, más el producto del área por el cuadrado de la distancia entre ejes.

Evidentemente, el menor momento de inercia con respecto a una determinada dirección será el correspondiente al eje que, con esa dirección, pase por el centro de gravedad. Obsérvese que en lugar de hablar de centro de gravedad debería decirse *centroide* del área A que se considera.

Entre los radios de giro correspondientes a ejes paralelos existe una relación análoga. Sustituyendo en la ecuación (A-5) I_x por Ak_x^2, e $\bar{I}_x$ por $A\bar{k}_x^2$ se tiene:

$$Ak_x^2 = A\bar{k}_x^2 + Ad^2$$

de donde

$$k_x^2 = \bar{k}_x^2 + d^2 \qquad \textbf{(A-6)}$$

Operando de la misma manera para los momentos polares de inercia, y sus radios de giro, se obtienen las siguientes relaciones análogas, a las anteriores:

$$\left.\begin{aligned} J &= \bar{J} + Ad^2 \\ k^2 &= \bar{k}^2 + d^2 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(A-7)}$$

A-5. MOMENTOS DE INERCIA MEDIANTE INTEGRACIÓN

Al determinar el momento de inercia mediante integración, el elemento dA de área debe escogerse de manera que:

(1). Toda el área esté a la misma distancia del eje de referencia*; o bien, (2). Se conozca el momento de inercia del área diferencial con respecto al eje de referencia.

El momento de inercia del área total es la suma de los momentos de inercia de sus elementos.

Como en la determinación del centro de gravedad, el momento de inercia de una figura compuesta se puede obtener mediante combinación (sumas y restas) de los momentos de inercia de sus partes componentes (aditivas y sustractivas). Naturalmente que, en caso necesario, se ha de aplicar el teorema de Steiner (Sec. A-4) para referir los momentos de inercia de todas las partes al mismo eje.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

A1. Determinar el momento de inercia de un rectángulo de base b y altura h, con respecto a (a) un eje paralelo a la base por el centro de gravedad, y (b) un eje que coincide con la base.

---

* Si todos los puntos de un elemento de área están a la misma distancia del eje, esta distancia es en realidad el radio de giro del elemento, figura A-3.

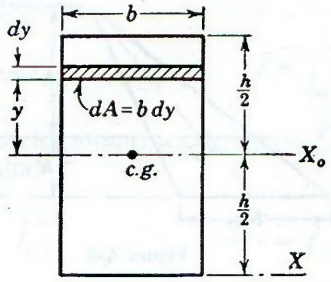
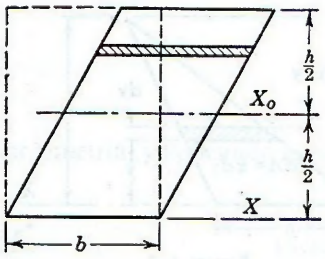


Figura A-5.



$I_{x_o} = \frac{bh^3}{12}$; $I_x = \frac{bh^3}{3}$

Figura A-6.

Solución:

Eje centroidal. Se considera el elemento diferencial de área que se indica en la figura A-5. Como todos sus puntos están a igual distancia del eje X_o, aplicando la ecuación (A-1) se obtiene:

$$\left[I_x = \int y^2\, dA\right] \qquad \bar{I}_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\, dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12} \qquad \textbf{Resp.}$$

Eje que coincide con la base. Aplicando el teorema de Steiner (A-5), con $d = \frac{1}{2}h$, resulta:

$$\left[I = \bar{I} + Ad^2\right] \qquad I_x = \frac{bh^3}{12} + (bh)\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} \qquad \textbf{Resp.}$$

El momento de inercia del paralelogramo de la figura A-6 tiene el mismo valor que el obtenido para el rectángulo, ya que los elementos de área del paralelogramo tienen las mismas dimensiones y están a la misma distancia del eje de inercia que los correspondientes del rectángulo, salvo que están ligeramente desplazados en sentido lateral.

A2. Determinar el momento de inercia de un triángulo de base b y altura h respecto de (a) la base, y (b) un eje paralelo a la base por el c.g.

Solución:

Eje que coincide con la base. Se considera el elemento de área que se indica en la figura A-7. Por semejanza de triángulos, $x = (b/h)(h - y)$. El momento de inercia con respecto al eje X se obtiene de:

$$\left[I_x = \int y^2\, dA\right] \qquad I_x = \int_0^h y^2 \cdot x\, dy = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h}(h - y)\, dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[\int_0^h hy^2\, dy - \int_0^h y^3\, dy\right] = \frac{b}{h}\left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad \textbf{Resp.}$$

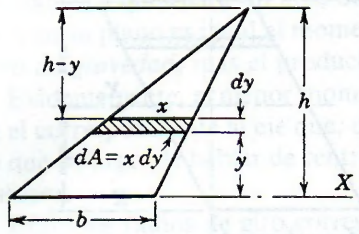


Figura A-7.

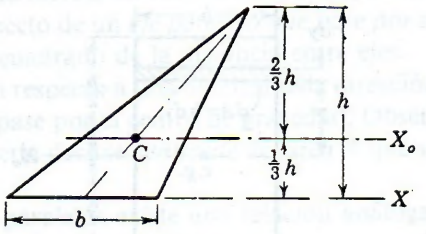


Figura A-8.

Eje por el centro de gravedad. Aplicando el teorema de Steiner, como la distancia entre X y X_o es $h/3$, figura A-8, resulta:

$$\left[I_x = \bar{I}_x + Ad^2\right] \qquad \frac{bh^3}{12} = \bar{I}_x + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 \qquad \bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \qquad \textbf{Resp.}$$

A3. Determinar el momento de inercia de un círculo de radio r con respecto a un eje diametral.

Solución:

Se emplean coordenadas polares, y se considera el elemento de área que se indica en la figura A-9. Se observa que $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, por lo cual el momento de inercia respecto del diámetro es:

$$\left[I_x = \int y^2\, dA\right] \qquad \bar{I}_x = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, \rho\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^3\, d\rho \cdot \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta$$

$$= \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta = \frac{r^4}{4} \cdot \pi$$

$$\bar{I}_x = \frac{\pi r^4}{4} \qquad \textbf{Resp.}$$

Una solución más sencilla consiste en calcular el momento polar de inercia, considerando como elemento de área dA el anillo rayado de la figura A-10, de superficie $(2\pi\rho)\, d\rho$. En

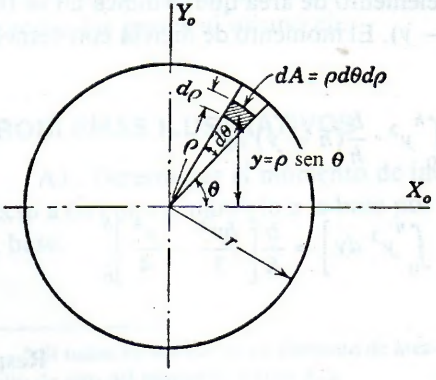


Figura A-9.

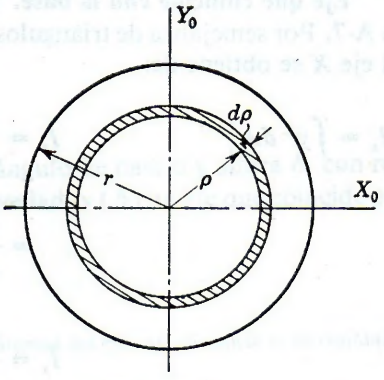


Figura A-10.

estas condiciones:

$$\left[J = \int \rho^2\, dA\right] \qquad \bar{J} = \int_0^r \rho^2 \cdot 2\pi\rho\, d\rho = \frac{\pi r^4}{2}$$

Ahora bien, los momentos de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ son iguales, por simetría, y aplicando la ecuación (A-3) resulta:

$$\left[\bar{J} = \bar{I}_x + \bar{I}_y\right] \qquad \frac{\pi r^4}{2} = \bar{I}_x + \bar{I}_x \quad \text{o} \quad \bar{I}_x = \frac{\pi r^4}{4} \qquad \textbf{Comprob.}$$

PROBLEMAS

A4. Determinar el momento de inercia de un triángulo de base b y altura h, con respecto a un eje paralelo a la base, que pase por el vértice opuesto. Aplicar el teorema de Steiner al resultado del ejemplo ilustrativo A2.

Resp. $I = bh^3/4$

A5. Determinar el momento de inercia del cuadrante de círculo de la figura P-A5 respecto de los ejes X y Y.

Resp. $I_x = I_y = \pi r^4/16$

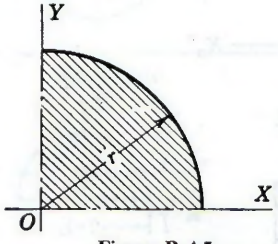


Figura P-A5.

A6. Determinar el momento de inercia del semicírculo de la figura P-A6 con respecto a los ejes dados.

Resp. $I_x = \bar{I}_y = \pi r^4/8$

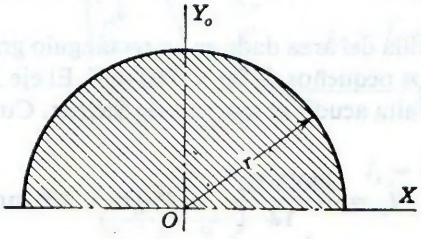


Figura P-A6.

A7. Demostrar que el momento de inercia de un semicírculo de radio r con respecto a un eje centroidal paralelo al diámetro es $0.11r^4$.

A8. Determinar el momento de inercia del cuadrante de círculo de la figura P-A5 con respecto a un eje centroidal paralelo a X.

Resp. $\bar{I}_x = 0.055r^4$

A9. Determinar el momento de inercia con respecto al eje X del área encerrada por la elipse de ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Calcular también el radio de giro.

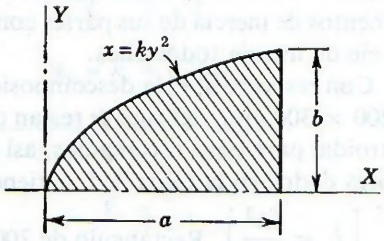
Resp. $\bar{I}_x = \pi ab^3/4$; $\bar{k}_x = b/2$

A10. Determinar el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje Y del área limitada en el primer cuadrante por la curva $y = 100 - 0.04x^2$, expresando x y y en milímetros.

Resp. $I_y = 1.667 \times 10^6$ mm^4; $k_y = 22.4$ mm

A11. Calcular el momento de inercia con respecto al eje X del área parabólica rayada de la figura P-A11.

Resp. $I_x = \frac{2}{15}\, ab^3$



Figuras P-A11 y P-A12.

A12. Calcular I_y para la misma área del problema anterior.

Resp. $I_y = \frac{2}{7}\, a^3 b$

A-6. MOMENTOS DE INERCIA DE FIGURAS COMPUESTAS

Si una figura puede descomponerse en elementos geométricos (rectángulos, triángulos, etc.) *aditivos o sustractivos*, de momentos de inercia conocidos, el momento de inercia del área total es la suma algebraica de los momentos de inercia de cada parte por separado. Antes de sumar, naturalmente, hay que referir todos los momentos al mismo eje por aplicación reiterada del teorema de Steiner.

En los ejemplos que siguen, el valor de los momentos de inercia de las distintas componentes simples se toman de las soluciones de los problemas de la sección A-5, que aparecen resumidos en la tabla A-1. Para las secciones rectas de los perfiles laminados, los valores de sus momentos de inercia y otras propiedades aparecen en las tablas del Apéndice B.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

A13. Determinar el momento de inercia con respecto a los ejes X_o y Y_o de la sección I de ala ancha representada en la figura A-11.

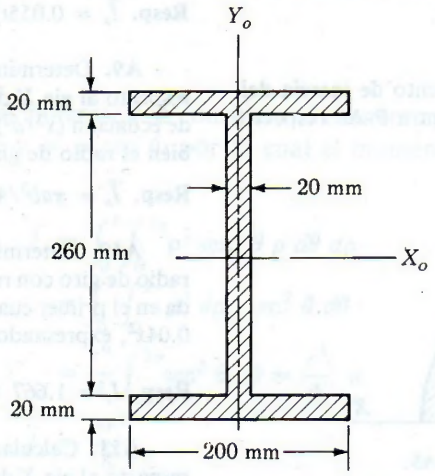


Figura A-11.

Solución: Como se ha dicho, el momento de inercia de un área es la suma algebraica de los momentos de inercia de sus partes componentes (aditivas o sustractivas), con respecto al mismo eje de inercia todos ellos.

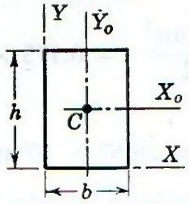
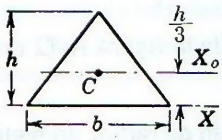
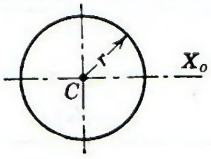
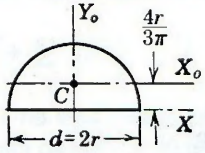
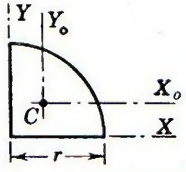
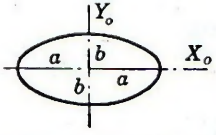
Con respecto a X_o la descomposición más sencilla del área dada es un rectángulo grande de 200 × 300 mm, del cual se restan dos rectángulos pequeños de 90 × 260 mm. El eje X_o es centroidal para estos rectángulos, así que no hace falta acudir al teorema de Steiner. Con los valores dados en la tábla A-1 se tiene:

$$\left[\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}\right] \quad \text{Rectángulo de } 200 \times 300 \text{ mm: } \bar{I}_x = \frac{200(300)^3}{12} = 450.0 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{Dos rectángulos de } 90 \times 260 \text{ mm: } \bar{I}_x = 2\left[\frac{90(260)^3}{12}\right] = 263.6 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Área total: $\bar{I}_x = (450.0 - 263.6) \times 10^6 = 186.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$ **Resp.**

TABLA A-1. Momentos de inercia

FIGURA	MOMENTO DE INERCIA	RADIO DE GIRO
Rectángulo 	$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$	$\bar{k}_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$
	$I_x = \frac{bh^3}{3}$	$k_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$
Triángulo cualquiera 	$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$	$\bar{k}_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$
	$I_x = \frac{bh^3}{12}$	$k_x = \frac{h}{\sqrt{6}}$
Círculo 	$\bar{I}_x = \frac{\pi r^4}{4}$	$\bar{k}_x = \frac{r}{2}$
	$\bar{J} = \frac{\pi r^4}{2}$	$\bar{k}_z = \frac{r}{\sqrt{2}}$
Semicírculo 	$I_x = \bar{I}_y = \frac{\pi r^4}{8}$	$k_x = \bar{k}_y = \frac{r}{2}$
	$\bar{I}_x = 0.11r^4$	$\bar{k}_x = 0.264r$
Cuadrante de círculo 	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$	$k_x = k_y = \frac{r}{2}$
	$\bar{I}_x = \bar{I}_y = 0.055r^4$	$\bar{k}_x = \bar{k}_y = 0.264r$
Área elíptica 	$\bar{I}_x = \frac{\pi ab^3}{4}$	$\bar{k}_x = \frac{b}{2}$
	$\bar{I}_y = \frac{\pi ba^3}{4}$	$\bar{k}_y = \frac{a}{2}$

Con respecto al eje Y_o imaginemos la sección descompuesta en un rectángulo de 20 × 260 mm, más dos de 20 × 200 mm. El eje Y_o también es centroidal para estos tres rectángulos. Por tanto, de acuerdo con la tabla A-1, se tiene:

$$\left[\bar{I}_y = \frac{hb^3}{12}\right] \quad \text{Rectángulo de } 20 \times 260 \text{ mm:} \qquad \bar{I}_y = \frac{260(20)^3}{12} = 0.173 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{Dos rectángulos de } 20 \times 200 \text{ mm:} \quad \bar{I}_y = 2\left[\frac{20(200)^3}{12}\right] = 26.67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{Área total:} \qquad \bar{I}_y = (0.173 + 26.67) \times 10^6 = 26.84 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad \textbf{Resp.}$$

A14. Calcular el momento de inercia del área compuesta de la figura A-12 respecto del eje X representado en dicha figura.

Solución: El área está formada por un semicírculo (S) de 50 mm de radio, un rectángulo de 100 × 240 mm (R) y un triángulo (T) de 75 × 240 mm. Respecto del eje X, el momento de inercia total es la suma de los momentos de cada parte, referidos también al mismo eje X:

$$I_x = I_R + I_S + I_T \qquad (a)$$

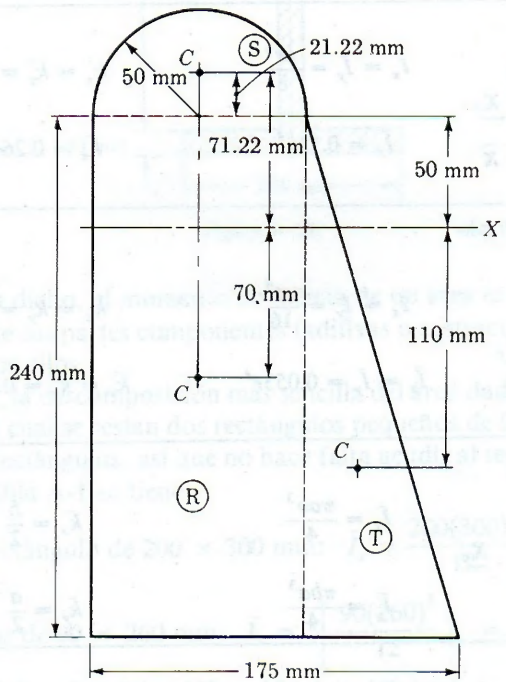


Figura A-12.

Cada uno de los momentos de inercia parciales, a los que se ha de aplicar el teorema de Steiner, viene dado por:

$$I_R = \bar{I}_R + (Ad^2)_R$$
$$I_S = \bar{I}_S + (Ad^2)_S$$
$$I_T = \bar{I}_T + (Ad^2)_T$$

Sumando:

$$I_x = \sum \bar{I} + \sum Ad^2 \qquad (b)$$

Quiere esto decir que el momento de inercia total es la suma de los momentos de inercia de cada parte respecto de su eje X_o centroidal, más la suma de los términos de traslación de ejes, lo que permite la tabulación de los resultados parciales, sobre todo cuando hay un gran número de partes componentes, en la tabla A-1, $\bar{I}_R = bh^3/12$; $\bar{I}_S = 0.11r^4$, e $\bar{I}_T = bh^3/36$. Las distancias d de los términos de traslación de ejes están indicadas en la figura A-12.

COMPONENTES	$\bar{I}$ (10^6 mm^4)	ÁREA (10^3 mm^2)	d (mm)	Ad^2 (10^6 mm^4)
Rectángulo	115.20	24.00	70.00	117.6
Semicírculo	0.69	3.93	71.22	19.9
Triángulo	28.80	9.00	110.00	108.9
Totales	144.69			246.4

Con las sumas obtenidas en la tabla, y sustituyendo en la ecuación (b) resulta:

$$\left[I_x = \sum \bar{I} + \sum Ad^2\right] \quad I_x = (144.69 + 246.4) \times 10^6 = 391.1 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \textbf{Resp.}$$

A15. Una viga compuesta está formada por cuatro ángulos de 150 × 150 × 13 mm que unen un alma de 600 × 20 mm a dos alas de 460 × 20 mm como se indica en la figura A-13.

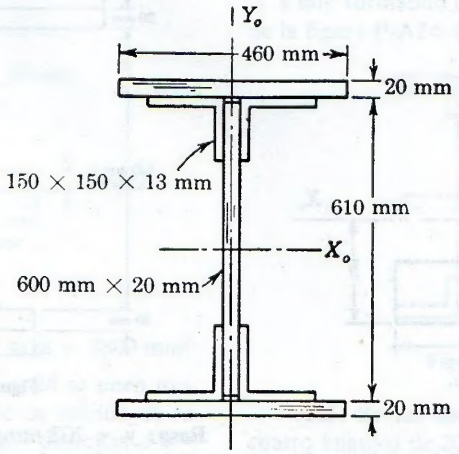


Figura A-13.

En los angulares, $I_x = I_y = 8.05 \times 10^6$ mm^4; el área es 3730 mm^2, y $\bar{x} = \bar{y} = 42.3$ mm. Calcular el momento de inercia de la sección respecto del eje X_o.

Solución: Al descomponer la sección en muchas partes distintas es conveniente disponer los cálculos en forma de tabla, como se ha hecho en el ejemplo anterior. En este caso, por consideraciones de simetría, solamente hay tres partes distintas, así que es preferible aplicar directamente el teorema de Steiner para determinar el momento de inercia de cada parte respecto del eje X_o dado, sumando luego los resultados parciales obtenidos. Se tiene,

Para el alma: $$I = \frac{20(600)^3}{12} + (20 \times 600)(0)^2 = 360 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Para las dos alas: $$I = 2\left[\frac{460(20)^3}{12} + (460 \times 20)(315)^2\right]$$
$$= 1830 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Para los cuatro ángulos: $$I = 4[(8.05 \times 10^6) + (3730)(305 - 42.3)^2]$$
$$= 1060 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Para la sección total: $$\bar{I}_x = (360 + 1830 + 1060) \times 10^6$$
$$= 3250 \times 10^6 \text{ mm}^4$$ **Resp.**

PROBLEMAS

A16. Determinar el momento de inercia de la sección en T de la figura P-A16 con respecto al eje centroidal X_o y con respecto al eje de simetría Y_o.

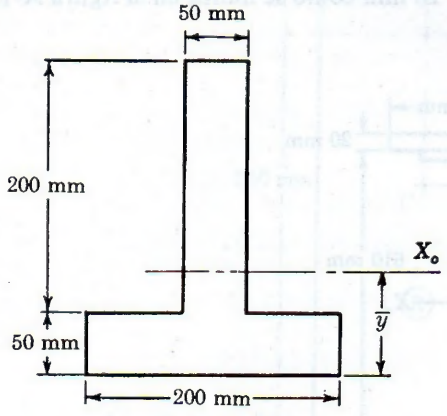


Figura P-A16.

Resp. $\bar{y} = 87.5$ mm; $\bar{I}_x = 113.5 \times 10^6$ mm^4

A17. Determinar el momento de inercia del área representada en la figura P-A17, con respecto a los ejes centroidales X_o y Y_o.

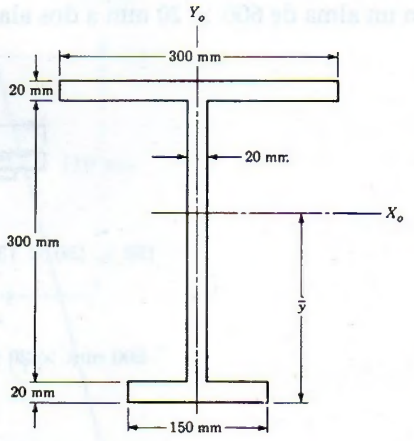


Figura P-A17.

Resp. $\bar{y} = 202$ mm; $I_x = 260 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 50.8 \times 10^6$ mm^4.

A18. La base b de un triángulo equilátero es horizontal. Demostrar que los momentos de inercia con respecto a los ejes centroidales horizontal y vertical son iguales.

A19. Calcular el momento de inercia de un hexágono regular con respecto a un eje que pasa por dos vértices opuestos.

Resp. $I = (5\sqrt{3}/16)\, a^4$

A20. Calcular el momento de inercia del rectángulo de la figura P-A20 con respecto al eje X, inclinado un ángulo $\theta = \text{sen}^{-1}(4/5)$. *Indicación:* Descomponer la figura en las partes A, B y C.

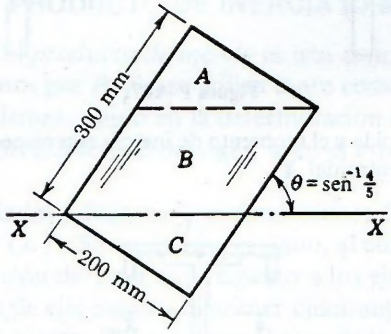


Figura P-A20.

Resp. $I_x = 576 \times 10^6$ mm^4

A21. La figura P-A21 representa la sección recta de un perfil laminado en Z. Determinar los valores de $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$.

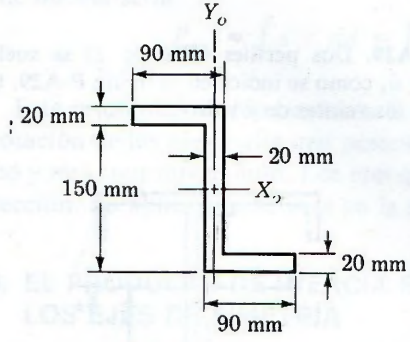


Figura P-A21.

Resp. $\bar{I}_x = 17.55 \times 10^6$ mm^4;
$\bar{I}_y = 6.91 \times 10^6$ mm^4; área $= 5800$ mm^2

A22. Dos perfiles C200 × 28 se unen mediante un enrejado, formando la sección de la figura P-A22. Determinar a qué distancia d deben colocarse dichos perfiles para que $\bar{I}_x$ sea igual a $\bar{I}_y$. Despreciar el efecto de los elementos de unión indicados mediante líneas punteadas.

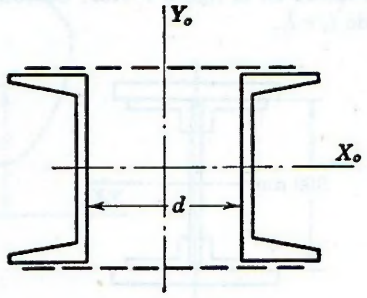


Figura P-A22.

Resp. $d = 111$ mm

A23. El área de la sección sombreada de la figura P-A23 es 40×10^3 mm^2. Si $I_{x_1} = 250 \times 10^6$ mm^4, calcular I_{x_2}.

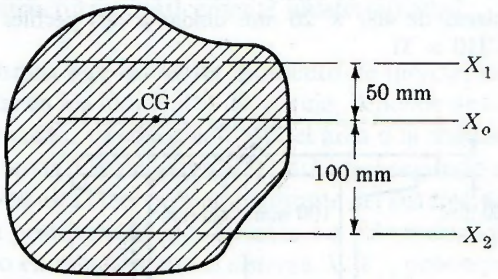


Figura P-A23.

Resp. $I_{x_2} = 550 \times 10^6$ mm^4

A24. Los lados cortos de cuatro ángulos de 150 × 100 × 13 mm se unen a una placa de 600 × 8 mm formando la viga de sección compuesta de la figura P-A24. Calcular el valor de $\bar{I}_x$.

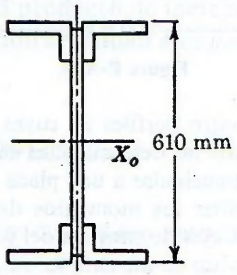


Figura P-A24.

A25. Se ha construido una columna con cuatro ángulos de 200 × 100 × 13 mm con sus lados cortos unidos a una placa de 350 × 20 mm

que constituye el alma, y los lados largos, a unas placas de 460 × 60 mm que constituyen las alas como se indica en la figura P-A25. Calcular los valores de $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$.

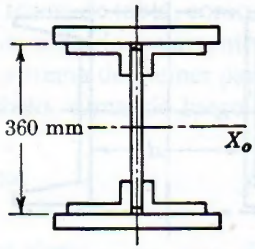


Figura P-A25.

Resp. $\bar{I}_x = 2910 \times 10^6$ mm^4;
$\bar{I}_y = 1140 \times 10^6$ mm^4

A26. Determinar los momentos de inercia con respecto a los ejes de simetría de la sección compuesta de la figura P-A26 formada por dos placas de 400 × 20 mm unidas a dos perfiles C310 × 31.

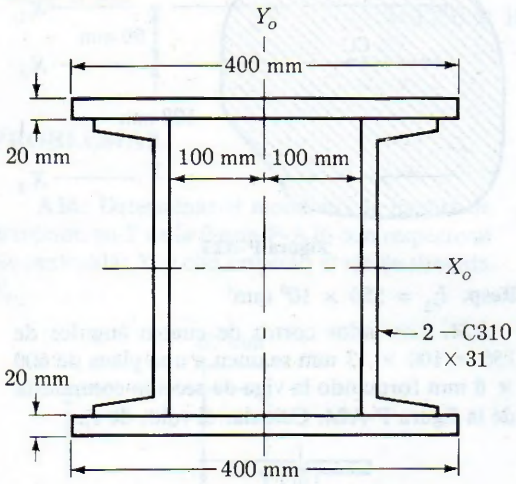


Figura P-A26.

A27. Cuatro perfiles Z, cuyas propiedades geométricas son las determinadas en el problema A21, están remachadas a una placa de 300 × 20 mm. Determinar los momentos de inercia con respecto a los ejes de simetría del conjunto.

Resp. $\bar{I}_x = 527 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 238 \times 10^6$ mm^4

A28. Un perfil C250 × 23 se suelda al ala superior de un perfil W360 × 57 como se indica en la figura P-A28. Determinar la altura $\bar{y}$ del centroide y el momento de inercia con respecto al eje centroidal X_o.

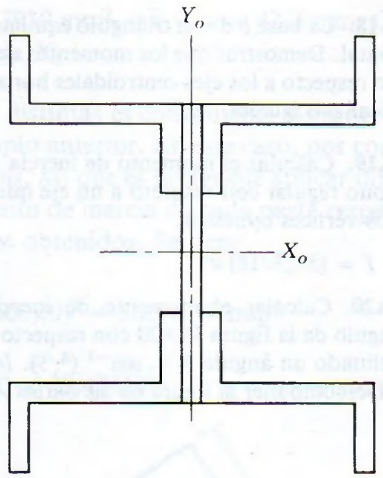


Figura P-A27.

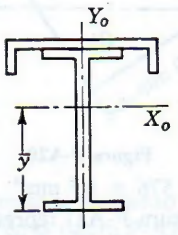


Figura P-A28.

A29. Dos perfiles C250 × 23 se sueldan entre sí, como se indica en la figura P-A29. Calcular los valores de $\bar{y}$ y de $\bar{I}_x$.

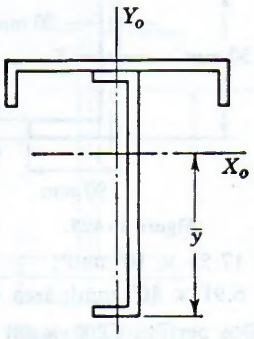


Figura P-A29.

Resp. $\bar{y} = 185.6$ mm; $\bar{I}_x = 48.5 \times 10^6$ mm^4

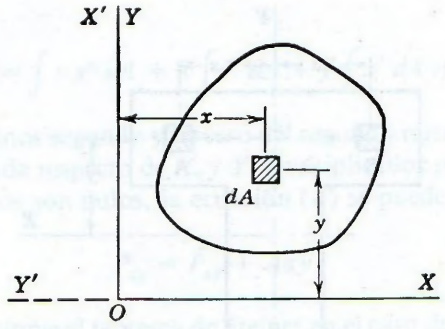


Figura A-14.

A-7. PRODUCTO DE INERCIA (O MOMENTO PRODUCTO)

El *producto de inercia* es una expresión matemática de la forma $\int xy\, dA$, que representaremos por P. No se utiliza tanto como el momento de inercia, pero es necesario en algunos problemas, como en la determinación de los momentos de inercia máximo y mínimo, en la flexión asimétrica de vigas, y en el estudio de estructuras estáticamente indeterminadas.

Unidades y Signos: Las dimensiones son las mismas que las de un momento de inercia, es decir $(L)^4$. Sin embargo, el signo, al contrario que en los momentos de inercia, depende de la situación del área con respecto a los ejes coordenados, siendo positivo si el área o la mayor parte de ella está en el primer cuadrante o en el tercero, y negativo si lo está en el segundo o en el cuarto. Por ejemplo, el área de la figura A-14 está en el primer cuadrante del sistema de ejes XY, y $P_{xy} = \int xy\, dA$ es positivo ya que son positivas las coordenadas x y y de todos los elementos diferenciales de área dA. Sin embargo en relación con el sistema $X'Y'$, obtenido girando 90° en sentido contrario al del reloj el sistema anterior, el área estaría en el cuarto cuadrante, y las nuevas coordenadas de dA son $x' = y$, pero $y' = -x$, por lo que el producto de inercia sería

$$P_{x'y'} = \int x'y'\, dA = \int y(-x)\, dA = -\int xy\, dA = -P_{xy}$$

Este resultado no sólo confirma la regla dada de los signos, sino que indica que durante la rotación de los ejes existe una posición crítica en la que el producto de inercia cambia de signo y será, por tanto, nulo. Los ejes que ocupan esta posición se llaman *ejes principales* de la sección. Su aplicación se verá en la sección A-12.

A-8. EL PRODUCTO DE INERCIA ES CERO CON RESPECTO A LOS EJES DE SIMETRÍA

Si un área tiene un eje de simetría, este eje, junto con otro cualquiera perpendicular a él forman un sistema de ejes con respecto a los cuales el producto de inercia es nulo. Si se examina una sección simétrica cualquiera, como la T de la figura A-15, se observa que para cada elemento de área A, existe otro igual, simétricamente dispuesto, B. Respecto del eje de simetría Y, las abscisas x de A y B son iguales y de signo contrario, mientras que sus ordenadas y son iguales y del mismo signo, independientemente de la posición de eje X. Por tanto,

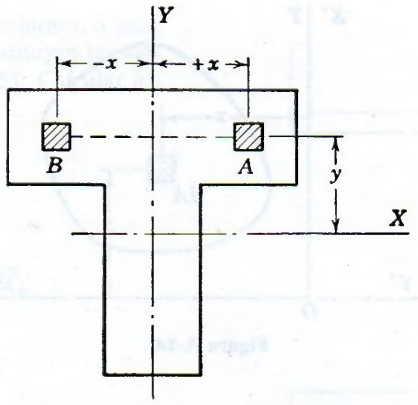


Figura A-15.

la suma de los productos $xy\,dA$ en cada par de elementos A y B será nula. Por consiguiente, el valor de $\int xy\,dA$ para el área total es cero, si uno, o los dos ejes de referencia son de simetría.

A-9. TRASLACIÓN PARALELA DE EJES PARA EL PRODUCTO DE INERCIA: TEOREMA DE STEINER

Consideremos un área cualquiera, como la representada en la figura A-16, y cuyo producto de inercia respecto de los ejes X_oY_o es $\bar{P}_{xy}$. Tracemos un nuevo sistema de ejes XY, paralelos a los anteriores, de manera que las coordenadas del centroide del área con respecto a este nuevo sistema sean $\bar{x}$ y $\bar{y}$.

Por definición de producto de inercia con respecto a X_oY_o se tiene:

$$\bar{P}_{xy} = \int x'y'\,dA \qquad (a)$$

y respecto de los ejes paralelos XY:

$$P_{xy} = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y})\,dA \qquad (b)$$

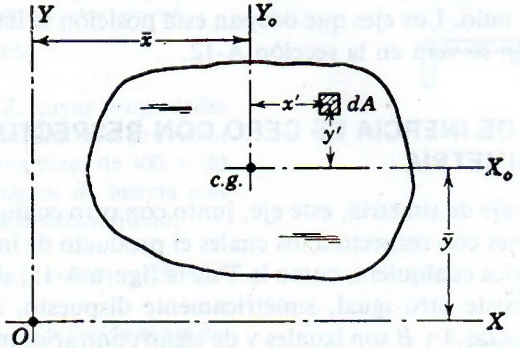


Figura A-16. Productos de inercia con respecto a sistemas de ejes paralelos.

Por tanto:

$$P_{xy} = \int x'y'\,dA + \bar{x}\int y'\,dA + \bar{y}\int x'\,dA + \bar{x}\bar{y}\int dA \qquad (c)$$

Obsérvese que los términos segundo y tercero del segundo miembro representan los momentos estáticos del área dada respecto de X_o y Y_o, multiplicados por las constantes $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Como estos momentos estáticos son nulos, la ecuación (c) se puede escribir:

$$P_{xy} = \bar{P}_{xy} + A\bar{x}\bar{y} \qquad \textbf{(A-8)}$$

Esta fórmula constituye el teorema de Steiner en el caso del producto de inercia, y facilita el cálculo de éste en áreas compuestas de figuras geométricas sencillas. Los signos de $\bar{x}$ y $\bar{y}$ en esta expresión pueden tomarse como las coordenadas del centroide de la figura con respecto a los ejes XY, o como las coordenadas de O respecto del sistema X_oY_o. En el primer caso, figura A-16, las dos son positivas, y en el segundo caso, ambas son negativas; pero tanto en uno como en otro, su producto es positivo y del mismo valor.

PROBLEMAS ILUSTRATIVOS

A30. Calcular el producto de inercia del triángulo rectángulo de la figura A-17 respecto de los ejes X y Y.

Solución: Para aplicar la fórmula del producto de inercia $P = \int xy\,dA$, obsérvese que x y y son las coordenadas del centro de gravedad del área dA. En el triángulo de la figura A-17 se considera como área elemental una estrecha faja paralela a la base. El área es $dA = x\,dy$ y las coordenadas de su centroide son $\frac{1}{2}\,x$ y y.

Por semejanza de triángulos,

$$x = \frac{b}{h}(h - y)$$

Por tanto,

$$dA = x\,dy = \frac{b}{h}(h - y)\,dy$$

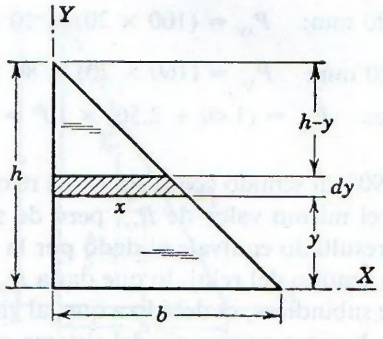


Figura A-17.

Sustituyendo:

$$[P = \int xy \cdot dA] \qquad P_{xy} = \int_0^h \left[\frac{1}{2}\frac{b}{h}(h-y)\right] \cdot y \cdot \left[\frac{b}{h}(h-y)\, dy\right]$$

$$= \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h (h^2 y - 2hy^2 + y^3)\, dy$$

$$= \frac{b^2}{2h^2}\left[\frac{h^2 y^2}{2} - \frac{2hy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_0^h$$

$$P_{xy} = +\frac{b^2h^2}{24} \qquad \textbf{Resp.}$$

A31. Determinar el producto de inercia de la sección indicada en la figura A-18 con respecto a los ejes XY.

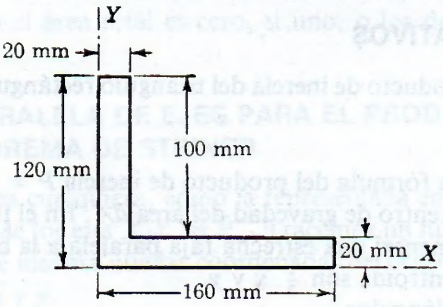


Figura A-18.

Solución: La sección angular se puede descomponer en un rectángulo de 100 × 20 mm y otro de 160 × 20 mm. Para el primero, los ejes paralelos a los ejes X y Y, son ejes de simetría, y de acuerdo con la sección A-8, P_{xy} para este rectángulo es cero. Lo mismo le pasa al otro rectángulo y, por tanto, para el área compuesta se tiene:

$[P_{xy} = P_{xy} + A\,\bar{x}\bar{y}]$

rectángulo de 100 × 20 mm: $P_{xy} = (100 \times 20) \times 10 \times 70 = 1.40 \times 10^6$ mm^4

rectángulo de 160 × 20 mm: $P_{xy} = (160 \times 20) \times 80 \times 10 = 2.56 \times 10^6$ mm^4

para el área compuesta: $P_{xy} = (1.40 + 2.56) \times 10^6 = 3.96 \times 10^6$ mm^4 **Resp.**

Si se girara la sección 90° en sentido contrario al del reloj hasta la posición indicada en la figura A-19, se obtendría el mismo valor de P_{xy}, pero de signo contrario, es decir, $P_{xy} = -3.96 \times 10^6$ mm^4. Este resultado equivale al dado por la rotación de los ejes en la figura A-18, un ángulo de 90° en sentido del reloj, lo que daría $P_{yx} = -P_{xy}$. El signo negativo resultante del intercambio de subíndices, es debido a que, al girar los ejes o la figura un ángulo de 90°, y considerar el eje Y como primer eje del sistema coordenado, el segundo coincide

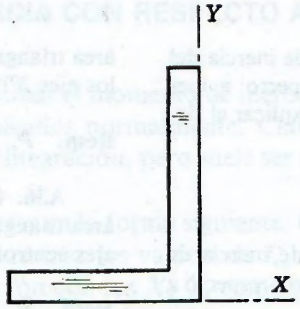


Figura A-19.

con la parte negativa del eje X. En este sentido, los productos de inercia se comportan de forma análoga a como lo hacen los esfuerzos cortantes sobre dos planos perpendiculares, en donde $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ como se indicó en la nota a pie de página de la sección 9-7, círculo de Mohr.

A32. Utilizando el resultado del problema ilustrativo A30, aplíquese el teorema de Steiner para obtener el valor del producto de inercia del triángulo rectángulo de la figura A-20 con respecto a los ejes centroidales X_oY_o.

Solución: En el problema ilustrativo A30 se obtuvo $P_{xy} = b^2h^2/24$. Aplicando el teorema de Steiner:

$$[P_{xy} = \bar{P}_{xy} + A\bar{x}\bar{y}] \qquad \frac{b^2h^2}{24} = \bar{P}_{xy} + \frac{bh}{2} \times \frac{b}{3} \times \frac{h}{3} = \bar{P}_{xy} + \frac{b^2h^2}{18}$$

$$\bar{P}_{xy} = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{b^2h^2}{18} = -\frac{b^2h^2}{72} \qquad \textbf{Resp.}$$

Obsérvese el signo menos obtenido. Confirma la regla de los signos establecida en la sección A-7, ya que, respecto de los ejes X_oY_o, la mayor parte del área está en los cuadrantes segundo y cuarto. Si el triángulo gira 90° a partir de la posición actual, el signo de P_{xy} cambiará, pero su valor seguirá siendo $b^2h^2/72$.

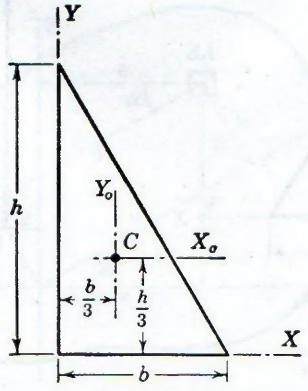


Figura A-20.

PROBLEMAS

A33. Determinar el producto de inercia del ángulo de la figura A-18 con respecto a ejes centroidales paralelos a los lados. Explicar el significado del signo de la solución.

Resp. $\bar{P}_{xy} = -5.17 \times 10^6 \text{ mm}^4$

A34. Determinar el producto de inercia de la sección en Z de la figura P-A34 con respecto a los ejes centroidales $X_o Y_o$.

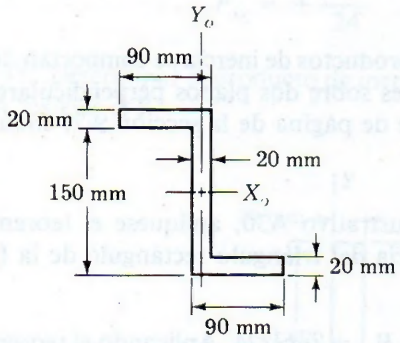
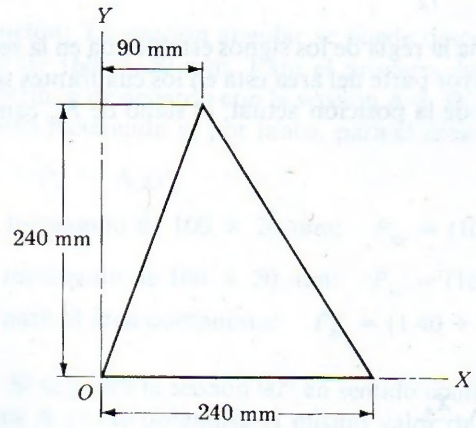


Figura P-A34.

Resp. $\bar{P}_{xy} = -8.19 \times 10^6 \text{ mm}^4$

A35. Calcular el producto de inercia del área triangular de la figura P-A35 con respecto a los ejes XY.



Figuras P-A35 y P-A36.

Resp. $P_{xy} = 242 \times 10^6 \text{ mm}^4$

A36. Calcular el producto de inercia del área triangular de la figura P-A35 con respecto a ejes centroidales paralelos a los ejes $\bar{X}$ y Y.

Resp. $\bar{P}_{xy} = -11.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$

A37. Determinar el producto de inercia del cuadrante del círculo de la figura P-A37 con respecto a los ejes XY.

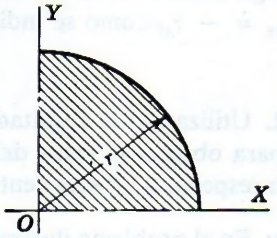


Figura P-A37.

Resp. $P_{xy} = r^4/8$

A38. Aplicando la solución del problema A37 determinar el producto de inercia del área rayada de la figura P-A38 respecto de los ejes XY.

Resp. $P_{xy} = r^4/12$

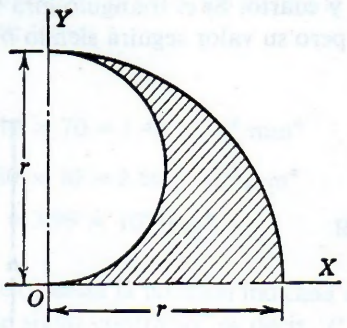


Figura P-A38.

A-10. MOMENTOS DE INERCIA CON RESPECTO A EJES INCLINADOS

A veces es necesario determinar el momento de inercia con respecto a unos ejes que forman un ángulo α con los empleados normalmente. Claro está que puede determinarse el nuevo momento de inercia por integración, pero suele ser más fácil aplicar la expresión general de la rotación de ejes.

El problema puede enunciarse en la forma siguiente: Conocidos los valores de I_x, I_y y P_{xy} respecto de los ejes X y Y, determinar los valores de I_u, I_v y P_{uv} referidos a unos ejes U, V inclinados un ángulo α en relación con los X, Y, como se observa en la figura A-21.

Las coordenadas de un elemento de área dA son x, y respecto de los ejes X, Y, y u, v respecto de los ejes U, V. Las relaciones entre estas coordenadas, que se obtienen proyectando sobre los ejes U, V, son:

$$\left.\begin{aligned} v &= y\cos\alpha - x\,\text{sen}\,\alpha \\ u &= y\,\text{sen}\,\alpha + x\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Por definición de momento de inercia, I_u y I_v son:

$$I_u = \int v^2\,dA \qquad (b)$$

$$I_v = \int u^2\,dA \qquad (c)$$

Sustituyendo v por su valor, ecuación (a), resulta:

$$I_u = \int (y^2\cos^2\alpha - 2xy\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + x^2\,\text{sen}^2\,\alpha)\,dA$$

Teniendo en cuenta que

$$I_x = \int y^2\,dA, \quad I_y = \int x^2\,dA, \quad \text{y} \quad P_{xy} = \int xy\,dA$$

se tiene

$$I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\,\text{sen}^2\,\alpha - P_{xy}\,\text{sen}\,2\alpha \qquad (d)$$

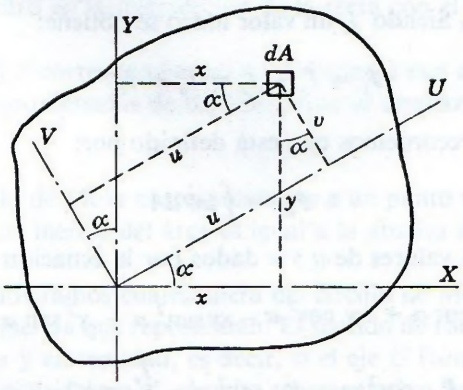


Figura A-21. Momentos de inercia con respecto a ejes inclinados.

Sustituyendo las relaciones

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \tag{e}$$

en la ecuación (*d*), resulta:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - P_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \tag{A-9}$$

Operando igual con la ecuación (*c*) se obtiene, sustituyendo u por su valor (*a*),

$$I_v = \int (y^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2xy \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + x^2 \cos^2 \alpha)\, dA$$

que se escribe en la forma

$$I_v = I_x \operatorname{sen}^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + P_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \tag{f}$$

y con las mismas relaciones (*e*) resulta:

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + P_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \tag{A-10}$$

Así, pues, conocidos los valores de I_x, I_y y P_{xy}, las ecuaciones (A-9) y (A-10) permiten determinar, sin necesidad de nueva integración, los valores de I_u y I_v respecto de otros ejes U, V, inclinados un ángulo α con relación a los ejes X, Y.

Sumando las ecuaciones (A-9) y (A-10) se obtiene la relación:

$$I_u + I_v = I_x + I_y$$

Esto significa que la suma de los momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares cualesquiera, trazados por un determinado punto, es una cantidad constante. Esta misma conclusión pudo obtenerse en la sección A-2 en donde se demostró que el momento polar de inercia es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares que pasen por el eje polar. Siendo J_z un valor único se obtiene:

$$J_z = I_x + I_y = I_u + I_v$$

Para determinar P_{uv}, recordemos que está definido por:

$$P_{uv} = \int uv\, dA \tag{g}$$

en donde, sustituyendo los valores de u y v dados por la ecuación (*a*), resulta:

$$P_{uv} = \int (y^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + xy \cos^2 \alpha - xy \operatorname{sen}^2 \alpha - x^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)\, dA$$

$$= \frac{I_x}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + P_{xy} \cos^2 \alpha - P_{xy} \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{I_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \tag{h}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la relación $\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha$, se puede escribir:

$$P_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\alpha + P_{xy} \cos 2\alpha \qquad \text{(A-11)}$$

La posición de los ejes U, V para la que los momentos de inercia son máximo y mínimo, se puede determinar derivando (A-9) respecto de α e igualando a cero esta derivada. Para estos valores de α se halla que el producto de inercia es cero y que los momentos de inercia máximo y mínimo son:

$$I_{\substack{\text{máx.} \\ \text{mín.}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (P_{xy})^2} \qquad \text{(A-12)}$$

A-11. CÍRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS DE INERCIA

Salvo la distinta significación de los símbolos que intervienen en ellas, las ecuaciones (A-9) y (A-11) son idénticas a las (9-5) y (9-6) que expresan la variación del esfuerzo normal y del cortante. Por consiguiente, el método del círculo de Mohr para esfuerzos desarrollados en la sección 9-7, se puede aplicar de forma análoga en la obtención del círculo de Mohr para momentos de inercia. Con ello se consigue una representación gráfica de todos los valores posibles de I y P con respecto a cualquier par de ejes ortogonales que pasen por un determinado punto de un área dada. Como recordatorio, y por el cambio de significado, es conveniente repetir las reglas dadas en la sección 9-7, como sigue:

1. En un sistema de ejes coordenados rectangulares, se considera uno de los ejes como eje I y el otro como eje P de los productos de inercia. Conocidos los valores de I_x, I_y y P_{xy} se señalan los puntos de coordenadas (I_x, P_{xy}) y $(I_y, -P_{xy})$. Observemos que el valor de P_{xy}, con su signo real se asocia al valor de I_x, y el de P_{xy}, con su signo real, se asocia a I_y por ser equivalente al P_{yx}, ya que $P_{yx} = -P_{xy}$, como se vio en el problema A31.

2. Unir ambos puntos. El segmento comprendido entre ambos es el diámetro del círculo de Mohr que tiene su centro en la intersección de la recta con el eje I. Trazar el círculo.

3. Los valores de I y P correspondientes a los distintos ejes que pasan por el punto del área en estudio, son las coordenadas de un punto que se desplaza a lo largo del círculo de Mohr.

4. El radio del círculo de Mohr correspondiente a un punto representa al eje de inercia para el que el momento de inercia del área es igual a la abscisa I de este punto.

5. El ángulo entre dos radios cualesquiera del círculo de Mohr es el doble del ángulo real entre los dos ejes de inercia que representan. El sentido de rotación del ángulo es el mismo en el círculo de Mohr y en realidad, es decir, si el eje U forma un ángulo α en sentido contrario al del reloj respecto del eje X, el radio representativo de U forma un ángulo de 2α en sentido contrario al del reloj respecto del radio representativo de X.

PROBLEMA ILUSTRATIVO

A39. En el rectángulo de la figura A-22, calcular los valores de I_u, I_v y P_{uv} referidos a los ejes U, V, inclinados un ángulo de 30° en sentido contrario al del reloj respecto de los ejes X, Y.

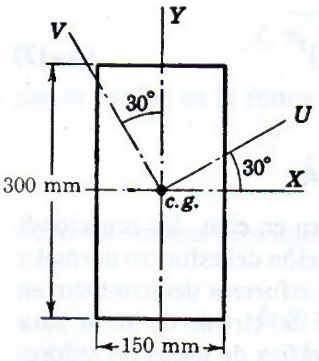


Figura A-22.

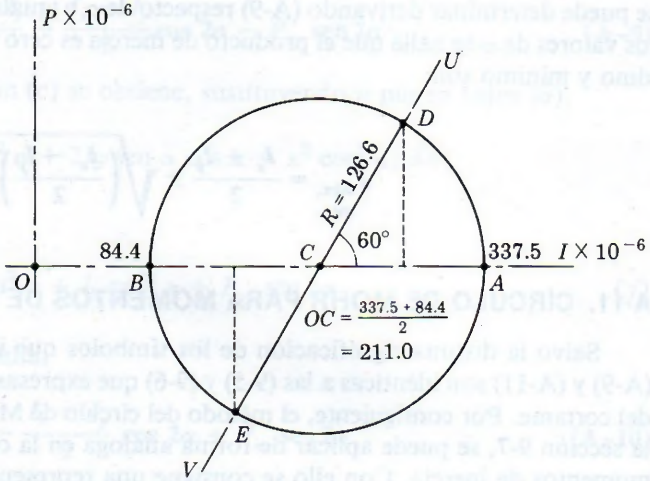


Figura A-23. Aplicación del círculo de Mohr.

Solución: Calculemos, en primer lugar, los momentos de inercia y el producto de inercia respecto de los ejes X, Y:

$$\left[I_x = \frac{bh^3}{12}\right] \qquad I_x = \frac{150(300)^3}{12} = 337.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\left[I_y = \frac{hb^3}{12}\right] \qquad I_y = \frac{300(150)^3}{12} = 84.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$P_{xy} = 0 \qquad \text{por ser } X \text{ y } Y \text{ ejes de simetría}$$

Con las reglas dadas, tracemos el sistema de ejes coordenados rectangulares I y P, como se indica en la figura A-23. Con los valores obtenidos para I_x, I_y y P_{xy} se sitúan los puntos A y B cuyas coordenadas son (337.5, 0) y (84.4, 0).

De acuerdo con la regla 2, el diámetro del círculo de Mohr es AB. Su centro C es el punto medio entre A y B, y su abscisa I es 211.0. El radio del círculo es $CA = 337.5 - 211.0 = 126.5$.

Por la regla 4, el radio CA representa al eje X, y aplicando la regla 5, el eje U estará representado por el radio CD que forma un ángulo de 60° en sentido contrario al del reloj respecto de CA. Así, pues, como V es perpendicular a U, el punto representativo E está a 180° de D. Los puntos D, C y E están alineados.

Por la regla 3, las coordenadas de D serán I_u y P_{uv}, y las coordenadas de E son I_v y P_{uv} con signo contrario. De la figura se obtienen sus valores:

$$[I_u \times 10^{-6} = OC + CD \cos 60^\circ]$$

$$I_u = (211.0 + 126.5 \cos 60^\circ) \times 10^6 = 274.3 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \textbf{Resp.}$$

$$[I_v \times 10^{-6} = OC - CE \cos 60^\circ]$$

$$I_v = (211.0 - 126.5 \cos 60^\circ) \times 10^6 = 147.8 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \textbf{Resp.}$$

$$[P_{uv} \times 10^{-6} = CD \operatorname{sen} 60^\circ]$$

$$P_{uv} = (126.5 \operatorname{sen} 60^\circ) \times 10^6 = 109.6 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \textbf{Resp.}$$

A-12. MOMENTOS DE INERCIA MÁXIMO Y MÍNIMO. EJES PRINCIPALES

El círculo de Mohr indica que los puntos cuyas coordenadas representan los momentos de inercia máximo y mínimo están sobre el eje I y tienen, por tanto, producto de inercia nulo. Recíprocamente, los ejes para los que el producto de inercia es nulo son los ejes de máximo o mínimo momento de inercia, y se llaman *ejes principales de inercia.*

Como se dijo en la sección A-8, los productos de inercia con respecto a ejes de simetría son nulos, de donde se deduce que los ejes de simetría han de ser ejes principales ya que darán siempre valores máximos o mínimos para el momento de inercia. Ahora bien, hay muchas figuras que no tienen ejes de simetría, pero en cambio todas tienen ejes principales, respecto de los cuales el producto de inercia es nulo. *Los ejes de simetría son siempre ejes principales, pero los ejes principales no tienen por qué ser de simetría.*

PROBLEMA ILUSTRATIVO

A40. El área encerrada por una cierta figura tiene los siguientes valores de inercia con respecto a X y Y: $I_x = 100 \times 10^6$ mm^4; $I_y = 60 \times 10^6$ mm^4, y $P_{xy} = 15 \times 10^6$ mm^4. Determinar los momentos de inercia máximo y mínimo así como la posición de los ejes principales respecto de XY.

Solución: En un sistema de ejes coordenados IP, como el de la figura A-24, se representan los puntos que tienen las siguientes coordenadas:

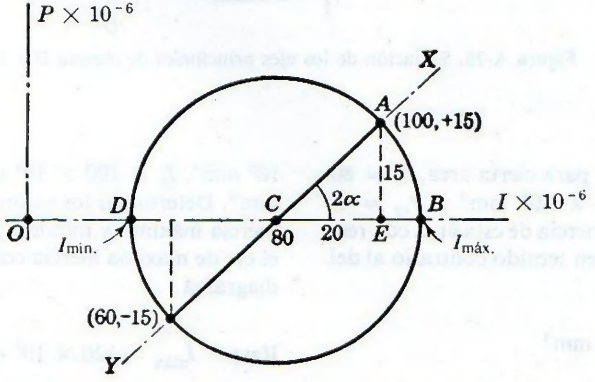


Figura A-24. Momentos de inercia máximo y mínimo.

$$\begin{bmatrix} I_x = 100 \times 10^6 \\ P_{xy} = 15 \times 10^6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I_y = -60 \times 10^6 \\ -P_{xy} = -15 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que P_{xy} se ha asociado a I_x y $-P_{xy}$ a I_y. (Si el valor original de P_{xy} hubiera sido negativo si habría asignado a I_x y su correspondiente positivo, a I_y.) Estos dos puntos son los extremos de un diámetro del círculo de Mohr. El radio del mismo es $CA = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$. Los momentos de inercia máximo y mínimo corresponden a B y a D y son:

$$[I_{máx} = OC + CB] \qquad I_{máx} = (80 + 25) \times 10^6 = 105 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad \textbf{Resp.}$$

$$[I_{mín} = OC - CD] \qquad I_{mín} = (80 - 25) \times 10^6 = 55 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad \textbf{Resp.}$$

Para ir del punto representativo del eje X (radio CA) al representativo del eje de máxima inercia (radio CB) se debe girar en sentido del reloj un ángulo 2α. En el círculo se obtiene:

$$\left[\tan 2\alpha = \frac{AE}{CE}\right] \qquad \tan 2\alpha = \frac{15}{20} = 0.75 \qquad \textbf{Resp.}$$

$$2\alpha = 36.9° \quad \text{y} \quad \alpha = 18.45°$$

El ángulo α que fija la posición del eje de máxima inercia (eje U) ha de girar también en sentido del reloj desde el eje X, lo que da la posición indicada en la figura A-25. El eje de mínima inercia (eje V) es perpendicular al eje U.

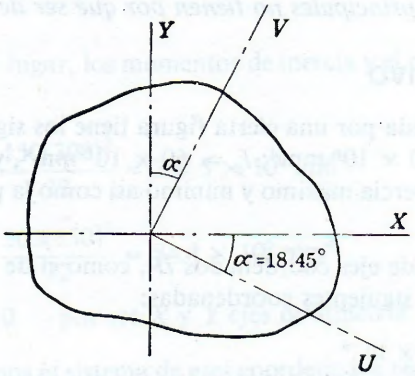


Figura A-25. Situación de los ejes principales de inercia U y V.

PROBLEMAS

A41. Se conocen, para cierta área, $I_x = 80 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 40 \times 10^6$ mm^4 y $P_{xy} = 0$. Hallar el momento de inercia de esta área con respecto a un eje U a 30° en sentido contrario al del reloj respecto al eje X.

Resp. $I_u = 70 \times 10^6$ mm^4

A42. En una cierta área se tiene: $I_x = 40 \times 10^6$ mm^4, $I_y = 100 \times 10^6$ mm^4, $P_{xy} = 40 \times 10^6$ mm^4. Determinar los valores de los momentos de inercia máximo y mínimo y el ángulo que forma el eje de máxima inercia con el eje X. Dibujar un diagrama.

Resp. $I_{máx} = 120 \times 10^6$ mm^4;
$I_{mín} = 20 \times 10^6$ mm^4; $\theta = 63.4°$

A43. Un triángulo rectángulo tiene una base de 300 mm y una altura de 600 mm. Determinar los momentos de inercia máximo y mínimo con respecto a los ejes principales centroidales.

Resp. $\bar{I}_{máx} = 1936 \times 10^6$ mm^4;
$\bar{I}_{mín} = 314 \times 10^6$ mm^4

A44. Las propiedades de un área dada son: $A = 8000$ mm^2; $\bar{I}_x = 16.0 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 340 \times 10^6$ mm^4 y $\bar{P}_{xy} = -14.0 \times 10^6$ mm^4. Calcule el radio de giro mínimo para ejes centroidales.

A45. Determinar los momentos de inercia máximo y mínimo de la sección Z de la figura P-A21, con respecto a los ejes principales centroidales. En el problema A34 se obtuvo $\bar{P}_{xy} = -8.19 \times 10^6$ mm^4.

Resp. $\bar{I}_{máx} = 22.0 \times 10^6$ mm^4;
$\bar{I}_{mín} = 2.46 \times 10^6$ mm^4

A46. Demostrar que el momento de inercia del área de cualquier polígono regular es constante en relación con todos los sistemas de ejes que, en el plano de la figura, pasan por su centroide.

A47. Demostrar que el momento de inercia del área de un cuadrante respecto de su eje de simetría es $(\pi - 2)r^4/16$, siendo r el radio.

A48. La figura del problema A20 se ha vuelto a representar en la figura P-A48. Comprobar el resultado obtenido en aquél problema (I_x), calculando primero $\bar{I}_u$ e $\bar{I}_v$ mediante el círculo de Mohr para obtener $\bar{I}_x$, trasladando luego este valor al eje X.

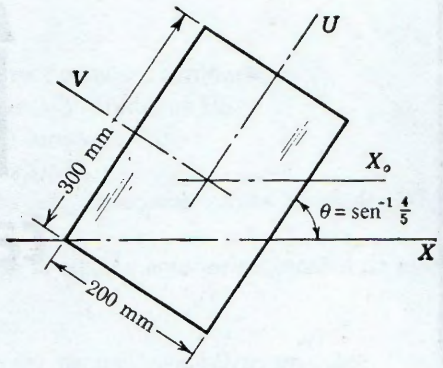


Figura P-A48.

A49. Aplicar la idea expuesta en el problema anterior para calcular el valor de I_x en el área representada en la figura P-A49.

Resp. $I_x = 1040 \times 10^6$ mm^4

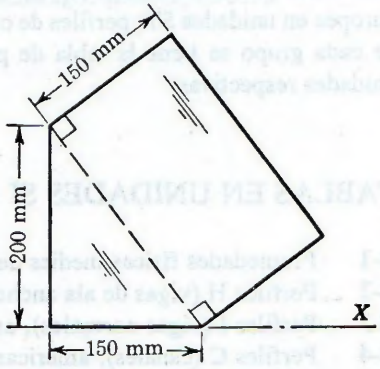


Figura P-A49.

B

tablas

metales y perfiles de acero

Las tablas de propiedades se presentan en tres grupos: perfiles de conformación americana (de Estados Unidos de América) en unidades SI; perfiles de conformación europea en unidades ST; perfiles de conformación americana en unidades US. Al principio de cada grupo se tiene la tabla de propiedades físicas de metales de uso común en las unidades respectivas.

TABLAS EN UNIDADES SI

B-1 Propiedades físicas medias de los metales más comunes (*unidades SI*)
B-2 Perfiles H (vigas de ala ancha), americanos (W) (*unidades SI*)
B-3 Perfiles I (vigas normales), americanos (S) (*unidades SI*)
B-4 Perfiles C (canales), americanos (*unidades SI*)
B-5 Perfiles L (angulares), de lados iguales, americanos (*unidades SI*)
B-6 Perfiles L (angulares), de lados desiguales, americanos (*unidades SI*)

TABLAS EN UNIDADES ST

B-7 Propiedades físicas medias de los metales más comunes (unidades ST)
B-8 Perfiles H (vigas de ala ancha), europeos (unidades ST)
B-9 Perfiles I (vigas normales), europeos (unidades ST)
B-10 Perfiles C (o U) (canales), europeos (unidades ST)
B-11 Perfiles L (angulares), de lados iguales, europeos (unidades ST)
B-12 Perfiles L (angulares), de lados desiguales, europeos (unidades ST)

TABLAS EN UNIDADES US

B-13 Propiedades físicas medias de los metales más comunes (**unidades US**)
B-14 Perfiles H (vigas de ala ancha), americanos (W) (**unidades US**)
B-15 Perfiles I (vigas normales), americanos (S) (**unidades US**)
B-16 Perfiles C (canales), americanos (**unidades US**)
B-17 Perfiles L (angulares), lados iguales y lados desiguales, americanos (**unidades US**)

Las tablas de la B-1 a la B-12 se reproducen de la edición anterior en español de este libro.

Los datos de las tablas B-2 a B-6 se han tomado del manual *Metric Structural Steel Data Design,* con permiso del Canadian Institute of Steel Construction. Los perfiles de ala ancha (W) y los angulares (L) son los designados como Standard CAN3-G312.3-M78 por la Canadian Standards Association (CSA).

La información de las tablas B-7 a B-12 es la de la edición anterior en las unidades métricas técnicas.

Las tablas de la B-13 a la B-17 provienen de la cuarta edición en inglés de esta obra; los datos fueron tomados del *AISC Manual of Steel Construction*, 8a. ed., 1980, con permiso del American Institute of Steel Construction, Inc., Chicago, Illinois, E.U.A.*

* La disposición y adaptación general de este Apéndice B, fue realizada por F. Paniagua, según las consideraciones de "Las Unidades SI en Ingeniería Civil — Una apreciación práctica con las unidades técnicas e inglesas".

TABLA B-1. Propiedades físicas medias de los metales más comunes (unidades SI)

METALES	Densidad (kg/m³)	Coeficiente de dilatación lineal [μm/(m · °C)]	Límite de proporcionalidad (MPa)[a] Tensión	Cortante	Resistencia última (MPa) Tensión	Compr.	Cortante	Módulo de elasticidad (GPa) E	G	Elongación (%) (en 50 mm)
Acero, 0.2% carbono, laminado en caliente	7 850	Varía de 11.0 a 13.2. El valor medio es 11.7	240	150	410	*b*	310	200	80	35
0.2% carbono, laminado en frío	7 850		420	250	550	*b*	420	200	80	18
0.6% carbono, laminado en caliente	7 850		420	250	690	*b*	550	200	80	15
0.8% carbono, laminado en caliente	7 850		480	290	830	*b*	730	200	80	10
Fundición gris	7 200	10.8	*c*	*d*	140	520	*d*	100	40	Pequeña
Fundición maleable	7 200	11.9	250	160	370	*b*	330	170	90	18
Hierro forjado	7 700	12.1	210	130	350	*b*	240	190	70	35
Aluminio fundido	2 650	23.1	60		90	*b*	70	70	30	20
Aluminio, aleación 17ST	2 700	23.1	220	150	390	*b*	220	71	30	—
Latón, laminado (70% Cu, 30% Zn)	8 500	18.7	170	110	380	*b*	330	100	40	30
Bronce, fundido	8 200	18.0	140		230	390	—	80	35	10
Cobre, estirado	8 800	16.8	260	160	380	*b*	—	120	40	4

NOTAS

[a] El límite de proporcionalidad y el módulo elástico, a compresión, pueden tomarse los mismos que a tensión, excepto en la fundición o hierro fundido cuyo límite de proporcionalidad es aproximadamente 180 MPa.

[b] Como resistencia última a compresión en materiales dúctiles puede tomarse el punto de cedencia o fluencia que es ligeramente superior al límite de proporcionalidad a tensión.

[c] No está bien definido, aproximadamente vale 40 MPa.

[d] La fundición falla por tensión diagonal.

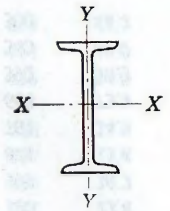


TABLA B-2. Perfiles H (vigas de ala ancha), americanos (W) (unidades SI)

Denominación	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Altura (mm)	Ala (o patín) Ancho (mm)	Ala (o patín) Espesor (mm)	Espesor de alma (mm)	Eje X–X I (10^6 mm^4)	Eje X–X $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje X–X $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje Y–Y I (10^6 mm^4)	Eje Y–Y $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje Y–Y $r = \sqrt{I/A}$ (mm)
W920 ×446	447.2	57 000	933	423	42.7	24.0	8 470	18 200	386	540	2 550	97.3
×417	418.1	53 300	928	422	39.9	22.5	7 880	17 000	385	501	2 370	97.0
×387	387.0	49 300	921	420	36.6	21.3	7 180	15 600	382	453	2 160	95.8
×365	364.6	46 400	916	419	34.3	20.3	6 710	14 600	380	421	2 010	95.2
×342	342.4	43 600	912	418	32.0	19.3	6 250	13 700	379	390	1 870	94.6
×313	312.7	39 800	932	309	34.5	21.1	5 480	11 800	371	170	1 100	65.4
×289	288.6	36 800	927	308	32.0	19.4	5 040	10 900	370	156	1 020	65.2
×271	271.7	34 600	923	307	30.0	18.4	4 720	10 200	369	145	946	64.8
×253	253.7	32 300	919	306	27.9	17.3	4 370	9 520	368	134	874	64.3
×238	238.3	30 400	915	305	25.9	16.5	4 060	8 880	366	123	806	63.6
×223	224.2	28 600	911	304	23.9	15.9	3 770	8 270	363	112	738	62.7
×201	201.3	25 600	903	304	20.1	15.2	3 250	7 200	356	94.4	621	60.7
W840 ×359	359.4	45 800	868	403	35.6	21.1	5 910	13 600	359	389	1 930	92.2
×329	329.4	42 000	862	401	32.4	19.7	5 350	12 400	357	349	1 740	91.2
×299	299.3	38 100	855	400	29.2	18.2	4 790	11 200	355	312	1 560	90.4
×226	226.6	28 900	851	294	26.8	16.1	3 400	7 990	343	114	774	62.8
×210	210.8	26 800	846	293	24.4	15.4	3 110	7 340	340	103	700	61.8
×193	193.5	24 700	840	292	21.7	14.7	2 780	6 630	336	90.3	618	60.5
×176	176.0	22 400	835	292	18.8	14.0	2 460	5 900	331	78.2	536	59.1

(continúa)

TABLA B-2. (*Continuación*)

Denominación	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Altura (mm)	Ala (o patín) Ancho (mm)	Ala (o patín) Espesor (mm)	Espesor de alma (mm)	Eje X–X I (10^6 mm^4)	Eje X–X $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje X–X $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje Y–Y I (10^6 mm^4)	Eje Y–Y $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje Y–Y $r = \sqrt{I/A}$ (mm)
W760 × 314	314.4	40 100	786	384	33.4	19.7	4 270	10 900	327	316	1 640	88.8
× 284	283.9	36 200	779	382	30.1	18.0	3 810	9 790	325	280	1 470	88.0
× 257	257.6	32 800	773	381	27.1	16.6	3 420	8 840	323	250	1 310	87.3
× 196	196.8	25 100	770	268	25.4	15.6	2 400	6 240	309	81.7	610	57.1
× 185	184.8	23 500	766	267	23.6	14.9	2 230	5 820	308	75.1	563	56.5
× 173	173.6	22 100	762	267	21.6	14.4	2 060	5 400	305	68.7	515	55.7
× 161	160.4	20 400	758	266	19.3	13.8	1 860	4 900	302	60.7	457	54.5
× 147	147.1	18 700	753	265	17.0	13.2	1 660	4 410	298	52.9	399	53.1
W690 × 265	264.5	33 700	706	358	30.2	18.4	2 900	8 220	294	231	1 290	82.8
× 240	239.9	30 600	701	356	27.4	16.8	2 610	7 450	292	206	1 160	82.2
× 217	217.8	27 700	695	355	24.8	15.4	2 340	6 740	291	185	1 040	81.7
× 170	169.9	21 600	693	256	23.6	14.5	1 700	4 910	280	66.2	517	55.3
× 152	152.1	19 400	688	254	21.1	13.1	1 510	4 380	279	57.8	455	54.6
× 140	139.8	17 800	684	254	18.9	12.4	1 360	3 980	276	51.7	407	53.9
× 125	125.6	16 000	678	253	16.3	11.7	1 190	3 500	272	44.1	349	52.5
W610 × 241	241.7	30 800	635	329	31.0	17.9	2 150	6 780	264	184	1 120	77.4
× 217	217.9	27 800	628	328	27.7	16.5	1 910	6 070	262	163	995	76.7
× 195	195.6	24 900	622	327	24.4	15.4	1 680	5 400	260	142	871	75.6
× 174	174.3	22 200	616	325	21.6	14.0	1 470	4 780	257	124	761	74.7
× 155	154.9	19 700	611	324	19.0	12.7	1 290	4 220	256	108	666	73.9
× 140	140.1	17 900	617	230	22.2	13.1	1 120	3 630	250	45.1	392	50.3
× 125	125.1	15 900	612	229	19.6	11.9	985	3 220	249	39.3	343	49.7
× 113	113.4	14 400	608	228	17.3	11.2	875	2 880	246	34.3	300	48.7

×101	101.7	13 000	603	228	14.9	10.5	764	2 530	243	29.5	259	47.7
×92	92.3	11 800	603	179	15.0	10.9	646	2 140	234	14.4	161	35.0
×82	81.9	10 400	599	178	12.8	10.0	560	1 870	232	12.1	136	34.0
W530 ×219	218.9	27 900	560	318	29.2	18.3	1 510	5 390	233	157	986	75.0
×196	196.5	25 000	554	316	26.3	16.5	1 340	4 840	231	139	877	74.4
×182	181.7	23 100	551	315	24.4	15.2	1 240	4 480	231	127	808	74.2
×165	165.3	21 100	546	313	22.2	14.0	1 110	4 060	230	114	726	73.4
×150	150.6	19 200	543	312	20.3	12.7	1 010	3 710	229	103	659	73.2
×138	138.3	17 600	549	214	23.6	14.7	861	3 140	221	38.7	362	46.9
×123	123.2	15 700	544	212	21.2	13.1	761	2 800	220	33.8	319	46.4
×109	109.0	13 900	539	211	18.8	11.6	667	2 480	219	29.5	280	46.1
×101	101.4	12 900	537	210	17.4	10.9	617	2 300	219	26.9	256	45.6
×92	92.5	11 800	533	209	15.6	10.2	552	2 070	217	23.8	228	44.9
×82[a]	82.4	10 500	528	209	13.3	9.5	479	1 810	214	20.3	194	44.0
×85	84.7	10 800	535	166	16.5	10.3	485	1 810	212	12.6	152	34.2
×74	74.7	9 520	529	166	13.6	9.7	411	1 550	208	10.4	125	33.1
×66	65.7	8 370	525	165	11.4	8.9	351	1 340	205	8.57	104	32.0
W460 ×177	177.3	22 600	482	286	26.9	16.6	910	3 780	201	105	735	68.2
×158	157.7	20 100	476	284	23.9	15.0	796	3 350	199	91.4	643	67.4
×144	144.6	18 400	472	283	22.1	13.6	726	3 080	199	83.6	591	67.4
×128	128.4	16 400	467	282	19.6	12.2	637	2 730	197	73.3	520	66.9
×113	113.1	14 400	463	280	17.3	10.8	556	2 400	196	63.3	452	66.3
×106	105.8	13 500	469	194	20.6	12.6	488	2 080	190	25.1	259	43.2
×97	96.6	12 300	466	193	19.0	11.4	445	1 910	190	22.8	237	43.1
×89	89.3	11 400	463	192	17.7	10.5	410	1 770	190	20.9	218	42.9
×82	81.9	10 400	460	191	16.0	9.9	370	1 610	188	18.6	195	42.2
×74	74.2	9 450	457	190	14.5	9.0	333	1 460	188	16.6	175	41.9
×67[a]	68.1	8 680	454	190	12.7	8.5	300	1 320	186	14.6	153	40.9
×61[a]	60.9	7 760	450	189	10.8	8.1	259	1 150	183	12.2	129	39.6

(continúa)

TABLA B-2. (*Continuación*)

Denominación	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Altura (mm)	Ala (o patín) Ancho (mm)	Ala (o patín) Espesor (mm)	Espesor de alma (mm)	Eje X–X I (10^6 mm^4)	Eje X–X $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje X–X $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje Y–Y I (10^6 mm^4)	Eje Y–Y $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje Y–Y $r = \sqrt{I/A}$ (mm)
× 68	68.5	8 730	459	154	15.4	9.1	297	1 290	184	9.41	122	32.8
× 60	59.6	7 590	455	153	13.3	8.0	255	1 120	183	7.96	104	32.4
× 52	52.0	6 630	450	152	10.8	7.6	212	943	179	6.34	83.4	30.9
W410 × 149	149.3	19 000	431	265	25.0	14.9	619	2 870	180	77.7	586	63.9
× 132	132.1	16 800	425	263	22.2	13.3	538	2 530	179	67.4	512	63.3
× 114	114.5	14 600	420	261	19.3	11.6	462	2 200	178	57.2	439	62.6
× 100	99.6	12 700	415	260	16.9	10.0	398	1 920	177	49.5	381	62.5
× 85	85.0	10 800	417	181	18.2	10.9	315	1 510	171	18.0	199	40.8
× 74	74.9	9 550	413	180	16.0	9.7	275	1 330	170	15.6	173	40.4
× 67	67.5	8 600	410	179	14.4	8.8	246	1 200	169	13.8	154	40.0
× 60	59.5	7 580	407	178	12.8	7.7	216	1 060	169	12.0	135	39.9
× 54	53.4	6 810	403	177	10.9	7.5	186	924	165	10.1	114	38.5
× 46	46.2	5 890	403	140	11.2	7.0	156	773	163	5.14	73.4	29.5
× 39	39.2	4 990	399	140	8.8	6.4	127	634	159	4.04	57.7	28.4
W360 × 1086	1087.9	139 000	569	454	125	78.0	5 960	20 900	207	1 960	8 650	119
× 990	991.0	126 000	550	448	115	71.9	5 190	18 900	203	1 730	7 740	117
× 900	902.2	115 000	531	442	106	65.9	4 500	17 000	198	1 530	6 940	116
× 818	819.0	104 000	514	437	97.0	60.5	3 920	15 300	194	1 360	6 200	114
× 744	744.3	94 800	498	432	88.9	55.6	3 420	13 700	190	1 200	5 550	112
× 677	677.8	86 300	483	428	81.5	51.2	2 990	12 400	186	1 070	4 990	111
× 634	634.3	80 800	474	424	77.1	47.6	2 740	11 600	184	983	4 630	110
× 592	592.6	75 500	465	421	72.3	45.0	2 500	10 800	182	902	4 280	109

× 551	550.6	70 100	455	418	67.6	42.0	2 260	9 940	180	825	3 950	108
× 509	509.5	64 900	446	416	62.7	39.1	2 050	9 170	178	754	3 630	108
× 463	462.8	59 000	435	412	57.4	35.8	1 800	8 280	175	670	3 250	107
× 421	421.7	53 700	425	409	52.6	32.8	1 600	7 510	172	601	2 940	106
× 382	382.4	48 700	416	406	48.0	29.8	1 410	6 790	170	536	2 640	105
× 347	347.0	44 200	407	404	43.7	27.2	1 250	6 140	168	481	2 380	104
× 314	313.4	39 900	399	401	39.6	24.9	1 100	5 530	166	426	2 120	103
× 287	287.6	36 600	393	399	36.6	22.6	997	5 070	165	388	1 940	103
W360 × 262	262.7	33 500	387	398	33.3	21.1	894	4 620	163	350	1 760	102
× 237	236.3	30 100	380	395	30.2	18.9	788	4 150	162	310	1 570	102
× 216	216.3	27 600	375	394	27.7	17.3	712	3 790	161	283	1 430	101
× 196	196.5	25 000	372	374	26.2	16.4	636	3 420	159	229	1 220	95.5
× 179	179.2	22 800	368	373	23.9	15.0	575	3 120	159	207	1 110	95.2
× 162	162.0	20 600	364	371	21.8	13.3	516	2 830	158	186	1 000	94.8
× 147	147.5	18 800	360	370	19.8	12.3	463	2 570	157	167	904	94.3
× 134	134.0	17 100	356	369	18.0	11.2	415	2 330	156	151	817	94.0
× 122	121.7	15 500	363	257	21.7	13.0	365	2 010	154	61.5	478	63.0
× 110	110.2	14 000	360	256	19.9	11.4	331	1 840	154	55.7	435	63.0
× 101	101.2	12 900	357	255	18.3	10.5	302	1 690	153	50.6	397	62.7
× 91	90.8	11 600	353	254	16.4	9.5	267	1 510	152	44.8	353	62.2
× 79	79.3	10 100	354	205	16.8	9.4	227	1 280	150	24.2	236	48.9
× 72	71.5	9 110	350	204	15.1	8.6	201	1 150	149	21.4	210	48.5
× 64	63.9	8 140	347	203	13.5	7.7	178	1 030	148	18.8	186	48.1
× 57	56.7	7 220	358	172	13.1	7.9	161	897	149	11.1	129	39.3
× 51	50.6	6 450	355	171	11.6	7.2	141	796	148	9.68	113	38.8
× 45	45.0	5 730	352	171	9.8	6.9	122	691	146	8.18	95.7	37.8
× 39	39.1	4 980	353	128	10.7	6.5	102	580	143	3.75	58.6	27.4
× 33	32.8	4 170	349	127	8.5	5.8	82.7	474	141	2.91	45.8	26.4

(continúa)

TABLA B-2. (*Continuación*)

				Ala (o patín)			Eje X–X			Eje Y–Y		
Denominación	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Altura (mm)	Ancho (mm)	Espesor (mm)	Espesor de alma (mm)	I (10^6 mm^4)	$S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	$r = \sqrt{I/A}$ (mm)	I (10^6 mm^4)	$S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	$r = \sqrt{I/A}$ (mm)
W310 × 500	500.4	63 700	427	340	75.1	45.1	1 690	7 910	163	494	2 910	88.0
×454	454.0	57 800	415	336	68.7	41.3	1 480	7 130	160	436	2 600	86.8
×415	415.1	52 900	403	334	62.7	38.9	1 300	6 450	157	391	2 340	86.0
×375	374.3	47 700	391	330	57.1	35.4	1 130	5 760	154	343	2 080	84.8
×342	343.3	43 700	382	328	52.6	32.6	1 010	5 260	152	310	1 890	84.2
×313	313.3	39 900	374	325	48.3	30.0	896	4 790	150	277	1 700	83.3
×283	283.0	36 000	365	322	44.1	26.9	787	4 310	148	246	1 530	82.6
×253	252.9	32 200	356	319	39.6	24.4	682	3 830	146	215	1 350	81.6
×226	226.8	28 900	348	317	35.6	22.1	596	3 420	144	189	1 190	81.0
×202	202.6	25 800	341	315	31.8	20.1	520	3 050	142	166	1 050	80.2
×179	178.8	22 800	333	313	28.1	18.0	445	2 680	140	144	919	79.5
×158	157.4	20 100	327	310	25.1	15.5	386	2 360	139	125	805	78.9
×143	143.1	18 200	323	309	22.9	14.0	348	2 150	138	113	729	78.6
×129	129.6	16 500	318	308	20.6	13.1	308	1 940	137	100	652	78.0
×118	117.5	15 000	314	307	18.7	11.9	275	1 750	136	90.2	588	77.6
×107	106.9	13 600	311	306	17.0	10.9	248	1 590	135	81.2	531	77.2
×97	96.8	12 300	308	305	15.4	9.9	222	1 440	134	72.9	478	76.9
×86	86.4	11 000	310	254	16.3	9.1	199	1 280	134	44.5	351	63.6
×79	78.9	10 100	306	254	14.6	8.8	177	1 160	133	39.9	314	63.0
×74	74.5	9 490	310	205	16.3	9.4	165	1 060	132	23.4	229	49.7
×67	66.8	8 510	306	204	14.6	8.5	145	949	131	20.7	203	49.3
×60	59.6	7 590	303	203	13.1	7.5	129	849	130	18.3	180	49.1

×52	52.3	6 670	317	167	13.2	7.6	118	747	133	10.3	123	39.2
×45	44.6	5 690	313	166	11.2	6.6	99.2	634	132	8.55	103	38.8
×39	38.7	4 940	310	165	9.7	5.8	85.1	549	131	7.27	88.1	38.4
×33	32.8	4 180	313	102	10.8	6.6	65.0	415	125	1.92	37.6	21.4
×28	28.4	3 610	309	102	8.9	6.0	54.3	351	123	1.58	31.0	20.9
×24	23.8	3 040	305	101	6.7	5.6	42.7	280	119	1.16	22.9	19.5
×21	21.1	2 690	303	101	5.7	5.1	37.0	244	117	0.983	19.5	19.1
W250 ×167	167.4	21 300	289	265	31.8	19.2	300	2 080	119	98.8	746	68.1
×149	148.9	19 000	282	263	28.4	17.3	259	1 840	117	86.2	656	67.4
×131	131.1	16 700	275	261	25.1	15.4	221	1 610	115	74.5	571	66.8
×115	114.8	14 600	269	259	22.1	13.5	189	1 410	114	64.1	495	66.2
×101	101.2	12 900	264	257	19.6	11.9	164	1 240	113	55.5	432	65.6
×89	89.6	11 400	260	256	17.3	10.7	143	1 100	112	48.4	378	65.1
×80	80.1	10 200	256	255	15.6	9.4	126	982	111	43.1	338	65.0
×73	72.9	9 280	253	254	14.2	8.6	113	891	110	38.8	306	64.6
×67	67.1	8 550	257	204	15.7	8.9	104	806	110	22.2	218	51.0
×58	58.2	7 420	252	203	13.5	8.0	87.3	693	108	18.8	186	50.4
×49	49.0	6 250	247	202	11.0	7.4	70.6	572	106	15.1	150	49.2
×45	44.9	5 720	266	148	13.0	7.6	71.1	534	111	7.03	95.1	35.1
×39	38.7	4 920	262	147	11.2	6.6	60.1	459	110	5.94	80.8	34.7
×33	32.7	4 170	258	146	9.1	6.1	48.9	379	108	4.73	64.7	33.7
×28	28.5	3 630	260	102	10.0	6.4	40.0	307	105	1.78	34.8	22.1
×25	25.3	3 230	257	102	8.4	6.1	34.2	266	103	1.49	29.2	21.5
×22	22.4	2 850	254	102	6.9	5.8	28.9	227	101	1.23	24.0	20.7
×18	17.9	2 270	251	101	5.3	4.8	22.4	179	99.3	0.913	18.1	20.0

(continúa)

TABLA B-2. (*Continuación*)

Denominación	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Altura (mm)	Ala (o patín) Ancho (mm)	Ala (o patín) Espesor (mm)	Espesor de alma (mm)	Eje X–X I (10^6 mm^4)	Eje X–X $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje X–X $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje Y–Y I (10^6 mm^4)	Eje Y–Y $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje Y–Y $r = \sqrt{I/A}$ (mm)
W200 × 100	99.5	12 700	229	210	23.7	14.5	113	989	94.5	36.6	349	53.8
× 86	86.7	11 100	222	209	20.6	13.0	94.7	853	92.6	31.4	300	53.3
× 71	71.5	9 110	216	206	17.4	10.2	76.6	709	91.7	25.4	246	52.8
× 59	59.4	7 560	210	205	14.2	9.1	61.1	582	89.9	20.4	199	51.9
× 52	52.3	6 660	206	204	12.6	7.9	52.7	512	89.0	17.8	175	51.8
× 46	46.0	5 860	203	203	11.0	7.2	45.5	448	88.1	15.3	151	51.2
× 42	41.7	5 310	205	166	11.8	7.2	40.9	399	87.7	9.00	108	41.2
× 36	35.9	4 580	201	165	10.2	6.2	34.4	342	86.7	7.64	92.6	40.9
× 31	31.4	4 000	210	134	10.2	6.4	31.4	299	88.6	4.10	61.1	32.0
× 27	26.6	3 390	207	133	8.4	5.8	25.8	249	87.3	3.30	49.6	31.2
× 22	22.4	2 860	206	102	8.0	6.2	20.0	194	83.6	1.42	27.8	22.3
× 19	19.4	2 480	203	102	6.5	5.8	16.6	163	81.7	1.15	22.6	21.6
× 15	15.0	1 900	200	100	5.2	4.3	12.7	127	81.8	0.869	17.4	21.4
W150 × 37	37.1	4 730	162	154	11.6	8.1	22.2	274	68.5	7.07	91.8	38.7
× 30	29.8	3 790	157	153	9.3	6.6	17.2	219	67.3	5.56	72.6	38.3
× 22	22.3	2 850	152	152	6.6	5.8	12.1	159	65.1	3.87	50.9	36.9
× 24	24.0	3 060	160	102	10.3	6.6	13.4	168	66.3	1.83	35.8	24.4
× 18	18.0	2 290	153	102	7.1	5.8	9.16	120	63.3	1.26	24.7	23.5
× 14	13.6	1 730	150	100	5.5	4.3	6.87	91.5	63.0	0.918	18.4	23.0
W130 × 28	28.2	3 590	131	128	10.9	6.9	11.0	168	55.3	3.81	59.6	32.6
× 24	23.7	3 020	127	127	9.1	6.1	8.84	139	54.1	3.11	49.0	32.1
W100 × 19	19.4	2 470	106	103	8.8	7.1	4.76	89.9	43.9	1.61	31.2	25.5

[a] Producido exclusivamente por Algoma Steel (Canada).

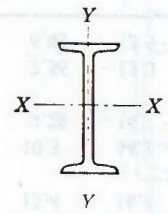


TABLA B-3. Perfiles I (vigas normales), americanos (S) (unidades SI)

Denominación	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Altura (mm)	Ala (o patín) Ancho (mm)	Ala (o patín) Espesor (mm)	Espesor de alma (mm)	Eje X–X I (10^6 mm^4)	Eje X–X $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje X–X $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje Y–Y I (10^6 mm^4)	Eje Y–Y $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje Y–Y $r = \sqrt{I/A}$ (mm)
S610 × 179	178.9	22 800	610	204	28.0	20.3	1 260	4 140	235	35.1	345	39.3
× 157.6	158.0	20 100	610	200	28.0	15.9	1 180	3 870	242	32.8	328	40.4
× 149	149.2	19 000	610	184	22.1	19.0	997	3 270	229	20.1	218	32.5
× 134	133.9	17 100	610	181	22.1	15.8	938	3 070	234	18.9	209	33.3
× 118.9	119.1	15 200	610	178	22.1	12.7	879	2 880	241	17.9	201	34.3
S510 × 141	141.8	18 100	508	183	23.3	20.3	674	2 660	193	21.0	230	34.1
× 127	126.9	16 200	508	179	23.3	16.6	633	2 490	198	19.5	218	34.7
× 112	111.9	14 300	508	162	20.1	16.3	532	2 100	193	12.5	154	29.6
× 97.3	97.8	12 500	508	159	20.1	12.7	494	1 950	199	11.7	147	30.6
S460 × 104	104.7	13 300	457	159	17.6	18.1	387	1 690	170	10.3	129	27.7
× 81.4	81.6	10 400	457	152	17.6	11.7	335	1 470	180	8.77	115	29.1
S380 × 74	74.6	9 500	381	143	15.8	14.0	203	1 060	146	6.60	92.3	26.4
× 64	63.9	8 150	381	140	15.8	10.4	187	980	151	6.11	87.3	27.4

(continúa)

TABLA B-3. (*Continuación*)

Denominación	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Altura (mm)	Ala (o patín) Ancho (mm)	Ala (o patín) Espesor (mm)	Espesor de alma (mm)	Eje $X-X$ I (10^6 mm^4)	Eje $X-X$ $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje $X-X$ $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje $Y-Y$ I (10^6 mm^4)	Eje $Y-Y$ $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje $Y-Y$ $r = \sqrt{I/A}$ (mm)
S310 × 74	74.6	9 500	305	139	16.8	17.4	128	836	116	6.64	95.6	26.4
× 60.7	60.8	7 750	305	133	16.8	11.7	114	747	121	5.71	85.9	27.1
× 52	52.2	6 650	305	129	13.8	10.9	95.8	629	120	4.16	64.5	25.0
× 47	47.4	6 040	305	127	13.8	8.9	91.1	597	123	3.94	62.1	25.5
S250 × 52	52.3	6 660	254	126	12.5	15.1	61.6	485	96.1	3.56	56.5	23.1
× 38	37.8	4 820	254	118	12.5	7.9	51.4	405	103	2.84	48.2	24.3
S200 × 34	34.3	4 370	203	106	10.8	11.2	27.0	266	78.6	1.81	34.2	20.4
× 27	27.5	3 500	203	102	10.8	6.9	24.0	237	82.9	1.59	31.1	21.3
S180 × 30	29.7	3 780	178	97	10.0	11.4	17.6	198	68.3	1.30	26.8	18.5
× 22.8	22.7	2 890	178	92	10.0	6.4	15.3	172	72.7	1.08	23.6	19.4
S150 × 26	25.5	3 250	152	90	9.1	11.8	10.8	143	57.7	0.952	21.2	17.1
× 19	18.4	2 340	152	84	9.1	5.8	9.08	119	62.3	0.750	17.9	17.9
S130 × 22	21.9	2 790	127	83	8.3	12.5	6.33	99.6	47.6	0.690	16.6	15.7
× 15	14.8	1 880	127	76	8.3	5.3	5.11	80.4	52.1	0.507	13.4	16.4
S100 × 14.1	14.0	1 790	102	70	7.4	8.3	2.81	55.2	39.7	0.362	10.3	14.2
× 11	11.3	1 440	102	67	7.4	4.8	2.52	49.4	41.9	0.311	9.28	14.7
S75 × 11	11.1	1 420	76	63	6.6	8.9	1.20	31.6	29.1	0.238	7.56	13.0
× 8	8.4	1 070	76	59	6.6	4.3	1.04	27.4	31.2	0.190	6.43	13.3

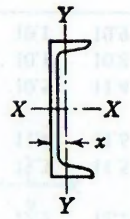


TABLA B-4. Perfiles C (canales), americanos (unidades SI)

Denominación	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Altura (mm)	Ala (o patín) Ancho (mm)	Ala (o patín) Espesor (mm)	Espesor de alma (mm)	Eje $X-X$ I (10^6 mm^4)	Eje $X-X$ $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje $X-X$ $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje $Y-Y$ I (10^6 mm^4)	Eje $Y-Y$ $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje $Y-Y$ $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	x (mm)
C380 × 74	74.4	9 480	381	94	16.5	18.2	168	881	133	4.60	62.4	22.0	20.3
× 60	59.4	7 570	381	89	16.5	13.2	145	760	138	3.84	55.5	22.5	19.7
× 50	50.5	6 430	381	86	16.5	10.2	131	687	143	3.39	51.4	23.0	20.0
C310 × 45	44.7	5 690	305	80	12.7	13.0	67.3	442	109	2.12	33.6	19.3	17.0
× 37	37.1	4 720	305	77	12.7	9.8	59.9	393	113	1.85	30.9	19.8	17.1
× 31	30.8	3 920	305	74	12.7	7.2	53.5	351	117	1.59	28.2	20.1	17.5
C250 × 45	44.5	5 670	254	76	11.1	17.1	42.8	337	86.9	1.60	26.8	16.8	16.3
× 37	37.3	4 750	254	73	11.1	13.4	37.9	299	89.4	1.40	24.3	17.1	15.7
× 30	29.6	3 780	254	69	11.1	9.6	32.7	257	93.0	1.16	21.5	17.5	15.3
× 23	22.6	2 880	254	65	11.1	6.1	27.8	219	98.2	0.922	18.8	17.9	15.9
C230 × 30	29.8	3 800	229	67	10.5	11.4	25.5	222	81.9	1.01	19.3	16.3	14.8
× 22	22.3	2 840	229	63	10.5	7.2	21.3	186	86.6	0.806	16.8	16.8	14.9
× 20	19.8	2 530	229	61	10.5	5.9	19.8	173	88.6	0.716	15.6	16.8	15.1

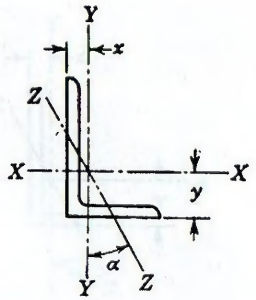
(continúa)

TABLA B-4. (*Continuación*)

Denominación	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Altura (mm)	Ala (o patín) Ancho (mm)	Ala (o patín) Espesor (mm)	Espesor de alma (mm)	Eje X–X I (10^6 mm^4)	Eje X–X $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje X–X $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje Y–Y I (10^6 mm^4)	Eje Y–Y $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje Y–Y $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	x (mm)
C200 × 28	27.9	3 560	203	64	9.9	12.4	18.2	180	71.6	0.825	16.6	15.2	14.4
× 21	20.4	2 600	203	59	9.9	7.7	14.9	147	75.8	0.627	13.9	15.5	14.0
× 17	17.0	2 170	203	57	9.9	5.6	13.5	133	78.8	0.544	12.8	15.8	14.5
C180 × 22	21.9	2 780	178	58	9.3	10.6	11.3	127	63.7	0.568	12.8	14.3	13.5
× 18	18.2	2 310	178	55	9.3	8.0	10.0	113	65.9	0.476	11.4	14.3	13.2
× 15	14.5	1 850	178	53	9.3	5.3	8.86	99.6	69.3	0.405	10.3	14.8	13.8
C150 × 19	19.2	2 450	152	54	8.7	11.1	7.12	93.7	53.9	0.425	10.3	13.2	12.9
× 16	15.5	1 980	152	51	8.7	8.0	6.22	81.9	56.1	0.351	9.13	13.3	12.6
× 12	12.1	1 540	152	48	8.7	5.1	5.36	70.6	59.1	0.279	7.93	13.5	12.8
C130 × 13	13.3	1 700	127	47	8.1	8.3	3.66	57.6	46.5	0.252	7.20	12.2	11.9
× 10	9.9	1 260	127	44	8.1	4.8	3.09	48.6	49.5	0.195	6.14	12.5	12.2
C100 × 11	10.8	1 370	102	43	7.5	8.2	1.91	37.4	37.3	0.174	5.52	11.3	11.5
× 8	8.0	1 020	102	40	7.5	4.7	1.61	31.6	39.7	0.132	4.65	11.4	11.6
C75 × 9	8.8	1 120	76	40	6.9	9.0	0.85	22.3	27.4	0.123	4.31	10.5	11.4
× 7	7.3	933	76	37	6.9	6.6	0.75	19.7	28.3	0.096	3.67	10.1	10.8
× 6	6.0	763	76	35	6.9	4.3	0.67	17.6	29.6	0.077	3.21	10.1	10.9

TABLA B-5. Perfiles L (angulares), de lados iguales, americanos (unidades SI)

Dimensiones (mm)	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Eje X–X y Eje Y-Y				Eje Z–Z
			I (10^6 mm^4)	$S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	$r = \sqrt{I/A}$ (mm)	x o bien y (mm)	$r = \sqrt{I/A}$ (mm)
200 × 200 × 30	87.1	11 100	40.3	290	60.3	60.9	39.0
× 25	73.6	9 380	34.8	247	60.9	59.2	39.1
× 20	59.7	7 600	28.8	202	61.6	57.4	39.3
× 16	48.2	6 140	23.7	165	62.1	55.9	39.5
× 13	39.5	5 030	19.7	136	62.6	54.8	39.7
× 10	30.6	3 900	15.5	106	63.0	53.7	39.9
150 × 150 × 20	44.0	5 600	11.6	110	45.5	44.8	29.3
× 16	35.7	4 540	9.63	90.3	46.0	43.4	29.4
× 13	29.3	3 730	8.05	74.7	46.4	42.3	29.6
× 10	22.8	2 900	6.37	58.6	46.9	41.2	29.8
125 × 125 × 16	29.4	3 740	5.41	61.5	38.0	37.1	24.4
× 13	24.2	3 080	4.54	51.1	38.4	36.0	24.5
× 10	18.8	2 400	3.62	40.2	38.8	34.9	24.7
× 8	15.2	1 940	2.96	32.6	39.1	34.2	24.8
100 × 100 × 16	23.1	2 940	2.65	38.3	30.0	30.8	19.5
× 13	19.1	2 430	2.24	31.9	30.4	29.8	19.5
× 10	14.9	1 900	1.80	25.2	30.8	28.7	19.7
× 8	12.1	1 540	1.48	20.6	31.1	28.0	19.8
× 6	9.14	1 160	1.14	15.7	31.3	27.2	19.9
90 × 90 × 13	17.0	2 170	1.60	25.6	27.2	27.2	17.6
× 10	13.3	1 700	1.29	20.2	27.6	26.2	17.6
× 8	10.8	1 380	1.07	16.5	27.8	25.5	17.7
× 6	8.20	1 040	0.826	12.7	28.1	24.7	17.9
75 × 75 × 13	14.0	1 780	0.892	17.3	22.4	23.5	14.6
× 10	11.0	1 400	0.725	13.8	22.8	22.4	14.6



(continúa)

TABLA B-5. (*Continuación*)

Dimensiones (mm)	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Eje X–X y Eje Y-Y				Eje Z–Z
			I (10^6 mm^4)	$S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	$r = \sqrt{I/A}$ (mm)	$\overset{x}{\text{o bien}}\ y$ (mm)	$r = \sqrt{I/A}$ (mm)
×8	8.92	1 140	0.602	11.3	23.0	21.7	14.7
×6	6.78	864	0.469	8.68	23.3	21.0	14.8
×5	5.69	725	0.398	7.32	23.4	20.6	14.9
65×65 ×10	9.42	1 200	0.459	10.2	19.6	19.9	12.7
×8	7.66	976	0.383	8.36	19.8	19.2	12.7
×6	5.84	744	0.300	6.44	20.1	18.5	12.8
×5	4.91	625	0.255	5.45	20.2	18.1	12.9
55×55 ×10	7.85	1 000	0.268	7.11	16.4	17.4	10.7
×8	6.41	816	0.225	5.87	16.6	16.7	10.7
×6	4.90	624	0.177	4.54	16.9	16.0	10.8
×5	4.12	525	0.152	3.85	17.0	15.6	10.8
×4	3.33	424	0.125	3.13	17.1	15.2	10.9
×3	2.52	321	0.096	2.39	17.3	14.9	11.0
45×45 ×8	5.15	656	0.118	3.82	13.4	14.2	8.76
×6	3.96	504	0.094	2.98	13.7	13.4	8.79
×5	3.34	425	0.081	2.53	13.8	13.1	8.82
×4	2.70	344	0.067	2.07	13.9	12.7	8.87
×3	2.05	261	0.052	1.58	14.1	12.4	8.93
35×35 ×6	3.01	384	0.042	1.74	10.5	10.9	6.81
×5	2.55	325	0.036	1.49	10.6	10.6	6.83
×4	2.07	264	0.030	1.22	10.7	10.2	6.86
×3	1.58	201	0.024	0.940	10.8	9.86	6.91
25×25 ×5	1.77	225	0.012	0.724	7.39	8.06	4.87
×4	1.44	184	0.010	0.599	7.50	7.71	4.87
×3	1.11	141	0.008	0.465	7.63	7.35	4.89

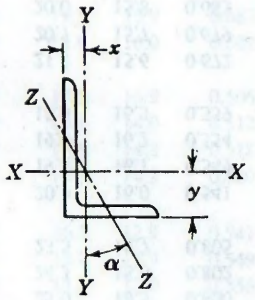


TABLA B-6. Perfiles L (angulares), de lados desiguales, americanos (unidades SI)

Dimensiones (mm)	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Eje $X-X$ I (10^6 mm^4)	Eje $X-X$ $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje $X-X$ $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje $X-X$ y (mm)	Eje $Y-Y$ I (10^6 mm^4)	Eje $Y-Y$ $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje $Y-Y$ $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje $Y-Y$ x (mm)	Eje $Z-Z$ $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje $Z-Z$ tan α
200 × 150 × 25	63.8	8 120	31.6	236	62.3	66.3	15.1	139	43.2	41.3	32.0	0.543
× 20	51.8	6 600	26.2	193	63.0	64.5	12.7	115	43.8	39.5	32.1	0.549
× 16	42.0	5 340	21.6	158	63.5	63.1	10.5	93.8	44.3	38.1	32.3	0.554
× 13	34.4	4 380	17.9	130	64.0	62.0	8.77	77.6	44.7	37.0	32.5	0.557
200 × 100 × 20	44.0	5 600	22.6	180	63.6	74.3	3.84	50.8	26.2	24.3	21.3	0.256
× 16	35.7	4 540	18.7	147	64.2	72.8	3.22	41.8	26.6	22.8	21.4	0.262
× 13	29.3	3 730	15.6	121	64.6	71.7	2.72	34.7	27.0	21.7	21.6	0.266
× 10	22.8	2 900	12.3	94.8	65.1	70.5	2.18	27.4	27.4	20.5	21.8	0.271
150 × 100 × 16	29.4	3 740	8.40	84.8	47.4	50.9	3.00	40.4	28.3	25.9	21.6	0.434
× 13	24.2	3 080	7.03	70.2	47.8	49.9	2.53	33.7	28.7	24.9	21.7	0.440
× 10	18.8	2 400	5.58	55.1	48.2	48.8	2.03	26.6	29.1	23.8	21.9	0.445
× 8	15.2	1 940	4.55	44.6	48.5	48.0	1.67	21.6	29.3	23.0	22.0	0.448

(continúa)

TABLA B-6. (*Continuación*)

Dimensiones (mm)	Masa (aprox.) (kg/m)	Área transversal (mm^2)	Eje X–X I (10^6 mm^4)	Eje X–X $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje X–X $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje X–X y (mm)	Eje Y–Y I (10^6 mm^4)	Eje Y–Y $S = \frac{I}{c}$ (10^3 mm^3)	Eje Y–Y $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje Y–Y x (mm)	Eje Z–Z $r = \sqrt{I/A}$ (mm)	Eje Z–Z tan α
125×90 ×16	25.0	3 180	4.84	58.5	39.0	42.2	2.09	32.0	25.6	24.7	19.2	0.499
×13	20.6	2 630	4.07	48.6	39.4	41.2	1.77	26.7	26.0	23.7	19.3	0.505
×10	16.1	2 050	3.25	38.2	39.8	40.1	1.42	21.1	26.4	22.6	19.5	0.511
×8	13.0	1 660	2.66	31.1	40.1	39.3	1.18	17.2	26.6	21.8	19.6	0.515
125×75 ×13	19.1	2 430	3.82	47.1	39.6	43.9	1.04	18.5	20.7	18.9	16.2	0.356
×10	14.9	1 900	3.05	37.1	40.0	42.8	0.841	14.7	21.0	17.8	16.3	0.363
×8	12.1	1 540	2.50	30.1	40.3	42.1	0.697	12.0	21.3	17.1	16.4	0.367
×6	9.14	1 160	1.92	23.0	40.6	41.3	0.542	9.23	21.6	16.3	16.6	0.372
100×90 ×13	18.1	2 300	2.17	31.4	30.7	31.1	1.66	25.9	26.8	26.1	18.4	0.796
×10	14.1	1 800	1.74	24.9	31.1	30.0	1.33	20.5	27.2	25.0	18.5	0.800
×8	11.4	1 460	1.43	20.3	31.4	29.3	1.10	16.8	27.5	24.3	18.6	0.802
×6	8.67	1 100	1.11	15.5	31.7	28.5	0.853	12.8	27.8	23.5	18.7	0.805
100×75 ×13	16.5	2 110	2.04	30.6	31.1	33.4	0.976	18.0	21.5	20.9	16.0	0.541
×10	13.0	1 650	1.64	24.2	31.5	32.3	0.791	14.3	21.9	19.8	16.1	0.549
×8	10.5	1 340	1.35	19.7	31.8	31.5	0.656	11.7	22.2	19.0	16.2	0.554
×6	7.96	1 010	1.04	15.1	32.1	30.8	0.511	9.01	22.4	18.3	16.3	0.559
90×75 ×13	15.5	1 980	1.51	24.8	27.6	29.3	0.946	17.8	21.9	21.8	15.6	0.672
×10	12.2	1 550	1.22	19.7	28.0	28.2	0.767	14.1	22.2	20.7	15.7	0.679
×8	9.86	1 260	1.01	16.1	28.3	27.5	0.636	11.6	22.5	20.0	15.8	0.683

	×6	7.49	954	0.779	12.3	28.6	26.8	0.495	8.89	22.8	19.3	15.9	0.687
	×5	6.28	800	0.660	10.4	28.7	26.4	0.421	7.50	22.9	18.9	16.0	0.689
90×65	×10	11.4	1 450	1.16	19.2	28.3	29.8	0.507	10.6	18.7	17.3	13.9	0.506
	×8	9.23	1 180	0.958	15.7	28.5	29.1	0.422	8.72	18.9	16.6	14.0	0.512
	×6	7.02	894	0.743	12.1	28.8	28.4	0.330	6.72	19.2	15.9	14.2	0.518
	×5	5.89	750	0.629	10.2	29.0	28.0	0.281	5.68	19.4	15.5	14.2	0.520
80×60	×10	10.2	1 300	0.808	15.1	24.9	26.5	0.388	8.92	17.3	16.5	12.8	0.543
	×8	8.29	1 060	0.670	12.4	25.2	25.8	0.324	7.33	17.5	15.8	12.9	0.549
	×6	6.31	804	0.522	9.50	25.5	25.1	0.254	5.66	17.8	15.1	13.0	0.555
	×5	5.30	675	0.443	8.02	25.6	24.7	0.217	4.79	17.9	14.7	13.0	0.558
75×50	×8	7.35	936	0.525	10.6	23.7	25.5	0.187	5.06	14.1	13.0	10.8	0.434
	×6	5.60	714	0.410	8.15	24.0	24.7	0.148	3.92	14.4	12.2	10.9	0.441
	×5	4.71	600	0.349	6.88	24.1	24.4	0.127	3.32	14.5	11.9	10.9	0.445
65×50	×8	6.72	856	0.351	8.03	20.2	21.3	0.180	4.97	14.5	13.8	10.6	0.572
	×6	5.13	654	0.275	6.19	20.5	20.6	0.142	3.85	14.7	13.1	10.7	0.580
	×5	4.32	550	0.235	5.24	20.7	20.2	0.122	3.27	14.9	12.7	10.8	0.583
	×4	3.49	444	0.192	4.25	20.8	19.9	0.100	2.66	15.0	12.4	10.8	0.587
55×35	×6	3.96	504	0.152	4.23	17.4	19.0	0.048	1.85	9.77	9.04	7.55	0.396
	×5	3.34	425	0.130	3.59	17.5	18.7	0.041	1.58	9.89	8.68	7.59	0.401
	×4	2.70	344	0.107	2.92	17.7	18.3	0.034	1.29	10.0	8.31	7.65	0.406
	×3	2.05	261	0.083	2.23	17.8	17.9	0.027	0.994	10.2	7.94	7.72	0.411
45×30	×6	3.25	414	0.082	2.79	14.0	15.7	0.029	1.32	8.35	8.22	6.44	0.426
	×5	2.75	350	0.070	2.37	14.2	15.4	0.025	1.13	8.46	7.86	6.47	0.433
	×4	2.23	284	0.058	1.94	14.3	15.0	0.021	0.930	8.58	7.49	6.51	0.439
	×3	1.70	216	0.045	1.49	14.5	14.6	0.016	0.717	8.72	7.12	6.57	0.445

TABLA B-7. Propiedades físicas medias de los metales más comunes (unidades ST)

METALES	Densidad (kg/dm³)	Coeficiente de dilatación lineal (°C)⁻¹	Límite de proporcionalidad (kgf/cm²)[a] Tens.	Límite de proporcionalidad (kgf/cm²)[a] Cort.	Resistencia última (esfuerzo de ruptura) (kgf/cm²) Tens.	Resistencia última (esfuerzo de ruptura) (kgf/cm²) Compr.	Resistencia última (esfuerzo de ruptura) (kgf/cm²) Cort.	Módulo de elasticidad (kgf/cm²) Tensión, E	Módulo de elasticidad (kgf/cm²) Cortante, G	Elongación (%) (en 50 mm)
Acero, 0.2% carbono, laminado en caliente	7.85		2450	1500	1200	[b]	3200	2.1×10^6	8.4×10^5	35
0.2% carbono, laminado en frío	7.85	Varía de 1.1×10^{-5} a 1.3×10^{-5}	4200	2500	5600	[b]	4200	2.1×10^6	8.4×10^5	18
0.6% carbono, laminado en caliente	7.85	Valor medio 1.18×10^{-5}	4200	2500	7000	[b]	5000	2.1×10^6	8.4×10^5	15
0.8% carbono, laminado en caliente	7.85		4900	2950	8450	[b]	7400	2.1×10^6	8.4×10^5	10
Fundición gris	7.20	1.08×10^{-5}	[c]	[d]	1400	5300	[d]	1.05×10^6	4.2×10^5	Pequeña
Fundición maleable	7.20	1.19×10^{-5}	2500	1600	3800		3400	1.76×10^6	8.8×10^5	18
Hierro forjado	7.70	1.20×10^{-5}	2100	1260	3500	[b]	2500	1.90×10^6	7×10^5	35
Aluminio fundido	2.64	2.31×10^{-5}	630		910	[b]	740	7×10^5	2.8×10^5	20
Aluminio, aleación 17ST	2.69	2.31×10^{-5}	2250	1500	3950	[b]	2250	7.2×10^5	2.8×10^5	
Latón, laminado (70% Cu) (30% Zn)	8.50	1.87×10^{-5}	1750	1050	3860	[b]	3400	9.8×10^5	4.2×10^5	30
Bronce, fundido	8.20	1.80×10^{-5}	1400		2300	3950		8.4×10^5	3.5×10^5	10
Cobre, estirado	8.80	1.68×10^{-5}	2670	1600	3860	[b]		1.2×10^5	4.2×10^5	4

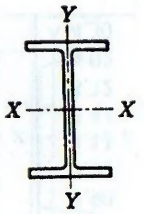
NOTAS: [a] El límite de proporcionalidad y el módulo elástico, a compresión, pueden tomarse los mismos que a tensión, excepto en la fundición o hierro fundido, cuyo límite de proporcionalidad es 1850 kgf/cm².

[b] Como resistencia última a compresión en materiales dúctiles puede tomarse el punto de cedencia o fluencia, que es ligeramente superior al límite de proporcionalidad a tensión.

[c] No está bién definido, aproximadamente vale 420 kgf/cm².

[d] La fundición se rompe o falla por tensión diagonal.

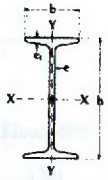
TABLA B-8. Perfiles H (vigas de ala ancha), europeos (unidades ST)



Denominación	Masa (peso)	Área transversal	Altura	Ala (o patín)		Espesor de alma	Eje X-X			Eje Y-Y		
				Ancho	Espesor		I	$S = \frac{I}{c}$	r	I	$S = \frac{I}{c}$	r
	kg/m	cm^2	cm	cm	cm	cm	cm^4	cm^3	cm	cm^4	cm^3	cm
14-14	35.7	45.5	14	14	1.25	0.85	1534	219	5.80	572	81.7	3.55
16-16	44.0	56.0	16	16	1.35	0.90	2500	312	6.67	922	115	4.06
18-18	53.0	67.5	18	18	1.45	0.95	3856	428	7.56	1410	156	4.56
20-20	62.8	80.0	20	20	1.55	1.00	5690	569	8.45	2068	207	5.08
22-22	73.2	93.0	22	22	1.65	1.05	8105	736	9.30	2929	266	5.60

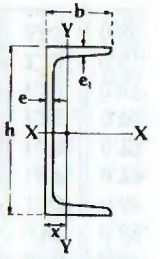
NOTA: El módulo de sección S suele representarse en Europa con Z, y el radio de inercia r, con k.

TABLA B-9. Perfiles I (vigas normales), europeos (unidades ST)



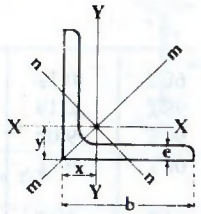
Perfil	Dimensiones en mm				Área transversal (mm^2)	Masa (peso) (kg/m)	Eje X-X			Eje Y-Y		
I	h	b	e	e_1			I_x (cm^4)	S_x (cm^3)	r_x (cm)	I_y (cm^4)	S_y (cm^3)	r_y (cm)
8	80	42	3.9	5.9	7.58	5.95	77,8	19.5	3.20	6.29	3.00	0.91
10	100	50	4.5	6.8	10.6	8.32	171	34.2	4.01	12.2	4.88	1.07
12	120	58	5.1	7.7	14.2	11.2	328	54.7	4.81	21.5	7.41	1.23
14	140	66	5.7	8.6	18.3	14.4	573	81.9	5.61	35.2	10.7	1.40
16	160	74	6.3	9.5	22.8	17.9	935	117	6.40	54.7	14.8	1.55
18	180	82	6.9	10.4	27.9	21.9	1450	161	7.20	81.3	19.8	1.71
20	200	90	7.5	11.3	33.5	26.3	2140	214	8.00	117	26.0	1.87
22	220	98	8.1	12.2	39.6	31.1	3060	278	8.80	162	33.1	2.02
24	240	106	8.7	13.1	46.1	36.2	4250	354	9.59	221	41.7	2.20
26	260	113	9.4	14.1	53.4	41.9	5740	442	10.4	288	51.0	2.32
28	280	119	10.1	15.2	61.1	48.0	7590	542	11.1	364	61.2	2.45
30	300	125	10.8	16.2	69.1	54.2	9800	653	11.9	451	72.2	2.56
32	320	131	11.5	17.3	77.8	61.1	12510	782	12.7	555	84.7	2.67
34	340	137	12.2	18.3	86.8	68.1	15700	923	13.5	674	98.4	2.80
36	360	143	13.0	19.5	97.1	76.2	19610	1090	14.2	818	114	2.90
38	380	149	13.7	20.5	107	84.0	24010	1260	15.0	975	131	3.02
40	400	155	14.4	21.6	118	92.6	29210	1460	15.7	1160	149	3.13
45	450	170	16.2	24.3	147	115	45850	2040	17.7	1730	203	3.43
50	500	185	18.0	27.0	180	141	68740	2750	19.6	2480	268	3.72
55	550	200	29.0	30.0	213	167	99180	3610	21.6	3490	349	4.02
60	600	215	21.6	32.4	254	199	139000	4630	23.4	4670	434	4.30

TABLA B-10. Perfiles C (o U) (canales), europeos (unidades ST)



Perfil	Dimensiones en mm				x	Área transversal	Masa (peso)	Eje X-X			Eje Y-Y		
[	h	b	e	e_1	(cm)	(cm^2)	(kg/m)	I_x (cm^4)	S_x (cm^3)	r_x (cm)	I_y (cm^4)	S_y (cm^3)	r_y (cm)
50-25	50	25	6	6	0.80	5.1	4.00	20.0	8.0	1.97	3.00	1.76	0.76
60-30	60	30	6	6	0.89	6.4	5.02	32.6	10.8	2.25	5.62	1.10	0.93
8	80	45	6	8	1.45	11.0	8.64	106	26.5	3.10	19.4	6.36	1.33
10	100	50	6	8.5	1.55	13.5	10.60	206	41.2	3.91	29.3	8.49	1.47
12	120	55	7	9	1.60	17.0	13.40	364	60.7	4.62	43.2	11.1	1.59
14	140	60	7	10	1.75	20.4	16.01	605	86.4	5.45	62.7	14.8	1.75
16	160	65	7.5	10.5	1.84	24.0	18.84	925	116	6.21	85.3	18.3	1.89
18	180	70	8	11	1.92	28.0	22.00	1350	150	6.95	114	22.4	2.02
20	200	75	8.5	11.5	2.01	32.2	25.30	1910	191	7.70	148	27.0	2.14
22	220	80	9	12.5	2.14	37.4	29.40	2690	245	8.48	197	33.6	2.30
25-8	250	80	10	12.5	2.14	42.5	34.00	3770	302	9.40	238	40.6	2.36
25-10	250	100	10	16	2.88	53.7	42.20	5180	414	9.80	440	61.7	2.86
30	300	90	13	14	2.14	60.7	47.65	7310	487	10.95	349	51.0	2.39

TABLA B-11. Perfiles L (angulares), de lados iguales, europeos (unidades ST)



Perfil	Dimensiones en mm		Área transversal (cm^2)	Masa (peso) (kg/m)	τ (cm)	Referencia al eje							
						$X-X=Y-Y$			$m-m$		$n-n$		
	b	e				$I_x = I_y$ (cm^4)	$S_x = S_y$ (cm^3)	$r_x = r_y$ (cm)	I_m (cm^4)	r_m (cm)	I_n (cm^4)	S_n (cm^3)	r_n (cm)
15-15-3	15	3	0.82	0.64	0.48	0.15	0.15	0.43	0.24	0.54	0.06	0.08	0.27
15-15-4		4	1.05	0.82	0.51	0.19	0.19	0.42	0.29	0.53	0.08	0.10	0.28
20-20-3	20	3	1.12	0.88	0.60	0.39	0.28	0.59	0.62	0.74	0.15	0.17	0.37
20-20-4		4	1.45	1.14	0.64	0.48	0.35	0.58	0.77	0.73	0.19	0.21	0.36
25-25-3	25	3	1.42	1.12	0.73	0.79	0.45	0.75	1.27	0.95	0.31	0.30	0.47
25-25-4		4	1.85	1.45	0.76	1.01	0.58	0.74	1.61	0.93	0.40	0.37	0.47
30-30-3	30	3	1.73	1.36	0.85	1.41	0.65	0.90	2.24	1.14	0.57	0.48	0.57
30-30-5		5	2.78	2.19	0.92	2.16	1.04	0.88	3.41	1.11	0.91	0.70	0.57
35-35-4	35	4	2.67	2.10	1.00	2.96	1.18	1.05	4.68	1.33	1.24	0.88	0.68
35-35-6		6	3.87	3.04	1.08	4.14	1.71	1.04	6.50	1.30	1.77	1.55	0.68
40-40-4	40	4	3.08	2.42	1.12	4.48	1.56	1.21	7.09	1.52	1.86	1.17	0.77
40-40-6		6	4.48	3.52	1.20	6.33	2.26	1.19	9.98	1.49	2.67	1.57	0.77
40-40-8		8	5.80	4.55	1.28	7.89	2.90	1.16	12.40	1.46	3.38	1.81	0.76
45-45-5	45	5	4.30	3.38	1.28	7.83	2.43	1.35	12.4	1.70	3.25	1.80	0.87
45-45-7		7	5.86	4.60	1.36	10.4	3.31	1.33	16.4	1.67	4.39	2.28	0.87
45-45-9		9	7.34	5.76	1.44	12.6	4.12	1.31	19.8	1.64	5.40	2.65	0.86

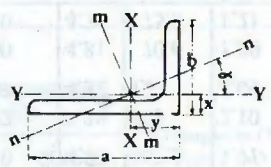
50-50-5		5	4.80	3.77	1.40	11.0	3.05	1.51	17.4	1.90	4.59	2.32	0.98
50-50-7	50	7	6.56	5.15	1.49	14.6	4.15	1.49	23.1	1.88	6.02	2.85	0.96
50-50-9		9	8.24	6.47	1.56	17.9	5.20	1.47	28.1	1.85	7.67	3.47	0.97
55-55-6		6	6.31	4.95	1.56	17.3	4.40	1.66	27.4	2.08	7.24	3.27	1.07
55-55-8	55	8	8.23	6.46	1.64	22.1	5.72	1.64	34.8	2.06	9.35	4.03	1.07
55-55-10		10	10.07	7.90	1.72	26.3	6.97	1.62	41.4	2.02	11.27	4.64	1.06
60-60-6		6	6.91	5.42	1.69	22.8	5.29	1.82	36.1	2.29	9.4	3.95	1.17
60-60-8	60	8	9.03	7.09	1.77	29.1	6.88	1.80	46.1	2.26	12.1	4.85	1.16
60-60-10		10	11.07	8.69	1.85	34.9	8.41	1.78	55.1	2.23	14.6	5.58	1.15
65-65-7		7	8.70	6.83	1.85	33.4	7.18	1.96	53.0	2.47	13.8	5.25	1.26
65-65-9	65	9	10.98	8.82	1.93	41.3	9.04	1.94	65.4	2.44	17.2	6.31	1.25
65-65-11		11	13.17	10.34	2.00	48.8	10.80	1.91	76.8	2.42	20.7	7.30	1.25
70-70-7		7	9.40	7.38	1.97	42.4	8.4	2.12	67.1	2.67	17.6	6.29	1.37
70-70-9	70	9	11.90	9.34	2.05	52.6	10.6	2.10	83.1	2.64	22.0	7.57	1.36
70-70-11		11	14.30	11.23	2.13	61.8	12.7	2.08	97.6	2.61	26.0	8.65	1.35
75-75-8		8	11.5	9.03	2.13	58.9	11.0	2.26	93.3	2.85	24.4	8.11	1.46
75-75-10	75	10	14.1	11.07	2.21	71.4	13.5	2.25	113	2.83	29.8	9.54	1.45
75-75-12		12	16.7	13.11	2.29	82.4	15.8	2.22	130	2.79	34.7	10.70	1.44
80-80-8		8	12.3	9.66	2.26	72.3	12.6	2.42	115	3.06	29.6	9.2	1.55
80-80-10	80	10	15.1	11.85	2.34	87.5	15.5	2.41	139	3.03	35.9	10.8	1.54
80-80-12		12	17.9	14.05	2.41	102	18.2	2.39	161	3.00	43.0	12.6	1.53
90-90-9		9	15.5	12.17	2.54	116	18.0	2.74	184	3.45	47.8	13.3	1.76
90-90-11	90	11	18.7	14.68	2.62	138	21.6	2.72	218	3.41	57.1	15.4	1.75
90-90-13		13	21.8	17.11	2.70	158	25.1	2.69	250	3.39	65.9	17.3	1.74
100-100-10		10	19.2	15.07	2.82	177	24.7	3.04	280	3.82	73.3	18.4	1.95
100-100-12	100	12	22.7	17.82	2.90	207	29.2	3.02	328	3.80	86.2	21.0	1.95
100-100-14		14	26.2	20.57	2.98	235	31.5	3.00	372	3.77	98.3	23.4	1.94

(continúa)

TABLA B-11. *(Continuación)*

Perfil	Dimensiones en mm		Área transversal (cm^2)	Masa (peso) (kg/m)	τ (cm)	Referencia al eje							
						$X - X = Y - Y$			$m - m$			$n - n$	
	b	e				$I_x = I_y$ (cm^4)	$S_x = S_y$ (cm^3)	$r_x = r_y$ (cm)	I_m (cm^4)	r_m (cm)	I_n (cm^4)	S_n (cm^3)	r_n (cm)
120-120-11		11	25.4	19.94	3.36	341	39.5	3.66	541	4.62	140	29.4	2.35
120-120-13	120	13	29.7	23.31	3.44	394	46.0	3.64	625	4.59	162	33.4	2.34
120-120-15		15	33.9	26.61	3.51	446	52.5	3.63	705	4.56	186	37.5	2.34
127-127-9.5		9.5	23.2	18.25	3.48	351	38.0	3.88	557	4.90	144	29.2	2.49
127-127-12.7		12.7	30.9	24.27	3.63	457	50.4	3.86	725	4.85	189	36.8	2.48
127-127-13.2	127	13.2	32.2	25.31	3.65	479	52.9	3.85	763	4.84	196	37.9	2.48
127-127-14.2		14.2	34.4	27.00	3.66	506	55.8	3.84	802	4.83	210	40.5	2.48
127-127-16.76		16.76	40.0	31.44	3.73	578	64.4	3.80	914	4.78	241	45.7	2.46
140-140-13		13	35.0	27.48	3.92	638	63.3	4.27	1010	5.38	262	47.3	2.74
140-140-15	140	15	40.0	31.40	4.00	723	72.3	4.25	1150	5.36	298	52.7	2.73
140-140-17		17	45.0	35.33	4.08	805	81.2	4.23	1280	5.33	334	57.9	2.72
150-150-14		14	40.3	31.64	4.21	845	78.2	4.58	1340	5.77	347	58.3	2.94
150-150-16	150	16	45.7	35.87	4.29	945	88.7	4.56	1510	5.74	391	64.4	2.93
150-150-18		18	51.0	40.04	4.36	1052	99.3	4.54	1670	5.70	438	71.0	2.93

TABLA B-12. Perfiles L (angulares), de lados desiguales, europeos (unidades ST)



Perfil	Dimensiones en mm			Área transversal (cm^2)	Masa (peso) (kg/m)	y (cm)	x (cm)	α	Referencia al eje									
									$X-X$			$Y-Y$			$m-m$		$n-n$	
L	a	b	e						I_x (cm^4)	S_x (cm^3)	r_x (cm)	I_y (cm^4)	S_y (cm^3)	r_y (cm)	I_m (cm^4)	r_m (cm)	I_n (cm^4)	r_n (cm)
25-15-4	25	15	4	1.44	1.15	0.91	0.43	19°50′	0.79	0.49	0.74	0.26	0.24	0.89	0.87	0.77	0.18	0.35
30-20-4	30	20	4	1.88	1.48	0.97	0.56	23°4′	1.62	0.79	0.92	0.64	0.44	0.58	1.83	0.98	0.43	0.47
40-25-4.5	40	25	4.5	2.74	2.16	1.39	0.62	20°57′	4.22	1.62	1.24	1.43	0.76	0.72	4.67	1.30	0.98	0.59
50-40-5.8	50	40	5.8	5.00	3.95	1.59	1 09	31°	11.8	3.46	1.58	6.53	2.24	1.14	14.7	1.70	3.55	0.84
60-30-4			4	3.45	2.75	2.15	0.66	13°17′	12.0	3.12	1.86	2.40	1.02	0.83	12.5	1.90	1.69	0.70
60-30-6	60	30	6	5.20	4.13	2.17	0.71	18°14′	17.5	4.56	1.84	3.35	1.40	0.81	18.0	1.88	1.77	0.59
60-45-5			5	5.00	3.90	1.87	1.13	28°47′	17.1	4.15	1.84	8.46	2.51	1.30	20.7	2.03	4.92	0.99
60-45-7	60	45	7	6.87	5.30	1.96	1.23	28°	23.4	5.79	1.85	11.2	3.43	1.27	28.2	2.03	6.39	0.96
60-50-7			7	7.40	5.80	1.85	1.32	31°13′	26.3	6.32	1.88	16.9	4.60	1.51	31.6	2.07	11.6	1.25
60-50-9	60	50	9	9.20	7.22	1.91	1.43	31°	34.2	8.37	1.86	21.0	5.88	1.49	42.5	2.06	12.7	1.17
65-40-5			5	5.03	3.94	2.13	0.94	23°32′	20.5	4.70	2.02	6.53	2.13	1.13	23.8	2.17	3.24	0.80
65-40-7	65	40	7	6.95	5.45	2.24	0.97	21°36′	27.6	7.09	2.00	8.57	2.82	1.11	32.0	2.14	4.45	0.80
70-50-7			7	8.00	6.28	2.27	1.29	26°5′	37.7	7.95	2.17	16.0	4.31	1.41	44.5	2.35	9.23	1.07
70-50-9			9	10.12	7.95	2.36	1.37	26°	46.7	10.0	2.14	19.9	5.50	1.39	55.1	2.33	11.5	1.06
70-50-11	70	50	11	12.15	9.55	2.42	1.45	25°41	54.2	11.8	2.11	22.9	6.45	1.37	63.6	2.28	13.5	1.05
76-64-7.1			7.1	9.40	7.40	2.28	1.69	33°14′	56.0	10.5	2.44	35.3	7.49	1.93	71.4	2.76	19.8	1.45
76-64-7.25			7.25	9.55	7.50	2.29	1.75	33°	56.7	10.6	2.43	35.5	7.55	1.90	72.0	2.74	20.2	1.45
76-64-8.75	76	64	8.75	11.50	9.00	2.34	1.80	30°46′	64.4	12.0	2.36	38.8	8.43	1.83	78.5	2.61	23.5	1.44

(continúa)

TABLA B-12. (*Continuación*)

Perfil L	Dimensiones en mm			Área transversal (cm^2)	Masa (peso) (kg/m)	y (cm)	x (cm)	α	Referencia al eje									
									$X-X$			$Y-Y$			$m-m$		$n-n$	
	a	b	e						I_x (cm^4)	S_x (cm^3)	r_x (cm)	I_y (cm^4)	S_y (cm^3)	r_y (cm)	I_m (cm^4)	r_m (cm)	I_n (cm^4)	r_n (cm)
80-50-6			6	7.45	5.84	2.70	1.17	22°	48.6	9.14	2.65	18.6	4.86	1.58	54.0	2.72	11.4	1.23
80-50-8			8	9.97	7.80	2.74	1.22	21°20′	67.5	12.8	2.59	23.4	6.20	1.53	73.0	2.71	15.0	1.22
80-50-10	80	50	10	12.20	9.57	2.78	1.30	20°19′	80.6	15.7	2.57	26.5	7.16	1.48	89.2	2.70	17.9	1.21
90-60-5			5	7.39	5.80	2.90	1.41	23°23′	62.1	10.2	2.90	22.3	4.87	1.73	71.2	3.10	13.55	1.35
90-60-7	90	60	7	10.16	7.98	2.96	1.48	22°57′	82.4	13.6	2.84	29.4	6.51	1.71	94.0	3.04	18.40	1.34
90-60-9			9	12.89	10.12	3.02	1.55	22°41′	102	17.1	2.81	37.3	8.38	1.69	116.0	3.00	23.00	1.33
90-70-9	90	70	9	13.75	10.80	2.88	1.87	29°26′	107	17.5	2.79	56.5	11.0	2.03	131	3.08	33.5	1.56
90-70-11			11	16.60	13.03	2.94	1.95	29°17′	126	20.9	2.75	68.0	13.4	2.02	153	3.03	40.0	1.55
90-75-9	90	75	9	14.20	11.14	2.79	2.05	33°24′	110	17.7	2.78	70.6	12.9	2.23	140	3.13	34.1	1.54
90-75-11			11	17.15	13.46	2.84	2.14	32°27′	127	20.6	2.72	83.4	15.5	2.20	157	3.02	40.9	1.53
100-70-10			10	16.17	12.69	3.28	1.85	25°19′	156	23.3	3.10	66.3	12.8	2.00	183	3.62	40.3	1.57
100-70-12	100	70	12	19.17	15.00	3.35	1.91	24°26′	181	27.3	3.07	73.3	14.4	1.93	209	3.25	45.3	1.51
100-70-14			14	22.02	17.28	3.40	1.98	23°11′	201	30.6	3.02	80.8	16.0	1.91	229	3.22	49.0	1.45
100-85-10	100	85	10	17.65	13.85	3.03	2.35	35°15′	168	24.1	3.08	115	18.6	2.55	222	3.54	61.0	1.85
100-85-12			12	20.90	16.40	3.12	2.42	35°7′	192	28.0	3.03	131	21.6	2.54	252	3.47	72.2	1.84
110-70-8	110	70	8	13.75	10.80	3.60	2.62	24°44′	166	22.4	3.47	59.7	13.6	2.08	131	3.08	44.6	1.80
110-90-10	110	90	10	19.15	15.00	3.40	2.43	33°40′	223	29.4	3.41	138	21.0	2.68	290	3.89	71.2	1.92
110-90-12			12	22.80	18.00	3.46	2.50	33°	259	34.4	3.36	160	24.7	2.64	331	3.84	84.0	1.91
120-80-10	120	80	10	19.10	14.99	3.92	1.95	23°30′	276	34.2	3.80	98	16.1	2.26	317	4.07	56.8	1.71
120-80-12			12	22.70	17.82	4.00	2.02	23°17′	323	40.3	3.76	114	19.2	2.24	370	4.03	67.5	1.71
125-100-11	125	100	11	23.67	18.58	3.86	2.60	31°50′	359	41.5	3.90	202	27.4	2.92	457	4.38	105	2.10
125-100-13			13	27.62	21.68	3.90	2.67	31°30′	409	47.6	3.84	230	31.4	2.88	517	4.32	122	2.09
150-75-10	150	75	10	21.65	16.87	5.38	1.71	14°47′	486	50.5	4.74	96	16.6	2.10	500	4.81	70.6	1.80
150-75-12			12	25.75	20.21	5.42	1.79	14°30′	570	59.5	4.70	111	19.4	2.07	590	4.78	75.8	1.71

TABLA B-13. Propiedades físicas medias de los metales más comunes (unidades US)

METALES	Densidad (lb/ft^3)	Coeficiente de dilatación lineal [μ in./(in. · °F)]	Límite de proporcionalidad (ksi)[a]		Resistencia última (ksi)			Módulo de elasticidad (psi)[a]		Elongación (%) (en 2 in.)
			Tensión	Cortante	Tensión	Compr.	Cortante	Tensión, E	Cortante, G	
Acero, 0.2% carbono, laminado en caliente	490		35	21	60	[b]	45	29 × 10^6	12 × 10^6	35
0.2% carbono, laminado en frío	490	Varía de 6.1 a 7.3	60	36	80	[b]	60	29 × 10^6	12 × 10^6	18
0.6% carbono, laminado en caliente	490	El valor medio es 6.5	60	36	100	[b]	80	29 × 10^6	12 × 10^6	15
0.8% carbono, laminado en caliente	490		70	42	120	[b]	105	29 × 10^6	12 × 10^6	10
Fundición gris	450	6	[c]	[d]	20	75	[d]	15 × 10^6	6 × 10^6	Pequeña
Fundición maleable	450	6.6	36	23	54		48	25 × 10^6	12.5 × 10^6	18
Hierro forjado	480	6.7	30	18	50	[b]	35	27 × 10^6	10 × 10^6	35
Aluminio fundido	165	12.8	9		13	[b]	10.5	10 × 10^6	4 × 10^6	20
Aluminio, aleación 17ST	168	12.8	32	21	56	[b]	32	10.3 × 10^6	4 × 10^6	—
Latón, laminado (70% Cu, 30% Zn)	530	10.4	25	15	55	[b]	48	14 × 10^6	6 × 10^6	30
Bronce, fundido	510	10	20		33	56	—	12 × 10^6	5 × 10^6	10
Cobre, estirado	550	9.3	38	23	55	[b]	—	17 × 10^6	6 × 10^6	4

NOTAS

[a] El límite de proporcionalidad y el módulo elástico, a compresión, pueden tomarse los mismos que a tensión, excepto en la fundición o hierro fundido cuyo límite de proporcionalidad es aproximadamente 26 ksi.

[b] Como resistencia última a compresión en materiales dúctiles puede tomarse el punto de cedencia o fluencia que es ligeramente superior al límite de proporcionalidad a tensión.

[c] No está bien definido, aproximadamente vale 6 ksi.

[d] La fundición falla por tensión diagonal.

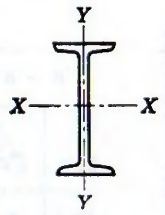


TABLA B-14. Perfiles H (vigas de ala ancha), americanos (W) (unidades US)

Designación	Área transversal ($in.^2$)	Altura (in.)	Espesor de alma (in.)	Ala (o patín)		Eje X-X			Eje Y-Y		
				Ancho (in.)	Espesor (in.)	I ($in.^4$)	$S = \frac{I}{c}$ ($in.^3$)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	I ($in.^4$)	$S = \frac{I}{c}$ ($in.^3$)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)
W36 ×300	88.3	36.74	0.945	16.655	1.680	20 300	1 110	15.2	1 300	156	3.83
×280	82.4	36.52	0.885	16.595	1.570	18 900	1 030	15.1	1 200	144	3.81
×260	76.5	36.26	0.840	16.550	1.440	17 300	953	15.0	1 090	132	3.78
×245	72.1	36.08	0.800	16.510	1.350	16 100	895	15.0	1 010	123	3.75
×230	67.6	35.90	0.760	16.470	1.260	15 000	837	14.9	940	114	3.73
W36 ×210	61.8	36.69	0.830	12.180	1.360	13 200	719	14.6	411	67.5	2.58
×194	57.0	36.49	0.765	12.115	1.260	12 100	664	14.6	375	61.9	2.56
×182	53.6	36.33	0.725	12.075	1.180	11 300	623	14.5	347	57.6	2.55
×170	50.0	36.17	0.680	12.030	1.100	10 500	580	14.5	320	53.2	2.53
×160	47.0	36.01	0.650	12.000	1.020	9 750	542	14.4	295	49.1	2.50
×150	44.2	35.85	0.625	11.975	0.940	9 040	504	14.3	270	45.1	2.47
×135	39.7	35.55	0.600	11.950	0.790	7 800	439	14.0	225	37.7	2.38
W33 ×241	70.9	34.18	0.830	15.860	1.400	14 200	829	14.1	932	118	3.63
×221	65.0	33.93	0.775	15.805	1.275	12 800	757	14.1	840	106	3.59
×201	59.1	33.68	0.715	15.745	1.150	11 500	684	14.0	749	95.2	3.56

W33 ×152	44.7	33.49	0.635	11.565	1.055	8 160	487	13.5	273	47.2	2.47
×141	41.6	33.30	0.605	11.535	0.960	7 450	448	13.4	246	42.7	2.43
×130	38.3	33.09	0.580	11.510	0.855	6 710	406	13.2	218	37.9	2.39
×118	34.7	32.86	0.550	11.480	0.740	5 900	359	13.0	187	32.6	2.32
W30 ×211	62.0	30.94	0.775	15.105	1.315	10 300	663	12.9	757	100	3.49
×191	56.1	30.68	0.710	15.040	1.185	9 170	598	12.8	673	89.5	3.46
×173	50.8	30.44	0.655	14.985	1.065	8 200	539	12.7	598	79.8	3.43
W30 ×132	38.9	30.31	0.615	10.545	1.000	5 770	380	12.2	196	37.2	2.25
×124	36.5	30.17	0.585	10.515	0.930	5 360	355	12.1	181	34.4	2.23
×116	34.2	30.01	0.565	10.495	0.850	4 930	329	12.0	164	31.3	2.19
×108	31.7	29.83	0.545	10.475	0.760	4 470	299	11.9	146	27.9	2.15
×99	29.1	29.65	0.520	10.450	0.670	3 990	269	11.7	128	24.5	2.10
W27 ×178	52.3	27.81	0.725	14.085	1.190	6 990	502	11.6	555	78.8	3.26
×161	47.4	27.59	0.660	14.020	1.080	6 280	455	11.5	497	70.9	3.24
×146	42.9	27.38	0.605	13.965	0.975	5 630	411	11.4	443	63.5	3.21
W27 ×114	33.5	27.29	0.570	10.070	0.930	4 090	299	11.0	159	31.5	2.18
×102	30.0	27.09	0.515	10.015	0.830	3 620	267	11.0	139	27.8	2.15
×94	27.7	26.92	0.490	9.990	0.745	3 270	243	10.9	124	24.8	2.12
×84	24.8	26.71	0.460	9.960	0.640	2 850	213	10.7	106	21.2	2.07
W24 ×162	47.7	25.00	0.705	12.955	1.220	5 170	414	10.4	443	68.4	3.05
×146	43.0	24.74	0.650	12.900	1.090	4 580	371	10.3	391	60.5	3.01
×131	38.5	24.48	0.605	12.855	0.960	4 020	329	10.2	340	53.0	2.97
×117	34.4	24.26	0.550	12.800	0.850	3 540	291	10.1	297	46.5	2.94
×104	30.6	24.06	0.500	12.750	0.750	3 100	258	10.1	259	40.7	2.91
W24 ×94	27.7	24.31	0.515	9.065	0.875	2 700	222	9.87	109	24.0	1.98
×84	24.7	24.10	0.470	9.020	0.770	2 370	196	9.79	94.4	20.9	1.95
×76	22.4	23.92	0.440	8.990	0.680	2 100	176	9.69	82.5	18.4	1.92
×68	20.1	23.73	0.415	8.965	0.585	1 830	154	9.55	70.4	15.7	1.87

(continúa)

TABLA B-14. (*Continuación*)

Designación	Área transversal (in.^{2})	Altura (in.)	Espesor de alma (in.)	Ala (o patín)		Eje *X-X*			Eje *Y-Y*		
				Ancho (in.)	Espesor (in.)	I (in.^{4})	$S = \frac{I}{c}$ (in.^{3})	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	I (in.^{4})	$S = \frac{I}{c}$ (in.^{3})	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)
W24 ×62	18.2	23.74	0.430	7.040	0.590	1 550	131	9.23	34.5	9.80	1.38
×55	16.2	23.57	0.395	7.005	0.505	1 350	114	9.11	29.1	8.30	1.34
W21 ×147	43.2	22.06	0.720	12.510	1.150	3 630	329	9.17	376	60.1	2.95
×132	38.8	21.83	0.650	12.440	1.035	3 220	295	9.12	333	53.5	2.93
×122	35.9	21.68	0.600	12.390	0.960	2 960	273	9.09	305	49.2	2.92
×111	32.7	21.51	0.550	12.340	0.875	2 670	249	9.05	274	44.5	2.90
×101	29.8	21.36	0.500	12.290	0.800	2 420	227	9.02	248	40.3	2.89
W21 ×93	27.3	21.62	0.580	8.420	0.930	2 070	192	8.70	92.9	22.1	1.84
×83	24.3	21.43	0.515	8.355	0.835	1 830	171	8.67	81.4	19.5	1.83
×73	21.5	21.24	0.455	8.295	0.740	1 600	151	8.64	70.6	17.0	1.81
×68	20.0	21.13	0.430	8.270	0.685	1 480	140	8.60	64.7	15.7	1.80
×62	18.3	20.99	0.400	8.240	0.615	1 330	127	8.54	57.5	13.9	1.77
W21 ×57	16.7	21.06	0.405	6.555	0.650	1 170	111	8.36	30.6	9.35	1.35
×50	14.7	20.83	0.380	6.530	0.535	984	94.5	8.18	24.9	7.64	1.30
×44	13.0	20.66	0.350	6.500	0.450	843	81.6	8.06	20.7	6.36	1.26
W18 ×119	35.1	18.97	0.655	11.265	1.060	2 190	231	7.90	253	44.9	2.69
×106	31.1	18.73	0.590	11.200	0.940	1 910	204	7.84	220	39.4	2.66
×97	28.5	18.59	0.535	11.145	0.870	1 750	188	7.82	201	36.1	2.65
×86	25.3	18.39	0.480	11.090	0.770	1 530	166	7.77	175	31.6	2.63
×76	22.3	18.21	0.425	11.035	0.680	1 330	146	7.73	152	27.6	2.61
W18 ×71	20.8	18.47	0.495	7.635	0.810	1 170	127	7.50	60.3	15.8	1.70
×65	19.1	18.35	0.450	7.590	0.750	1 070	117	7.49	54.8	14.4	1.69
×60	17.6	18.24	0.415	7.555	0.695	984	108	7.47	50.1	13.3	1.69
×55	16.2	18.11	0.390	7.530	0.630	890	98.3	7.41	44.9	11.9	1.67
×50	14.7	17.99	0.355	7.495	0.570	800	88.9	7.38	40.1	10.7	1.65

W18 ×46	13.5	18.06	0.360	6.060	0.605	712	78.8	7.25	22.5	7.43	1.29
×40	11.8	17.90	0.315	6.015	0.525	612	68.4	7.21	19.1	6.35	1.27
×35	10.3	17.70	0.300	6.000	0.425	510	57.6	7.04	15.3	5.12	1.22
W16 ×100	29.4	16.97	0.585	10.425	0.985	1 490	175	7.10	186	35.7	2.51
×89	26.2	16.75	0.525	10.365	0.875	1 300	155	7.05	163	31.4	2.49
×77	22.6	16.52	0.455	10.295	0.760	1 110	134	7.00	138	26.9	2.47
×67	19.7	16.33	0.395	10.235	0.665	954	117	6.96	119	23.2	2.46
W16 ×57	16.8	16.43	0.430	7.120	0.715	758	92.2	6.72	43.1	12.1	1.60
×50	14.7	16.26	0.380	7.070	0.630	659	81.0	6.68	37.2	10.5	1.59
×45	13.3	16.13	0.345	7.035	0.565	586	72.7	6.65	32.8	9.34	1.57
×40	11.8	16.01	0.305	6.995	0.505	518	64.7	6.63	28.9	8.25	1.57
×36	10.6	15.86	0.295	6.985	0.430	448	56.5	6.51	24.5	7.00	1.52
W16 ×31	9.12	15.88	0.275	5.525	0.440	375	47.2	6.41	12.4	4.49	1.17
×26	7.68	15.69	0.250	5.500	0.345	301	38.4	6.26	9.59	3.49	1.12
W14 ×730	215.0	22.42	3.070	17.890	4.910	14 300	1 280	8.17	4 720	527	4.69
×665	196.0	21.64	2.830	17.650	4.520	12 400	1 150	7.98	4 170	472	4.62
×605	178.0	20.92	2.595	17.415	4.160	10 800	1 040	7.80	3 680	423	4.55
×550	162.0	20.24	2.380	17.200	3.820	9 430	931	7.63	3 250	378	4.49
×500	147.0	19.60	2.190	17.010	3.500	8 210	838	7.48	2 880	339	4.43
×455	134.0	19.02	2.015	16.835	3.210	7 190	756	7.33	2 560	304	4.38
W14 ×426	125.0	18.67	1.875	16.695	3.035	6 600	707	7.26	2 360	283	4.34
×398	117.0	18.29	1.770	16.590	2.845	6 000	656	7.16	2 170	262	4.31
×370	109.0	17.92	1.655	16.475	2.660	5 440	607	7.07	1 990	241	4.27
×342	101.0	17.54	1.540	16.360	2.470	4 900	559	6.98	1 810	221	4.24
W14×311	91.4	17.12	1.410	16.230	2.260	4 330	506	6.88	1 610	199	4.20
×283	83.3	16.74	1.290	16.110	2.070	3 840	459	6.79	1 440	179	4.17
×257	75.6	16.38	1.175	15.995	1.890	3 400	415	6.71	1 290	161	4.13
×233	68.5	16.04	1.070	15.890	1.720	3 010	375	6.63	1 150	145	4.10
×211	62.0	15.72	0.980	15.800	1.560	2 660	338	6.55	1 030	130	4.07

(continúa)

TABLA B-14. (*Continuación*)

Designación	Área transversal (in.^{2})	Altura (in.)	Espesor de alma (in.)	Ala (o patín)		Eje *X-X*			Eje *Y-Y*		
				Ancho (in.)	Espesor (in.)	I (in.^{4})	$S = \frac{I}{c}$ (in.^{3})	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	I (in.^{4})	$S = \frac{I}{c}$ (in.^{3})	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)
×193	56.8	15.48	0.890	15.710	1.440	2 400	310	6.50	931	119	4.05
×176	51.8	15.22	0.830	15.650	1.310	2 140	281	6.43	838	107	4.02
×159	46.7	14.98	0.745	15.565	1.190	1 900	254	6.38	748	96.2	4.00
×145	42.7	14.78	0.680	15.500	1.090	1 710	232	6.33	677	87.3	3.98
W14 ×132	38.8	14.66	0.645	14.725	1.030	1 530	209	6.28	548	74.5	3.76
×120	35.3	14.48	0.590	14.670	0.940	1 380	190	6.24	495	67.5	3.74
×109	32.0	14.32	0.525	14.605	0.860	1 240	173	6.22	447	61.2	3.73
×99	29.1	14.16	0.485	14.565	0.780	1 110	157	6.17	402	55.2	3.71
×90	26.5	14.02	0.440	14.520	0.710	999	143	6.14	362	49.9	3.70
W14 ×82	24.1	14.31	0.510	10.130	0.855	882	123	6.05	148	29.3	2.48
×74	21.8	14.17	0.450	10.070	0.785	796	112	6.04	134	26.6	2.48
×68	20.0	14.04	0.415	10.035	0.720	723	103	6.01	121	24.2	2.46
×61	17.9	13.89	0.375	9.995	0.645	640	92.2	5.98	107	21.5	2.45
W14 ×53	15.6	13.92	0.370	8.060	0.660	541	77.8	5.89	57.7	14.3	1.92
×48	14.1	13.79	0.340	8.030	0.595	485	70.3	5.85	51.4	12.8	1.91
×43	12.6	13.66	0.305	7.995	0.530	428	62.7	5.82	45.2	11.3	1.89
W14 ×38	11.2	14.10	0.310	6.770	0.515	385	54.6	5.87	26.7	7.88	1.55
×34	10.0	13.98	0.285	6.745	0.455	340	48.6	5.83	23.3	6.91	1.53
×30	8.85	13.84	0.270	6.730	0.385	291	42.0	5.73	19.6	5.82	1.49
W14 ×26	7.69	13.91	0.255	5.025	0.420	245	35.3	5.65	8.91	3.54	1.08
×22	6.49	13.74	0.230	5.000	0.335	199	29.0	5.54	7.00	2.80	1.04

W12 ×336	98.8	16.82	1.775	13.385	2.955	4 060	483	6.41	1 190	177	3.47
×305	89.6	16.32	1.625	13.235	2.705	3 550	435	6.29	1 050	159	3.42
×279	81.9	15.85	1.530	13.140	2.470	3 110	393	6.16	937	143	3.38
×252	74.1	15.41	1.395	13.005	2.250	2 720	353	6.06	828	127	3.34
×230	67.7	15.05	1.285	12.895	2.070	2 420	321	5.97	742	115	3.31
×210	61.8	14.71	1.180	12.790	1.900	2 140	292	5.89	664	104	3.28
×190	55.8	14.38	1.060	12.670	1.735	1 890	263	5.82	589	93.0	3.25
×170	50.0	14.03	0.960	12.570	1.560	1 650	235	5.74	517	82.3	3.22
×152	44.7	13.71	0.870	12.480	1.400	1 430	209	5.66	454	72.8	3.19
×136	39.9	13.41	0.790	12.400	1.250	1 240	186	5.58	398	64.2	3.16
×120	35.3	13.12	0.710	12.320	1.105	1 070	163	5.51	345	56.0	3.13
×106	31.2	12.89	0.610	12.220	0.990	933	145	5.47	301	49.3	3.11
×96	28.2	12.71	0.550	12.160	0.900	833	131	5.44	270	44.4	3.09
×87	25.6	12.53	0.515	12.125	0.810	740	118	5.38	241	39.7	3.07
×79	23.2	12.38	0.470	12.080	0.735	662	107	5.34	216	35.8	3.05
×72	21.1	12.25	0.430	12.040	0.670	597	97.4	5.31	195	32.4	3.04
×65	19.1	12.12	0.390	12.000	0.605	533	87.9	5.28	174	29.1	3.02
W12 ×58	17.0	12.19	0.360	10.010	0.640	475	78.0	5.28	107	21.4	2.51
×53	15.6	12.06	0.345	9.995	0.575	425	70.6	5.23	95.8	19.2	2.48
W12 ×50	14.7	12.19	0.370	8.080	0.640	394	64.7	5.18	56.3	13.9	1.96
×45	13.2	12.06	0.335	8.045	0.575	350	58.1	5.15	50.0	12.4	1.94
×40	11.8	11.94	0.295	8.005	0.515	310	51.9	5.13	44.1	11.0	1.93
W12 ×35	10.3	12.50	0.300	6.560	0.520	285	45.6	5.25	24.5	7.47	1.54
×30	8.79	12.34	0.260	6.520	0.440	238	38.6	5.21	20.3	6.24	1.52
×26	7.65	12.22	0.230	6.490	0.380	204	33.4	5.17	17.3	5.34	1.51
W12 ×22	6.48	12.31	0.260	4.030	0.425	156	25.4	4.91	4.66	2.31	0.847
×19	5.57	12.16	0.235	4.005	0.350	130	21.3	4.82	3.76	1.88	0.822
×16	4.71	11.99	0.220	3.990	0.265	103	17.1	4.67	2.82	1.41	0.773
×14	4.16	11.91	0.200	3.970	0.225	88.6	14.9	4.62	2.36	1.19	0.753

(continúa)

TABLA B-14. (*Continuación*)

Designación	Área transversal (in.^{2})	Altura (in.)	Espesor de alma (in.)	Ala (o patín)		Eje *X-X*			Eje *Y-Y*		
				Ancho (in.)	Espesor (in.)	I (in.^{4})	$S = \frac{I}{c}$ (in.^{3})	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	I (in.^{4})	$S = \frac{I}{c}$ (in.^{3})	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)
W10 ×112	32.9	11.36	0.755	10.415	1.250	716	126	4.66	236	45.3	2.68
×100	29.4	11.10	0.680	10.340	1.120	623	112	4.60	207	40.0	2.65
×88	25.9	10.84	0.605	10.265	0.990	534	98.5	4.54	179	34.8	2.63
×77	22.6	10.60	0.530	10.190	0.870	455	85.9	4.49	154	30.1	2.60
×68	20.0	10.40	0.470	10.130	0.770	394	75.7	4.44	134	26.4	2.59
×60	17.6	10.22	0.420	10.080	0.680	341	66.7	4.39	116	23.0	2.57
×54	15.8	10.09	0.370	10.030	0.615	303	60.0	4.37	103	20.6	2.56
×49	14.4	9.98	0.340	10.000	0.560	272	54.6	4.35	93.4	18.7	2.54
W10 ×45	13.3	10.10	0.350	8.020	0.620	248	49.1	4.32	53.4	13.3	2.01
×39	11.5	9.92	0.315	7.985	0.530	209	42.1	4.27	45.0	11.3	1.98
×33	9.71	9.73	0.290	7.960	0.435	170	35.0	4.19	36.6	9.20	1.94
W10 ×30	8.84	10.47	0.300	5.810	0.510	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37
×26	7.61	10.33	0.260	5.770	0.440	144	27.9	4.35	14.1	4.89	1.36
×22	6.49	10.17	0.240	5.750	0.360	118	23.2	4.27	11.4	3.97	1.33
W10 ×19	5.62	10.24	0.250	4.020	0.395	96.3	18.8	4.14	4.29	2.14	0.874
×17	4.99	10.11	0.240	4.010	0.330	81.9	16.2	4.05	3.56	1.78	0.844
×15	4.41	9.99	0.230	4.000	0.270	68.9	13.8	3.95	2.89	1.45	0.810
×12	3.54	9.87	0.190	3.960	0.210	53.8	10.9	3.90	2.18	1.10	0.785

W8 ×67	19.7	9.00	0.570	8.280	0.935	272	60.4	3.72	88.6	21.4	2.12
×58	17.1	8.75	0.510	8.220	0.810	228	52.0	3.65	75.1	18.3	2.10
×48	14.1	8.50	0.400	8.110	0.685	184	43.3	3.61	60.9	15.0	2.08
×40	11.7	8.25	0.360	8.070	0.560	146	35.5	3.53	49.1	12.2	2.04
×35	10.3	8.12	0.310	8.020	0.495	127	31.2	3.51	42.6	10.6	2.03
×31	9.13	8.00	0.285	7.995	0.435	110	27.5	3.47	37.1	9.27	2.02
W8 ×28	8.25	8.06	0.285	6.535	0.465	98.0	24.3	3.45	21.7	6.63	1.62
×24	7.08	7.93	0.245	6.495	0.400	82.8	20.9	3.42	18.3	5.63	1.61
W8 ×21	6.16	8.28	0.250	5.270	0.400	75.3	18.2	3.49	9.77	3.71	1.26
×18	5.26	8.14	0.230	5.250	0.330	61.9	15.2	3.43	7.97	3.04	1.23
W8 ×15	4.44	8.11	0.245	4.015	0.315	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876
×13	3.84	7.99	0.230	4.000	0.255	39.6	9.91	3.21	2.73	1.37	0.843
×10	2.96	7.89	0.170	3.940	0.205	30.8	7.81	3.22	2.09	1.06	0.841
W6 ×25	7.34	6.38	0.320	6.080	0.455	53.4	16.7	2.70	17.1	5.61	1.52
×20	5.87	6.20	0.260	6.020	0.365	41.4	13.4	2.66	13.3	4.41	1.50
×15	4.43	5.99	0.230	5.990	0.260	29.1	9.72	2.56	9.32	3.11	1.46
W6 ×16	4.74	6.28	0.260	4.030	0.405	32.1	10.2	2.60	4.43	2.20	0.966
×12	3.55	6.03	0.230	4.000	0.280	22.1	7.31	2.49	2.99	1.50	0.918
×9	2.68	5.90	0.170	3.940	0.215	16.4	5.56	2.47	2.19	1.11	0.905
W5 ×19	5.54	5.15	0.270	5.030	0.430	26.2	10.2	2.17	9.13	3.63	1.28
×16	4.68	5.01	0.240	5.000	0.360	21.3	8.51	2.13	7.51	3.00	1.27
W4 ×13	3.83	4.16	0.280	4.060	0.345	11.3	5.46	1.72	3.86	1.90	1.00

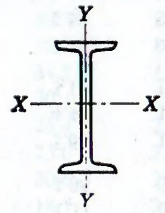


TABLA B-15. Perfiles I (vigas normales), americanos (S) (unidades US)

Designación	Área transversal ($in.^2$)	Altura (in.)	Espesor de alma (in.)	Ala (o patín)		Eje X-X			Eje Y-Y		
				Ancho (in.)	Espesor (in.)	I ($in.^4$)	$S = \frac{I}{c}$ ($in.^3$)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	I ($in.^4$)	$S = \frac{I}{c}$ ($in.^3$)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)
S24 ×121	35.6	24.50	0.800	8.050	1.090	3 160	258	9.43	83.3	20.7	1.53
×106	31.2	24.50	0.620	7.870	1.090	2 940	240	9.71	77.1	19.6	1.57
S24 ×100	29.3	24.00	0.745	7.245	0.870	2 390	199	9.02	47.7	13.2	1.27
×90	26.5	24.00	0.625	7.125	0.870	2 250	187	9.21	44.9	12.6	1.30
×80	23.5	24.00	0.500	7.000	0.870	2 100	175	9.47	42.2	12.1	1.34
S20 ×96	28.2	20.30	0.800	7.200	0.920	1 670	165	7.71	50.2	13.9	1.33
×86	25.3	20.30	0.660	7.060	0.920	1 580	155	7.89	46.8	13.3	1.36
S20 ×75	22.0	20.00	0.635	6.385	0.795	1 280	128	7.62	29.8	9.32	1.16
×66	19.4	20.00	0.505	6.255	0.795	1 190	119	7.83	27.7	8.85	1.19
S18 ×70	20.6	18.00	0.711	6.251	0.691	926	103	6.71	24.1	7.72	1.08
×54.7	16.1	18.00	0.461	6.001	0.691	804	89.4	7.07	20.8	6.94	1.14

S15 ×50	14.7	15.00	0.550	5.640	0.622	486	64.8	5.75	15.7	5.57	1.03
×42.9	12.6	15.00	0.411	5.501	0.622	447	59.6	5.95	14.4	5.23	1.07
S12 ×50	14.7	12.00	0.687	5.477	0.659	305	50.8	4.55	15.7	5.74	1.03
×40.8	12.0	12.00	0.462	5.252	0.659	272	45.4	4.77	13.6	5.16	1.06
S12 ×35	10.3	12.00	0.428	5.078	0.544	229	38.2	4.72	9.87	3.89	0.980
×31.8	9.35	12.00	0.350	5.000	0.544	218	36.4	4.83	9.36	3.74	1.00
S10 ×35	10.3	10.00	0.594	4.944	0.491	147	29.4	3.78	8.36	3.38	0.901
×25.4	7.46	10.00	0.311	4.661	0.491	124	24.7	4.07	6.79	2.91	0.954
S8 ×23	6.77	8.00	0.441	4.171	0.426	64.9	16.2	3.10	4.31	2.07	0.798
×18.4	5.41	8.00	0.271	4.001	0.426	57.6	14.4	3.26	3.73	1.86	0.831
S7 ×20	5.88	7.00	0.450	3.860	0.392	42.4	12.1	2.69	3.17	1.64	0.734
×15.3	4.50	7.00	0.252	3.662	0.392	36.7	10.5	2.86	2.64	1.44	0.766
S6 ×17.25	5.07	6.00	0.465	3.565	0.359	26.3	8.77	2.28	2.31	1.30	0.675
×12.5	3.67	6.00	0.232	3.332	0.359	22.1	7.37	2.45	1.82	1.09	0.705
S5 ×14.75	4.34	5.00	0.494	3.284	0.326	15.2	6.09	1.87	1.67	1.01	0.620
×10	2.94	5.00	0.214	3.004	0.326	12.3	4.92	2.05	1.22	0.809	0.643
S4 ×9.5	2.79	4.00	0.326	2.796	0.293	6.79	3.39	1.56	0.903	0.646	0.569
×7.7	2.26	4.00	0.193	2.663	0.293	6.08	3.04	1.64	0.764	0.574	0.581
S3 ×7.5	2.21	3.00	0.349	2.509	0.260	2.93	1.95	1.15	0.586	0.468	0.516
×5.7	1.67	3.00	0.170	2.330	0.260	2.52	1.68	1.23	0.455	0.390	0.522

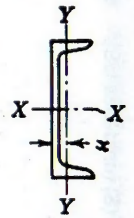


TABLA B-16. Perfiles C (canales), americanos (unidades US)

Designación	Área transversal (in.^{2})	Altura (in.)	Espesor de alma (in.)	Ala (o patín) Ancho (in.)	Ala (o patín) Espesor medio (in.)	Eje X-X I (in.^{4})	Eje X-X $S = \frac{I}{c}$ (in.^{3})	Eje X-X $r = \sqrt{I/A}$ (in.)	Eje Y-Y I (in.^{4})	Eje Y-Y $S = \frac{I}{c}$ (in.^{3})	Eje Y-Y $r = \sqrt{I/A}$ (in.^{3})	x (in.)
C15 ×50	14.7	15.00	0.716	3.716	0.650	404	53.8	5.24	11.0	3.78	0.867	0.798
×40	11.8	15.00	0.520	3.520	0.650	349	46.5	5.44	9.23	3.37	0.886	0.777
×33.9	9.96	15.00	0.400	3.400	0.650	315	42.0	5.62	8.13	3.11	0.904	0.787
C12 ×30	8.82	12.00	0.510	3.170	0.501	162	27.0	4.29	5.14	2.06	0.763	0.674
×25	7.35	12.00	0.387	3.047	0.501	144	24.1	4.43	4.47	1.88	0.780	0.674
×20.7	6.09	12.00	0.282	2.942	0.501	129	21.5	4.61	3.88	1.73	0.799	0.698
C10 ×30	8.82	10.00	0.673	3.033	0.436	103	20.7	3.42	3.94	1.65	0.669	0.649
×25	7.35	10.00	0.526	2.886	0.436	91.2	18.2	3.52	3.36	1.48	0.676	0.617

	×20	5.88	10.00	0.379	2.739	0.436	78.9	15.8	3.66	2.81	1.32	0.692	0.606
	×15.3	4.49	10.00	0.240	2.600	0.436	67.4	13.5	3.87	2.28	1.16	0.713	0.634
C9	×20	5.88	9.00	0.448	2.648	0.413	60.9	13.5	3.22	2.42	1.17	0.642	0.583
	×15	4.41	9.00	0.285	2.485	0.413	51.0	11.3	3.40	1.93	1.01	0.661	0.586
	×13.4	3.94	9.00	0.233	2.433	0.413	47.9	10.6	3.48	1.76	0.962	0.669	0.601
C8	×18.75	5.51	8.00	0.487	2.527	0.390	44.0	11.0	2.82	1.98	1.01	0.599	0.565
	×13.75	4.04	8.00	0.303	2.343	0.390	36.1	9.03	2.99	1.53	0.854	0.615	0.553
	×11.5	3.38	8.00	0.220	2.260	0.390	32.6	8.14	3.11	1.32	0.781	0.625	0.571
C7	×14.75	4.33	7.00	0.419	2.299	0.366	27.2	7.78	2.51	1.38	0.779	0.564	0.532
	×12.25	3.60	7.00	0.314	2.194	0.366	24.2	6.93	2.60	1.17	0.703	0.571	0.525
	×9.8	2.87	7.00	0.210	2.090	0.366	21.3	6.08	2.72	0.968	0.625	0.581	0.540
C6	×13	3.83	6.00	0.437	2.157	0.343	17.4	5.80	2.13	1.05	0.642	0.525	0.514
	×10.5	3.09	6.00	0.314	2.034	0.343	15.2	5.06	2.22	0.866	0.564	0.529	0.499
	×8.2	2.40	6.00	0.200	1.920	0.343	13.1	4.38	2.34	0.693	0.492	0.537	0.511
C5	×9	2.64	5.00	0.325	1.885	0.320	8.90	3.56	1.83	0.632	0.450	0.489	0.478
	×6.7	1.97	5.00	0.190	1.750	0.320	7.49	3.00	1.95	0.479	0.378	0.493	0.484
C4	×7.25	2.13	4.00	0.321	1.721	0.296	4.59	2.29	1.47	0.433	0.343	0.450	0.459
	×5.4	1.59	4.00	0.184	1.584	0.296	3.85	1.93	1.56	0.319	0.283	0.449	0.457
C3	×6	1.76	3.00	0.356	1.596	0.273	2.07	1.38	1.08	0.305	0.268	0.416	0.455
	×5	1.47	3.00	0.258	1.498	0.273	1.85	1.24	1.12	0.247	0.233	0.410	0.438
	×4.1	1.21	3.00	0.170	1.410	0.273	1.66	1.10	1.17	0.197	0.202	0.404	0.436

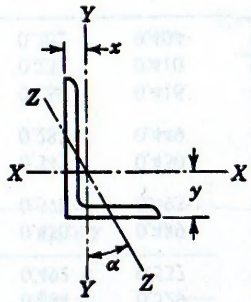


TABLA B-17. Perfiles L (angulares), lados iguales y lados desiguales, americanos (unidades US)

Dimensiones (lados y espesor) (in.)	Masa (peso) (lb/ft)	Área transversal ($in.^2$)	Eje X-X				Eje Y-Y				Eje Z-Z	
			I ($in.^4$)	$S = \frac{I}{c}$ ($in.^3$)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	y (in.)	I ($in.^4$)	$S = \frac{I}{c}$ ($in.^3$)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	x (in.)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	tan α
L9 × 4 × 5/8	26.3	7.73	64.9	11.5	2.90	3.36	8.32	2.65	1.04	0.858	0.847	0.216
9/16	23.8	7.00	59.1	10.4	2.91	3.33	7.63	2.41	1.04	0.834	0.850	0.218
1/2	21.3	6.25	53.2	9.34	2.92	3.31	6.92	2.17	1.05	0.810	0.854	0.220
L8 × 8 × 1 1/8	56.9	16.7	98.0	17.5	2.42	2.41	98.0	17.5	2.42	2.41	1.56	1.000
1	51.0	15.0	89.0	15.8	2.44	2.37	89.0	15.8	2.44	2.37	1.56	1.000
7/8	45.0	13.2	79.6	14.0	2.45	2.32	79.6	14.0	2.45	2.32	1.57	1.000
3/4	38.9	11.4	69.7	12.2	2.47	2.28	69.7	12.2	2.47	2.28	1.58	1.000
5/8	32.7	9.61	59.4	10.3	2.49	2.23	59.4	10.3	2.49	2.23	1.58	1.000

9/16	29.6	8.68	54.1	9.34	2.50	2.21	54.1	9.34	2.50	2.21	1.59	1.000
1/2	26.4	7.75	48.6	8.36	2.50	2.19	48.6	8.36	2.50	2.19	1.59	1.000
L8 × 6 × 1	44.2	13.0	80.8	15.1	2.49	2.65	38.8	8.92	1.73	1.65	1.28	0.543
7/8	39.1	11.5	72.3	13.4	2.51	2.61	34.9	7.94	1.74	1.61	1.28	0.547
3/4	33.8	9.94	63.4	11.7	2.53	2.56	30.7	6.92	1.76	1.56	1.29	0.551
5/8	28.5	8.36	54.1	9.87	2.54	2.52	26.3	5.88	1.77	1.52	1.29	0.554
9/16	25.7	7.56	49.3	8.95	2.55	2.50	24.0	5.34	1.78	1.50	1.30	0.556
1/2	23.0	6.75	44.3	8.02	2.56	2.47	21.7	4.79	1.79	1.47	1.30	0.558
7/16	20.2	5.93	39.2	7.07	2.57	2.45	19.3	4.23	1.80	1.45	1.31	0.560
L8 × 4 × 1	37.4	11.0	69.6	14.1	2.52	3.05	11.6	3.94	1.03	1.05	0.846	0.247
3/4	28.7	8.44	54.9	10.9	2.55	2.95	9.36	3.07	1.05	0.953	0.852	0.258
9/16	21.9	6.43	42.8	8.35	2.58	2.88	7.43	2.38	1.07	0.882	0.861	0.265
1/2	19.6	5.75	38.5	7.49	2.59	2.86	6.74	2.15	1.08	0.859	0.865	0.267
L7 × 4 × 3/4	26.2	7.69	37.8	8.42	2.22	2.51	9.05	3.03	1.09	1.01	0.860	0.324
5/8	22.1	6.48	32.4	7.14	2.24	2.46	7.84	2.58	1.10	0.963	0.865	0.329
1/2	17.9	5.25	26.7	5.81	2.25	2.42	6.53	2.12	1.11	0.917	0.872	0.335
3/8	13.6	3.98	20.6	4.44	2.27	2.37	5.10	1.63	1.13	0.870	0.880	0.340
L6 × 6 × 1	37.4	11.0	35.5	8.57	1.80	1.86	35.5	8.57	1.80	1.86	1.17	1.000
7/8	33.1	9.73	31.9	7.63	1.81	1.82	31.9	7.63	1.81	1.82	1.17	1.000
3/4	28.7	8.44	28.2	6.66	1.83	1.78	28.2	6.66	1.83	1.78	1.17	1.000
5/8	24.2	7.11	24.2	5.66	1.84	1.73	24.2	5.66	1.84	1.73	1.18	1.000
9/16	21.9	6.43	22.1	5.14	1.85	1.71	22.1	5.14	1.85	1.71	1.18	1.000
1/2	19.6	5.75	19.9	4.61	1.86	1.68	19.9	4.61	1.86	1.68	1.18	1.000
7/16	17.2	5.06	17.7	4.08	1.87	1.66	17.7	4.08	1.87	1.66	1.19	1.000
3/8	14.9	4.36	15.4	3.53	1.88	1.64	15.4	3.53	1.88	1.64	1.19	1.000
5/16	12.4	3.65	13.0	2.97	1.89	1.62	13.0	2.97	1.89	1.62	1.20	1.000

(continúa)

TABLA B-17. (*Continuación*)

Dimensiones (lados y espesor) (in.)	Masa (peso) (lb/ft)	Área transversal ($in.^2$)	Eje X-X				Eje Y-Y				Eje Z-Z	
			I ($in.^4$)	$S = \frac{I}{c}$ ($in.^3$)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	y (in.)	I ($in.^4$)	$S = \frac{I}{c}$ ($in.^3$)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	x (in.)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	tan α
L6 × 4 × 7/8	27.2	7.98	27.7	7.15	1.86	2.12	9.75	3.39	1.11	1.12	0.857	0.421
3/4	23.6	6.94	24.5	6.25	1.88	2.08	8.68	2.97	1.12	1.08	0.860	0.428
5/8	20.0	5.86	21.1	5.31	1.90	2.03	7.52	2.54	1.13	1.03	0.864	0.435
9/16	18.1	5.31	19.3	4.83	1.90	2.01	6.91	2.31	1.14	1.01	0.866	0.438
1/2	16.2	4.75	17.4	4.33	1.91	1.99	6.27	2.08	1.15	0.987	0.870	0.440
7/16	14.3	4.18	15.5	3.83	1.92	1.96	5.60	1.85	1.16	0.964	0.873	0.443
3/8	12.3	3.61	13.5	3.32	1.93	1.94	4.90	1.60	1.17	0.941	0.877	0.446
5/16	10.3	3.03	11.4	2.79	1.94	1.92	4.18	1.35	1.17	0.918	0.882	0.448
L6 × 3½ × ½	15.3	4.50	16.6	4.24	1.92	2.08	4.25	1.59	0.972	0.833	0.759	0.344
3/8	11.7	3.42	12.9	3.24	1.94	2.04	3.34	1.23	0.988	0.787	0.767	0.350
5/16	9.8	2.87	10.9	2.73	1.95	2.01	2.85	1.04	0.996	0.763	0.772	0.352
L5 × 5 × 7/8	27.2	7.98	17.8	5.17	1.49	1.57	17.8	5.17	1.49	1.57	0.973	1.000
3/4	23.6	6.94	15.7	4.53	1.51	1.52	15.7	4.53	1.51	1.52	0.975	1.000
5/8	20.0	5.86	13.6	3.86	1.52	1.48	13.6	3.86	1.52	1.48	0.978	1.000
1/2	16.2	4.75	11.3	3.16	1.54	1.43	11.3	3.16	1.54	1.43	0.983	1.000
7/16	14.3	4.18	10.0	2.79	1.55	1.41	10.0	2.79	1.55	1.41	0.986	1.000
3/8	12.3	3.61	8.74	2.42	1.56	1.39	8.74	2.42	1.56	1.39	0.990	1.000
5/16	10.3	3.03	7.42	2.04	1.57	1.37	7.42	2.04	1.57	1.37	0.994	1.000
L5 × 3½ × ¾	19.8	5.81	13.9	4.28	1.55	1.75	5.55	2.22	0.977	0.996	0.748	0.464
5/8	16.8	4.92	12.0	3.65	1.56	1.70	4.83	1.90	0.991	0.951	0.751	0.472
1/2	13.6	4.00	9.99	2.99	1.58	1.66	4.05	1.56	1.01	0.906	0.755	0.479
7/16	12.0	3.53	8.90	2.64	1.59	1.63	3.63	1.39	1.01	0.883	0.758	0.482
3/8	10.4	3.05	7.78	2.29	1.60	1.61	3.18	1.21	1.02	0.861	0.762	0.486
5/16	8.7	2.56	6.60	1.94	1.61	1.59	2.72	1.02	1.03	0.838	0.766	0.489
1/4	7.0	2.06	5.39	1.57	1.62	1.56	2.23	0.830	1.04	0.814	0.770	0.492

L5 × 3 × 5/8	15.7	4.61	11.4	3.55	1.57	1.80	3.06	1.39	0.815	0.796	0.644	0.349
1/2	12.8	3.75	9.45	2.91	1.59	1.75	2.58	1.15	0.829	0.750	0.648	0.357
7/16	11.3	3.31	8.43	2.58	1.60	1.73	2.32	1.02	0.837	0.727	0.651	0.361
3/8	9.8	2.86	7.37	2.24	1.61	1.70	2.04	0.888	0.845	0.704	0.654	0.364
5/16	8.2	2.40	6.26	1.89	1.61	1.68	1.75	0.753	0.853	0.681	0.658	0.368
1/4	6.6	1.94	5.11	1.53	1.62	1.66	1.44	0.614	0.861	0.657	0.663	0.371
L4 × 4 × 3/4	18.5	5.44	7.67	2.81	1.19	1.27	7.67	2.81	1.19	1.27	0.778	1.000
5/8	15.7	4.61	6.66	2.40	1.20	1.23	6.66	2.40	1.20	1.23	0.779	1.000
1/2	12.8	3.75	5.56	1.97	1.22	1.18	5.56	1.97	1.22	1.18	0.782	1.000
7/16	11.3	3.31	4.97	1.75	1.23	1.16	4.97	1.75	1.23	1.16	0.785	1.000
3/8	9.8	2.86	4.36	1.52	1.23	1.14	4.36	1.52	1.23	1.14	0.788	1.000
5/16	8.2	2.40	3.71	1.29	1.24	1.12	3.71	1.29	1.24	1.12	0.791	1.000
1/4	6.6	1.94	3.04	1.05	1.25	1.09	3.04	1.05	1.25	1.09	0.795	1.000
L4 × 3 1/2 × 5/8	14.7	4.30	6.37	2.35	1.22	1.29	4.52	1.84	1.03	1.04	0.719	0.745
1/2	11.9	3.50	5.32	1.94	1.23	1.25	3.79	1.52	1.04	1.00	0.722	0.750
7/16	10.6	3.09	4.76	1.72	1.24	1.23	3.40	1.35	1.05	0.978	0.724	0.753
3/8	9.1	2.67	4.18	1.49	1.25	1.21	2.95	1.17	1.06	0.955	0.727	0.755
5/16	7.7	2.25	3.56	1.25	1.26	1.18	2.55	0.994	1.07	0.932	0.730	0.757
1/4	6.2	1.81	2.91	1.03	1.27	1.16	2.09	0.808	1.07	0.909	0.734	0.759
L4 × 3 × 5/8	13.6	3.98	6.03	2.30	1.23	1.37	2.87	1.35	0.849	0.871	0.637	0.534
1/2	11.1	3.25	5.05	1.89	1.25	1.33	2.42	1.12	0.864	0.827	0.639	0.543
7/16	9.8	2.87	4.52	1.68	1.25	1.30	2.18	0.992	0.871	0.804	0.641	0.547
3/8	8.5	2.48	3.96	1.46	1.26	1.28	1.92	0.866	0.879	0.782	0.644	0.551
5/16	7.2	2.09	3.38	1.23	1.27	1.26	1.65	0.734	0.887	0.759	0.647	0.554
1/4	5.8	1.69	2.77	1.00	1.28	1.24	1.36	0.599	0.896	0.736	0.651	0.558
L3 1/2 × 3 1/2 × 1/2	11.1	3.25	3.64	1.49	1.06	1.06	3.64	1.49	1.06	1.06	0.683	1.000
7/16	9.8	2.87	3.26	1.32	1.07	1.04	3.26	1.32	1.07	1.04	0.684	1.000
3/8	8.5	2.48	2.87	1.15	1.07	1.01	2.87	1.15	1.07	1.01	0.687	1.000
5/16	7.2	2.09	2.45	0.976	1.08	0.990	2.45	0.976	1.08	0.990	0.690	1.000
1/4	5.8	1.69	2.01	0.794	1.09	0.968	2.01	0.794	1.09	0.968	0.694	1.000

(continúa)

TABLA B-17. *(Continuación)*

Dimensiones (lados y espesor) (in.)	Masa (peso) (lb/ft)	Área transversal ($in.^2$)	Eje X-X				Eje Y-Y				Eje Z-Z	
			I ($in.^4$)	$S = \frac{I}{c}$ ($in.^3$)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	y (in.)	I ($in.^4$)	$S = \frac{I}{c}$ ($in.^3$)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	x (in.)	$r = \sqrt{I/A}$ (in.)	tan α
L3½ × 3 × ½	10.2	3.00	3.45	1.45	1.07	1.13	2.33	1.10	0.881	0.875	0.621	0.714
7/16	9.1	2.65	3.10	1.29	1.08	1.10	2.09	0.975	0.889	0.853	0.622	0.718
3/8	7.9	2.30	2.72	1.13	1.09	1.08	1.85	0.851	0.897	0.830	0.625	0.721
5/16	6.6	1.93	2.33	0.954	1.10	1.06	1.58	0.722	0.905	0.808	0.627	0.724
¼	5.4	1.56	1.91	0.776	1.11	1.04	1.30	0.589	0.914	0.785	0.631	0.727
L3½ × 2½ × ½	9.4	2.75	3.24	1.41	1.09	1.20	1.36	0.760	0.704	0.705	0.534	0.486
7/16	8.3	2.43	2.91	1.26	1.09	1.18	1.23	0.677	0.711	0.682	0.535	0.491
3/8	7.2	2.11	2.56	1.09	1.10	1.16	1.09	0.592	0.719	0.660	0.537	0.496
5/16	6.1	1.78	2.19	0.927	1.11	1.14	0.939	0.504	0.727	0.637	0.540	0.501
¼	4.9	1.44	1.80	0.755	1.12	1.11	0.777	0.412	0.735	0.614	0.544	0.506
L3 × 3 × ½	9.4	2.75	2.22	1.07	0.898	0.932	2.22	1.07	0.898	0.932	0.584	1.000
7/16	8.3	2.43	1.99	0.954	0.905	0.910	1.99	0.954	0.905	0.910	0.585	1.000
3/8	7.2	2.11	1.76	0.833	0.913	0.888	1.76	0.833	0.913	0.888	0.587	1.000
5/16	6.1	1.78	1.51	0.707	0.922	0.865	1.51	0.707	0.922	0.865	0.589	1.000
¼	4.9	1.44	1.24	0.577	0.930	0.842	1.24	0.577	0.930	0.842	0.592	1.000
3/16	3.71	1.09	0.962	0.441	0.939	0.820	0.962	0.441	0.939	0.820	0.596	1.000
L3 × 2½ × ½	8.5	2.50	2.08	1.04	0.913	1.00	1.30	0.744	0.722	0.750	0.520	0.667
7/16	7.6	2.21	1.88	0.928	0.920	0.978	1.18	0.664	0.729	0.728	0.521	0.672

3/8	6.6	1.92	1.66	0.810	0.928	0.956	1.04	0.581	0.736	0.706	0.522	0.676
5/16	5.6	1.62	1.42	0.688	0.937	0.933	0.898	0.494	0.744	0.683	0.525	0.680
1/4	4.5	1.31	1.17	0.561	0.945	0.911	0.743	0.404	0.753	0.661	0.528	0.684
3/16	3.39	0.996	0.907	0.430	0.954	0.888	0.577	0.310	0.761	0.638	0.533	0.688
L3 × 2× 1/2	7.7	2.25	1.92	1.00	0.924	1.08	0.672	0.474	0.546	0.583	0.428	0.414
7/16	6.8	2.00	1.73	0.894	0.932	1.06	0.609	0.424	0.553	0.561	0.429	0.421
3/8	5.9	1.73	1.53	0.781	0.940	1.04	0.543	0.371	0.559	0.539	0.430	0.428
5/16	5.0	1.46	1.32	0.664	0.948	1.02	0.470	0.317	0.567	0.516	0.432	0.435
1/4	4.1	1.19	1.09	0.542	0.957	0.993	0.392	0.260	0.574	0.493	0.435	0.440
3/16	3.07	0.902	0.842	0.415	0.966	0.970	0.307	0.200	0.583	0.470	0.439	0.446
L2½ × 2½ ×½	7.7	2.25	1.23	0.724	0.739	0.806	1.23	0.724	0.739	0.806	0.487	1.000
3/8	5.9	1.73	0.984	0.566	0.753	0.762	0.984	0.566	0.753	0.762	0.487	1.000
5/16	5.0	1.46	0.849	0.482	0.761	0.740	0.849	0.482	0.761	0.740	0.489	1.000
1/4	4.1	1.19	0.703	0.394	0.769	0.717	0.703	0.394	0.769	0.717	0.491	1.000
3/16	3.07	0.902	0.547	0.303	0.778	0.694	0.547	0.303	0.778	0.694	0.495	1.000
L2½ × 2 ×3/8	5.3	1.55	0.912	0.547	0.768	0.831	0.514	0.363	0.577	0.581	0.420	0.614
5/16	4.5	1.31	0.788	0.466	0.776	0.809	0.446	0.310	0.584	0.559	0.422	0.620
1/4	3.62	1.06	0.654	0.381	0.784	0.787	0.372	0.254	0.592	0.537	0.424	0.626
3/16	2.75	0.809	0.509	0.293	0.793	0.764	0.291	0.196	0.600	0.514	0.427	0.631
L2 × 2 ×3/8	4.7	1.36	0.479	0.351	0.594	0.636	0.479	0.351	0.594	0.636	0.389	1.000
5/16	3.92	1.15	0.416	0.300	0.601	0.614	0.416	0.300	0.601	0.614	0.390	1.000
1/4	3.19	0.938	0.348	0.247	0.609	0.592	0.348	0.247	0.609	0.592	0.391	1.000
3/16	2.44	0.715	0.272	0.190	0.617	0.569	0.272	0.190	0.617	0.569	0.394	1.000
1/8	1.65	0.484	0.190	0.131	0.626	0.546	0.190	0.131	0.626	0.546	0.398	1.000

índice

Acoplamientos por medio de bridas, 71
Análisis al límite, 485
  articulaciones plásticas, 487
  en barras axialmente cargadas, 485
  en flexión, 485, 486
  mecanismo de colapso, 488
  en torsión, 486
Análisis, del efecto de flexión, 147
  de fuerzas internas, 2
Ángulo de recuperación, 480
Anillos giratorios, esfuerzos en, 22, 23
Árbol (o eje) estáticamente indeterminado, 66
Articulaciones plásticas, 487

Carga, dinámica o de impacto, 434
  coeficiente de impacto, 435, 438
  crítica en columnas, 357
    esfuerzo, 364
  deformación, 435, 437
  deformación máxima, 436
  limitaciones, 438
Carga excéntrica, en columnas, 378-382
  de pequeña longitud, 297
    caso general, 299
    localización de la línea neutra, 299
Carga excéntrica (*cont.*)
  en uniones soldadas, 411
  en uniones remachadas, 401
Carga(s) límite, definición, 471
  en carga axial, 482
  para flexión, 474
  para torsión, 472
Carga(s), móviles, 117
  repetida, 418
  útil, 135
Centro de cortante. Véase *Centro de torsión*
Centro de torsión, 442
  para ángulos, 445
  para canal (o perfil U), 443, 445
  para sección H de alas desiguales, 444
  para sección T, 445
  para sección Z, 445
Cilindros de pared gruesa, 465
  casos particulares, esfuerzos máximos, 468
  de pared delgada, 19
  esfuerzo en, 20
  presión en, 470
  sólo presión exterior, 469
  sólo presión interior, 468

Círculo de Mohr, 326
deformación normal, 28
deformación por cortante, 32
para esfuerzos, 306
aplicación del, 314
combinación de esfuerzo cortante por torsión con esfuerzo por flexión, 317
en diseños, 317
reglas para, 307
para momentos de inercia, 519
variación del círculo por esfuerzos, 326
Columnas, 356
carga crítica, 357
cargadas excéntricamente, 378, 383
esbeltez, 464
esfuerzo crítico, 364
factor de seguridad, 365, 370
fórmula de Euler, 358
fórmulas de interacción, 380
fórmulas empíricas para
acero, 369-371
aluminio, 372
madera, 372
limitaciones de la, 364
métodos de módulo tangencial, 368
Combinación de esfuerzos, axiales y por flexión, 289
por flexión y torsión, 317
Componente de la deformación, 324
de esfuerzo, 302
Comportamiento inelástico, 471
análisis al límite, 485
ángulo de recuperación, 480
en flexión, 474
en torsión, 472
esfuerzos residuales, 477
Concentración de esfuerzos, 1, 420, 422
Constante de integración, determinación de la, 174, 176
Cortante, simple, 13
doble, 13
Corte vertical, 90
definición de, 90, 91
diagramas de, 94, 104, 266
ecuaciones de, 92
incremento de, 103
relación de momento flexionante con, 102
signo de, 91
Curva elástica, ecuación diferencial de la, 172
forma de, 95

Deflexión por superposición, 217
en vigas estáticamente indeterminadas, 227, 229, 233, 247
Deflexión por superposición (*cont.*)
tabla para, 218, 246
Deflexiones en el centro del claro por transformación de la simetría, 209
Deformación(es), 28
angular o distorsión, 32, 63, 324. Véase también *Deformación de vigas*
axial, 31
biaxial, 38
condición constante para, 28
de vigas de concreto armado, 342
normal, 28
permanentes, 29, 478
por cortante, 32
de resorte helicoidal, 81
por torsión en un árbol, ángulo de, 62
triaxial, 38
de vigas, 170
ecuación de los tres momentos, 273
método del área de momentos, 181
método de la doble integración, 171
métodos de la energía elástica, 426
método de superposición, 217
método de la viga conjugada, 212
Deslizamiento de capas macizas sobrepuestas, 147
Desplazamiento por impacto, 428, 438
Desviación angular en vigas, para área de momentos, 183, 194, 200
método de la doble integración, 172
Desviación tangencial, 183
Diagrama de esfuerzo-deformación para material elasto-plástico, 28, 472
Diagrama de momentos. Véase también *Momento flexionante*
cargas en vigas en voladizo o ménsulas, 187
flexionantes, 94
trazo de, 104, 105
por partes, 184
Diagramas de fuerza cortante, 94, 104
construcción de, 105, 108
para vigas continuas, 263
Diseño por flexión y por cortante, 160
longitud crítica, 161
Distribución de fuerzas internas, análisis de, 2

Ecuación(es), de interacción para columnas, 378
general de momentos, 173
Ecuación de los tres momentos, 251
aplicación a vigas con apoyos simples, 259
aplicación a vigas estáticamente indeterminadas, 268
deflexiones por, 273

Ecuación de los tres momentos (*cont.*)
regla de signos, 254
términos para, 254
Eficacia de uniones remachadas, 389
Eje neutro
en cargas excéntricas de pequeña, longitud, 300
en estado plástico, 475
en flexión asimétrica, 452
en vigas curvas, 458
localización de, 124
Ejes principales de inercia, 521
Elementos estáticamente indeterminados (o hiperestáticos), cargados axialmente, 41
en torsión, 66
Energía elástica de deformación, 426
carga axial, 426
carga de flexión, 427
carga de torsión, 427
Esbeltez (mecánica), 364
Esfuerzo, 5
biaxial, 38
circunferencial, 20, 21
condición uniforme de, 6
cortante horizontal, 150
cortante longitudinal, 74
cortante por torsión, 64
por flexión, 126
tangencial, 13
térmico, 51
trabajo de, 30
triaxial, 38
Esfuerzo, admisible, 30
de adherencia, 352
coeficiente de impacto, 436
de contacto o aplastamiento, 16
en cilindros, 20
en el punto de ruptura, 30
en uniones longitudinales, 396
factores de concentración de, tabla de, 422
de origen térmico, 51
simple, 4
de trabajo, 30
Esfuerzos axiales
combinados con flexión, 289
análisis al límite, 485
deformación debida a, 31
tensión debida a, 5, 42, 51
torsión, 321
Esfuerzos combinados, 289
círculo de Mohr, 306
ecuación, 305
Esfuerzo cortante, 13
en vigas reforzadas, 341, 352
horizontal, 150
Esfuerzo cortante horizontal (*cont.*)
aplicación a la sección rectangular, 153
fórmula aproximada, 158
hipótesis y limitaciones de la fórmula, 154
sección I, 157, 158
sobre plano perpendicular, 75, 153
Esfuerzo(s), en un punto, 302
círculo de Mohr para, 306
normal, 303
notación, 303
principales, 305, 327
en círculo de Mohr, 309
variación del, 301
cálculo analítico, 303
Esfuerzo normal, 13, 125, 303, 326
combinación de esfuerzo cortante con, 303, 304, 307
combinación de esfuerzo por flexión con, 124, 290
cortante, 324, 326
en vigas. Véase *Esfuerzo cortante horizontal*
máximo y mínimo, 305
residuales, 477
en flexión, 479
en torsión, 478
recuperación, 480
Esfuerzo(s), último, 30
tangencial (o circunferencial), 13, 20
en cilindros de pared delgada, 21
en cilindros de pared gruesa, 465
triaxiales, 39
uniforme, 6, 7
excepciones, 7
Espaciamiento de remaches en vigas compuestas, 165
Estructuras de pisos, 137
Excentricidad, en máximo esfuerzo por flexión, 297
relación de, 372
Extensómetro, 330

Factor(es), de corrección para vigas curvas, 460
tabla de, 460
de distribución, 280
de seguridad, 31
en columnas, 365, 370
Fatiga, 418
ensayo de, 419
Flexión, asimétrica, 449
definición, 449
esfuerzos por, 450

Flexión, asimétrica (*cont.*)
inclinación del eje neutro, 451
lateral en vigas, 134
Flujo de cortante, en vigas, 152, 165, 534
en tubos de pared delgada, 75
Fórmula de Euler para columnas, 358
efecto de la condición de sujeción de los extremos, 363
limitaciones de la, 364
longitud equivalente, 363
Fórmulas de la elástica, resumen de, 218, 246
Fórmula de la escuadría, 126
hipótesis y limitaciones de, 122
Fórmula de la secante para columnas, 371, 382
curvas de diseño para, 384
Fórmula lineal para columna, 369
círculo de Mohr, 326
componentes de, 324
Fórmula para columnas tipo parabólico, 370
Frontera de elástico a plástico, en torsión, 473
en flexión, 475
Fuerza cortante en vigas, 92
diagramas, 94, 104, 263
directa, 13
indirecta, 13
relación a momento flexionante, 102
Fuerza de presión en cilindros, 19

Hooke, ley de, 32
en esfuerzos biaxiales, 39
en esfuerzos triaxiales, 39

Incremento de esfuerzo, 472
Interpretación de la fuerza cortante y del momento flexionante, 100

Junta, longitudinal, 21
a presión, 388
resistencia, 391
circunferencial, 21

Límite, aparente de proporcionalidad, 29
de elasticidad, 29
de proporcionalidad, 29
de resistencia a la fatiga, 419
Línea neutra en vigas reforzadas, 338, 343, 347, 351
Longitud crítica en vigas, 160

Material elasto-plástico, 472
diagramas esfuerzo-deformación, 472
Mecanismo de colapso, 488
Método del área de momentos, 181
convenios de signos, 184
desviación angular, 183
desviación tangencial, 183
diagrama de momentos por partes, 185
vigas empotradas y apoyadas, 237, 238
vigas en voladizo, 192
vigas simplemente apoyadas, 199, 209
Método de distribución de momentos, 278
descripción cualitativa, 279
factor de distribución, 280
momentos transmitidos, 278
procedimiento abreviado, 284, 285
reglas de signos, 280
resumen, 281
rigidez de la viga, 280
Método de la doble integración, 171
aplicación en vigas estáticamente determinadas, 228, 231, 232
ecuación general de momentos para, 217
Método(s), de la energía para la deformación, 426
de las cargas elásticas, 213
del trabajo virtual, 429
aplicación, 431
de la viga conjugada, 212
condiciones de apoyo, 216
Módulo, de elasticidad, 31
al cortante, 33
de resiliencia, 437
de rigidez, 33
de ruptura, 64, 128
a torsión, 64
en flexión, 128
de sección, 126
para secciones geométricas, 127
de Young, 31. Véase también *Módulo de elasticidad*
Módulo(s), elástico transversal, relación entre módulo elástico longitudinal y, 333
de resiliencia, 437
de tenacidad, 437
Momentos de inercia de áreas, 496
círculo de Mohr para, 519
computación en forma de tabla de, 508
con respecto a ejes inclinados, 517
de figuras compuestas, 504
de figuras geométricas, tabla de, 505
ejes principales de, 521
máximo y mínimo, 521
polar, 65, 498
por integración, 500

Momentos de inercia de áreas (*cont.*)
radio de giro (o radio de inercia), 498
traslación paralela de ejes, 499
unidades y signos, 497
Momento flexionante, 90
combinado con, esfuerzos axiales, 291
torsión, 316-321
diagramas, 94, 104
expresiones matemáticas para el, 93
por partes, 185
signo del, 91
límite, 472, 474
combinación con carga axial, 320
combinación con momento flexionante, 316-321
relación entre fuerza cortante, 102
variación del, 103
Momentos transmitidos, 278

National Lumber Manufacturers Association, fórmula para columnas de la, 372
Notación de fuerzas internas, 3
Núcleo de una sección, 297
sección circular, 300
sección H (ala ancha), 301
sección rectangular, 300

Paso en uniones remachadas, 389
Perfiles C (canales), americanos, propiedades de, 538
comerciales para vigas, 133
Perfiles L (ángulos), propiedades de
americanos, lados desiguales, 542
lados iguales, 540
europeos, lados desiguales, 552
lados iguales, 549
Peso muerto, 137
Pilar
de concreto armado, 42
reforzado, 42
Pilares estáticamente indeterminados, cargados axialmente, 41
Planos principales de flexión, 450
Presión de contacto en conexiones remachadas, ruptura por, 390, 398
Principio de las rigideces, 46
Producto de inercia (o momento producto), 511
traslación paralela de ejes para, 512
unidades y signos, 511
Propiedades
de perfiles americanos (S), 538
de perfiles americanos (W), 528
Propiedades (*cont.*)
de perfiles C (canales), 538
de perfiles H (ala ancha), 528
de perfiles I normales, 536
de perfiles L (ángulos), 540, 542, 549, 552
físicas medias de los metales más comunes, 527
Prueba de tensión de acero, 27
Punto
de fluencia, 29
de inflexión, 95

Radio, de inercia (radio de giro), 498
de curvatura en vigas, 126
relación con momento flexionante, 95
Rankine-Gordon, fórmula para columnas de, 369
Relación(es), entre carga, fuerza cortante y momento flexionante, 102
potencia-momento torsionante, 64
Resistencia, de una unión simple a traslape, 389
de una unión múltiple a tope, 391
posibles formas de falla, 392
Resortes helicoidales, 78
distensión, 81
fórmula de Wahl, 80
Resumen
de comportamiento inelástico, 493
deformación simple, 59
de esfuerzos combinados, 335
de uniones remachadas y soldadas, 415
de vigas continuas, 288
de vigas estáticamente indeterminadas, 249
de vigas reforzadas, 354
esfuerzos en vigas, 168
esfuerzo simple, 25
fuerza cortante y momento flexionante, 121
teoría de las columnas, 386
torsión, 86
Rigidez, a la flexión, 172
de la viga para distribución de momentos, 280
Roseta de deformaciones, 330
a 45° o rectangular, 331
a 60° o equiangular, 332
Rueda motriz, presión de contacto en, 56
Ruptura o falla, teorías sobre la, 424

Sección(es), asimétricas de vigas, esfuerzo de flexión en, 141
de exploración, 2
en vigas, 90, 101

Sección(es) (*cont.*)
equivalentes en vigas reforzadas, 337, 343, 351
tipo de uniones remachadas, 388
Separación de aros en una tubería de presión, 24
Superficie neutra, 123

Tabla
cargas en vigas en voladizo o ménsulas, 187, 229
factores de concentración de esfuerzos, 422
factores de corrección para vigas curvas, 460
fórmulas de deflexión para vigas, 218
métodos de resistencia de varias formas de sección transversal, 127
momentos de inercia, 505
términos que intervienen en la ecuación de los tres momentos, 254
vigas doblemente empotradas con diversos tipos de carga, 246
Teorema de Castigliano, 428
aplicación, 430
Teorías sobre la falla o ruptura, 424
de la cedencia de von Mises, 426
de la deformación máxima, 425
del esfuerzo cortante máximo, 426
del esfuerzo máximo, 424
Términos que intervienen en la ecuación de los tres momentos, 254
cargas especiales, 255
tabla de, 256
Torsión, 60
análisis al límite en, 486
de tubos de pared delgada, 75
flujo de cortante en, 75
fórmula, 64
hipótesis para, 61
para sección rectangular, 64
Trayectorias de esfuerzo, 314, 315, 316
de vigas, 316
en torsión, 314

Unión(es), a tope, 388, 391
en las estructuras, 16, 398
estructural remachada, 17
por solape, 388
remachadas, 387, 398
con carga excéntrica, 401
definiciones, 387
en las estructuras, 398
Unión(es), remachadas (*cont.*)
esfuerzos en, 396
hipótesis de, 394, 395
presión, 391
tipos fundamentales de ruptura, 389
Uniones soldadas, 406, 411
con carga excéntrica, 411
resistencia de, 407
tamaño máximo, 408
tipos de, 407

Vigas
compuestas, espaciamiento de remaches, en, 148, 165, 336, 342
de concreto (u hormigón) armado, 342, 347, 350
de sección en T, 351
de dos materiales. Véase *Vigas reforzadas*
no homogéneas, 336
tipos de sujeción, 87
Vigas continuas, 250-288. Véase también *Ecuación de los tres momentos*
apoyo simple, 259
con extremos empotrados, 268
deflexiones en, 273
diagrama de fuerza cortante, 266
distribución de momentos, 278
reacciones en, 263
Vigas curvas, 457, 460
desplazamiento del eje neutro en, 458
factores de corrección para, 460
Vigas estáticamente determinadas, 227
de doble integración, 230
método del área de momentos, 236
por superposición, 230
Vigas estáticamente indeterminadas, 227. Véase también *Vigas continuas*
deflexión en, 239
diseño de, 245
ecuación de los tres momentos, 268
método de la doble integración, 228, 230
método de superposición, 228, 229, 233, 247
por área de momentos, 236
tabla de momentos en los extremos y deflexiones, 246
transformación en viga simple, 243
Vigas reforzadas
de concreto, 343
deflexión de, 342
de madera, 336, 338
diseño de, 347
equilibrado, 347, 348
escasamente (subarmadas), 346, 347

Vigas reforzadas (*cont.*)
esfuerzo cortante en, 342, 352
esfuerzo de adherencia, 352
principios básicos, 336
sección equivalente, 337, 343, 351
en exceso (sobrearmadas), 339, 347

Wahl, fórmula de, para resorte helicoidal, 78

Young, módulo de, 31

RESISTENCIA DE MATERIALES

Esta obra brinda un panorama completo sobre la resistencia de materiales; un estudio analítico-práctico de los efectos de esfuerzo y deformación que originan las acciones de carga sobre estructuras y maquinaria, para determinar su resistencia, diseño y construcción.

Un libro esencial para estudiantes de ingeniería civil y mecánica y de otras ramas de la ciencia aplicada. Cada concepto teórico, cada ecuación o principio es explicado con un lenguaje claro; además, encontrará casi 1000 problemas y ejemplos resueltos.

Presenta temas como:

- Esfuerzo y deformación simple, torsión, fuerza cortante y momento flexionante en vigas.
- Esfuerzos y deformación de vigas estáticamente indeterminadas y vigas continuas.
- Esfuerzos combinados y vigas reforzadas y columnas.
- Uniones conectadas y soldadas, comportamiento inelástico.
- Momentos de inercia, tablas de metales y perfiles de acero.

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

ISBN 978-970-15-1056-8
9 789701 510568

ISBN 970-15-1056-9
9 789701 510568

Alfaomega Grupo Editor